

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

1 luglio 2021

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo A

esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Domanda 1

Sono a disposizione i seguenti dati

t	1	2	3	4	5	6
y(t)	2.94	-1.49	-2.72	1.89	1.52	-1.76

ottenuti osservando l'evoluzione di un processo stocastico stazionario a valore atteso nullo.

Si considerino le due seguenti classi di modelli:

$$\mathcal{M}_1 : y(t) = a y(t-1) + \eta_1(t), \quad \eta_1(t) \sim WN(0, \lambda_1^2)$$

$$\mathcal{M}_2 : y(t) = b y(t-2) + \eta_2(t), \quad \eta_2(t) \sim WN(0, \lambda_2^2)$$

Si chiede di:

1. utilizzando i dati a disposizione, determinare la stima di a e di λ_1 utilizzando l'approccio PEM (a minimizzazione dell'errore di predizione);
2. utilizzando i dati a disposizione, determinare la stima di b e di λ_2 utilizzando l'approccio PEM (a minimizzazione dell'errore di predizione);
3. valutare il *Final Prediction Error* (FPE) e stabilire sulla base dei valori ottenuti quale sia la famiglia di modelli migliore per il processo stocastico da identificare sulla base dei dati a disposizione.

Domanda 2

Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a tempo discreto, descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 0.25 x_1(t) + v_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) + v_2(t) \end{cases}$$

con

$$v_1(t) \sim \mathcal{G}(0, 1.5)$$

$$v_2(t) \sim \mathcal{G}(0, 1.25)$$

Si chiede di

1. determinare il **predittore di Kalman** che fornisce la predizione ottima dello stato $\hat{x}_1(t+1|t)$ per il sistema.
2. determinare il **predittore di Kalman a due passi in avanti**, che fornisce la predizione ottima dello stato $\hat{x}_1(t+2|t)$ per il sistema.
3. Si chiede di confrontare le prestazioni del predittore di Kalman $\hat{x}_1(t+1|t)$ con quelle del predittore $\hat{x}_1(t+2|t)$. Per fare ciò, si assuma che la stima iniziale dello stato sia

$$\hat{x}_1(1) = -1.0 \quad \text{var}(\hat{x}_1(1)) = 25.0$$

e che le prime tre osservazioni valgano

$$y(1) = -1.384 \quad y(2) = 0.235 \quad y(3) = -2.882$$

Determinare la stima dello stato $\hat{x}(3)$ con entrambi i predittori di Kalman. Confrontare i risultati e commentarli.