Esame di Geometria - prova scritta del 30/6/2021.

1. Applicando l'algoritmo di Gauss alla matrice completa del sistema lineare considerato si ottiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 2 & -1 & b \\ 3 & -1 & 0 & -3 & c \\ 2 & 3 & 3 & 4 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 4 & -7 & b-2a \\ 0 & -1 & 3 & -12 & c-3a \\ 0 & 3 & 5 & -2 & d-2a \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 4 & -7 & b-2a \\ 0 & 0 & 7 & -19 & b+c-5a \\ 0 & 0 & -7 & 19 & d-3b+4a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 4 & -7 & b-2a \\ 0 & 0 & 7 & -19 & b+c-5a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a-2b+c+d \end{array}\right)$$

i pivot e i gradini sono indicati:

Per il teor. di Rouché-Capelli il sistema è compatibile se e solo se le matrici completa e incompleta del sistema hanno lo stesso rango, cioè se e solo se

$-a-2b+c+d=0.$

Il sistema omogeneo associato al sistema di partenza è equivalente al seguente, visto che la matrice è stata ridotta a gradini:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \\ 7x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Con il metodo di sostituzione all'indietro otteniamo:

$$x_3 = \frac{19}{7}x_4, \quad x_2 = -4x_3 + 7x_4 = -\frac{27}{7}x_4, \quad x_1 = x_3 - 3x_4 = -\frac{2}{7}x_4.$$

Lo spazio delle soluzioni ha dim 1 e una base è formata dal vettore $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{27}{7}, \frac{19}{7}, 1\right)$ oppure $(-2, -27, 19, 7)$ oppure $(2, 27, -19, -7)$.

2. Il polinomio caratteristico di A_c è

$p_{A_c}(x) = (1-x)(x-c-1)(x-c+1)$, dunque gli autovalori di A_c sono $1, c+1, c-1$.

Se $c \neq 0$, $c \neq 2$, tali autovalori sono tutti distinti, con molteplicità algebrica 1, quindi A_c è diagonalizzabile, ed è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c+1 & 0 \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}$.

Invece se $c = 0$ gli autovalori sono 1 con $m_a(1) = 2$ e -1 con $m_a(-1) = 1$; se $c = 2$, sono 1 con $m_a(1) = 2$ e 3 con $m_a(3) = 1$.

Se $c = 0$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m_g(1) = \dim \mathrm{Aut}(1) =$

$= 3 - rg(A_0 - E_3) = 3 - rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$,

dunque $m_a(1) \neq m_g(1)$ e A_0 non è diagonalizzabile.

Se $c = 2$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m_g(1) = 3 - rg(A_2 - E_3) =$

$= 3 - rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$; visto che $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni suo autovalore, A_2 è diagonalizzabile, ed è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Base di autovettori: si ottiene facendo l'unione di basi degli autospazi.

- $c+1$ è autovalore $\forall c \neq 0$.

$Aut(c+1) = \ker(A_c - (c+1)E_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$;

$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ una base è il vettore $(1, 1, 0)$.

- Per gli altri autospazi distinguiamo $c \neq 2$ e $c = 2$.

$\boxed{\text{Per } c \neq 2}$: $Aut(c-1) = \ker(A_c - (c-1)E_3) =$

$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2-c \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ Base $(1, -1, 0)$

$Aut(1) = \ker(A_c - E_3) = \ker \begin{pmatrix} c-1 & 1 & 2 \\ 1 & c-1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{cases} (c-1)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + (c-1)x_2 + c\,x_3 = 0 \end{cases}$ sistema omogeneo 2×3; una soluzione

è data dai minori 2×2 della matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} c-1 & 1 & 2 \\ 1 & c-1 & c \end{pmatrix}$, presi con i segni appropriati:

$$\left(c-2(c-1),\ 2-c(c-1),\ (c-1)^2-1\right)=$$

$$=\left(2-c,\ \underset{(2-c)(c+1)}{\underset{\parallel}{-c^2+c+2}},\ \underset{c(c-2)}{\underset{\parallel}{c^2-2c}}\right),$$ che è proporzionale a:

$(1,\ c+1,\ -c)$.

