

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI  
A.A. 2020/2021

1 luglio 2021

**Nome e Cognome:**

**gruppo:** Gruppo A

**esercizio:** Esercizio 1

**Note:** Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

*Solution*

Domanda 2

Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a tempo discreto, descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 0.25x_1(t) + v_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) + v_2(t) \end{cases}$$

con

$$v_1(t) \sim \mathcal{G}(0, 1.5)$$

$$v_2(t) \sim \mathcal{G}(0, 1.25)$$

Si chiede di

1. determinare il **predittore di Kalman** che fornisce la predizione ottima dello stato  $\hat{x}_1(t+1|t)$  per il sistema.
2. determinare il **predittore di Kalman a due passi in avanti**, che fornisce la predizione ottima dello stato  $\hat{x}_1(t+2|t)$  per il sistema.
3. Si chiede di confrontare le prestazioni del predittore di Kalman  $\hat{x}_1(t+1|t)$  con quelle del predittore  $\hat{x}_1(t+2|t)$ . Per fare ciò, si assuma che la stima iniziale dello stato sia

$$\hat{x}_1(1) = -1.0 \quad \text{var}(\hat{x}_1(1)) = 25.0$$

e che le prime tre osservazioni valgano

$$y(1) = -1.384 \quad y(2) = 0.235 \quad y(3) = -2.882$$

Determinare la stima dello stato  $\hat{x}(3)$  con entrambi i predittori di Kalman. Confrontare i risultati e commentarli.

$\hat{x}(t+1|t)$  predittore di Kalman ad 1 passo

$$F = \frac{1}{4} \quad V_1 = 1,5$$

$$H = 1 \quad V_2 = 1,75$$

equazioni del predittore

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{x}(t+1|t) &= F \hat{x}(t|t-1) + K(t) [y(t) - H \hat{x}(t|t-1)] \\ K(t) &= F P(t) H^T [H P(t) H^T + V_2]^{-1} \\ P(t+1) &= F \left\{ P(t) - P(t) H^T [V_2 + H P(t) H^T]^{-1} H P(t) \right\} F^T + V_1 \end{aligned} \right.$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} P(t+1) &= 0,75 \left\{ P(t) - P^2(t) \cdot \frac{1}{[1,75 + P(t)]} \right\} \cdot 0,75 + 1,5 \\ &= 0,0625 \cdot \frac{\cancel{P^2(t)} + 1,75 P(t) - \cancel{P^2(t)}}{P(t) + 1,75} + 1,5 \\ &= 0,078125 \cdot \frac{P(t)}{P(t) + 1,25} + 1,5 = P(t+1) \end{aligned}$$

$$P(1) = 75$$

$$k(t) = \frac{0,75 P(t)}{P(t) + 1,25}$$

$$\hat{x}(t+1|t) = 0,75 \hat{x}(t|t-1) + k(t) [y(t) - \hat{x}(t|t-1)]$$

predittore di Kalman a 2 passi  $\hat{x}(t+2|t)$

$$\begin{cases} \hat{x}(t+2|t) = F \hat{x}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) = H \hat{x}(t+2|t) \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{cases} \hat{x}(t+2|t) = 0,75 \hat{x}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) = \hat{x}(t+2|t) \end{cases}$$

# Stima di $x(3)$

predittore ad 1 passo:

$$\begin{cases} 0,078175 \cdot \frac{P(t)}{P(t) + 1,25} + 1,5 = P(t+1) \\ P(1) = 75 \end{cases}$$

$$P(2) = 1,5 + \frac{75}{26,75} \cdot 0,078175 = 1,5744$$

$$P(3) = 1,5 + \frac{1,57}{2,82} \cdot 0,078175 = 1,5435$$

$$k(t) = \frac{0,15 \cdot P(t)}{P(t) + 1,25}$$

$$k(1) = 0,2381$$

$$k(2) = 0,1394$$

$$k(3) = 0,1381$$

$$\hat{x}(t+1|t) = 0,75 \hat{x}(t|t-1) + k(t) [y(t) - \hat{x}(t|t-1)]$$

$$\hat{x}(2|1) = 0,75 \hat{x}(1|0) + k(1) [y(1) - \hat{x}(1|0)]$$

$\hat{x}(1) = -1$        $k(1) = 0,2381$        $\hat{x}(1) = -1$

$$= 0,75 [-1] + 0,2381 [-1,389 - (-1)] =$$

$$\hat{x}(2|1) = -0,3919$$

$$\hat{x}(3|2) = 0,75 \hat{x}(2|1) + k(2) [y(2) - \hat{x}(2|1)]$$

$$= 0,75 \cdot (-0,3914) + 0,1394 [0,235 + 0,3914]$$

$$= -0,0050$$

Predittore a 2 passi:

$$\hat{x}(3|1) = 0,75 \hat{x}(2|1)$$

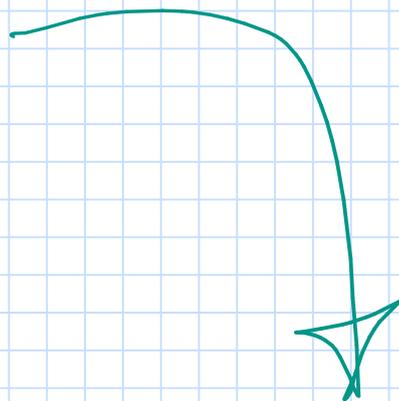
$$= 0,75 (-0,3914) = -0,0854$$

Varianza dell'errore di stima  $[x(3) - \hat{x}(3|2)] = ?$

varianza dell'errore di stima  $[x(3) - \hat{x}(3|1)] = ?$

$$\text{var} [x(3) - \hat{x}(3|2)] \stackrel{\Delta}{=} P(3) = 1,5435$$

$$\text{var} [x(3) - \hat{x}(3|1)] = ?$$



$$\text{ver } \hat{x}(3|1) = ?$$

$$\text{La solución es } E \left\{ \left[ x(3) - \hat{x}(3|1) \right] \left[ x(3) - \hat{x}(3|1) \right]^T \right\}$$

Recordando que:

$$x(t+1) = Fx(t) + v_t(t)$$

Si usamos

$$x(3) = Fx(2) + v_1(2)$$

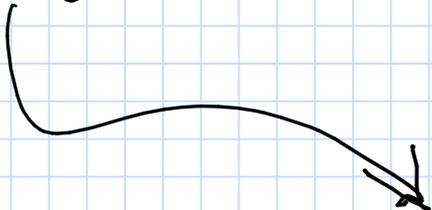
$$\text{entonces } \hat{x}(3|1) = F \hat{x}(2|1)$$

Alora

$$E \left\{ \left[ Fx(2) + v_1(2) - F \hat{x}(2|1) \right] \left[ \dots \right]^T \right\} =$$

$$E \left\{ \left[ F(x(2) - \hat{x}(2|1)) + v_1(2) \right] \cdot \left[ F(x(2) - \hat{x}(2|1)) + v_1(2) \right]^T \right\}$$

$$= E \left\{ \left[ F(x(2) - \hat{x}(2|1)) + v_1(2) \right] \cdot \left[ (x(2) - \hat{x}(2|1))^T F^T + v_1^T(2) \right] \right\}$$



per definizione  $P(2)$

$$= F \cdot E \left\{ [x(2) - \hat{x}(2|1)] \cdot [x(2) - \hat{x}(2|1)]^T \right\} \cdot F^T +$$

$$+ F \cdot E \left\{ [x(2) - \hat{x}(2|1)] \cdot v_1^T(2) \right\} +$$

$$+ E \left\{ v_1(2) \cdot [x(2) - \hat{x}(2|1)]^T \right\} \cdot F^T +$$

$$+ E \left\{ v_1(2) \cdot v_1^T(2) \right\} =$$

per definizione  $V_1$

$v_1(2)$  è  
scorrelato da  
 $x(2)$  [che infatti  
ha correlazione con  
 $v_1(1)$ ] e da  $\hat{x}(2|1)$

In definitiva:

$$E \left\{ [x(3) - \hat{x}(3|1)] \cdot [x(3) - \hat{x}(3|1)]^T \right\} =$$

$$= F P(2) F^T + V_1$$

sostituendo i valori numerici:

$$\text{var} [x(3) - \hat{x}(3|1)] = 1,5984$$

$$\text{var} [x(3) - \hat{x}(3|2)] \triangleq P(3) = 1,5435$$

è inferiore!  
la stima  
 $\hat{x}(3|2)$  è  
migliore!