Dunque una base di autovettori è formata da:

$(1,1,0),\ (1,-1,0),\ (1,c+1,-c)$.

$\boxed{\text{Per } c=2}$ $\quad Aut(1)=Ker(A_2-E_3)=Ker\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$;

$x_1+x_2+2x_3=0$; $\quad x_2, x_3$ sono variabili libere,

$x_1=-x_2-2x_3$; ponendo $x_2=1, x_3=0$ otteniamo

$(-1,1,0)$; ponendo $x_2=0, x_3=1$ otteniamo

$(-2,0,1)$. Dunque una base di autovettori

è formata da $(1,1,0), (-1,1,0), (-2,0,1)$.

3. (a) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ lineare $\Rightarrow 4=\dim Ker f+\dim Im f$,

quindi f suriettiva e $Ker f=\langle(1,1,0,2)\rangle=\langle v\rangle$

è possibile. Una tale f si può costruire fissando

una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ ottenuta prolungando v:

$\mathcal{B}=(v_1, v_2, v_3, v)$, e una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$:

$\mathcal{B}'=(w_1,w_2,w_3)$. In questa situazione $\exists!\ f$ lineare

t.c. $f(v)=0,\ f(v_1)=w_1,\ f(v_2)=w_2,\ f(v_3)=w_3$.

Per l'arbitrarietà nella scelta di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ si sono molte f come richiesto.

(b) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare $\Rightarrow$ $2 = \dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g$; g lineare come richiesto può esistere, e deve avere nucleo di dim 1. Per costruire una tale g fissiamo una base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ e imponiamo per esempio $g(v_1) = (2,5)$, $g(v_2) = 0$. Oppure possiamo imporre $g(v_1) = g(v_2) = (2,5)$. In ogni caso g non è unica.

Per la costruzione di f e di g usiamo il teorema di determinazione di un'applicazione lineare.

(c) h non esiste; se $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è lineare, si ha $3 = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h$; ma qui si chiede $\operatorname{Ker} h = (0)$ e $\operatorname{Im} h = \langle v_1, v_2 \rangle$, che è impossibile.

4. $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_3y_3$ è la forma bilineare simmetrica rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$ chiaramente simmetrica.

Tale forma è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi. Il polinomio caratteristico di A è:

$p_A(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$: tale polinomio presenta 3 variazioni di segno, dunque per la regola dei segni di Cartesio ha 3 radici positive. Questo risponde alla domanda c).

a) $v = (1+\sqrt{2}, 0, 1)$, $w = (-1, 2, 0)$.

$\langle x, x \rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 3x_3^2$.

Perciò $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = 4$, $\|v\| = 2$;

$\|w\|^2 = \langle w, w \rangle = 1$, $\|w\| = 1$;

$\langle v, w \rangle = 1$, $\cos\vartheta = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|} = \dfrac{1}{2}$, e

e l'angolo compreso di v e w è $\vartheta = \dfrac{\pi}{3}$.

b) Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

- $v_1 = (1, -1, 1)$, $\|v_1\| = \sqrt{2}$, $w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- $v_2 = (3, 1, 1)$, $\tilde{v}_2 = \langle w_1, v_2 \rangle w_1 =$

$= -\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-1, 1, -1)$

$v_2 - \tilde{v}_2 = (3, 1, 1) - (-1, 1, -1) = (4, 0, 2)$

$\|v_2 - \tilde{v}_2\| = \sqrt{12} = 3\sqrt{2}$

$w_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, 0, 2)$

w_1, w_2 formano una base ortonormale di W.

- $e_3 \notin W$

$$\tilde{e}_3 = \langle w_1, e_3 \rangle w_1 + \langle w_2, e_3 \rangle w_2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2}{3\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}, 0, \frac{2}{3\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{13}{9}, -1, \frac{11}{9}\right)$$

$$e_3 - \tilde{e}_3 = \left(-\frac{13}{9}, 1, -\frac{2}{9}\right)$$

$$\| e_3 - \tilde{e}_3 \| = 1 \implies w_3 = \left(-\frac{13}{9}, 1, -\frac{2}{9}\right).$$