Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2020-2021, sessione estiva, terzo appello

COGNOME STAMPATELLO **NOME** LEGGIBILE

N. Matricola ______ **Anno di corso** ______

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

• Si dia la definizione di punto di accumulazione di X. $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e' un punto di accumulazione di X se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in X$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$

• Si dimostri che y e' un punto di accumulazione di $X \iff$ esiste una successione strettamente monotona $\{x_n\}$ in X con $y = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

$\Leftarrow$ Sia $\{x_n\}$ ad es. strettamente crescente in X con $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$. Risulta $x_n < y \ \forall n$. Siccome $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ t.c. $n > N_\varepsilon \Rightarrow y - \varepsilon < x_n < y$ segue chiaramente che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X$ t.c. $0 < |x - y| < \varepsilon$ (basta prendere un $x = x_n$ con $n > N_\varepsilon$)

• Si dimostri con un esempio che e' falsa la proposizione seguente: se esiste una successione $\{x_n\}$ in X con $y = \lim_{n\to+\infty} x_n$ allora y e' un punto di accumulazione di X.

$\Rightarrow$ se $y \in X' \Rightarrow$ abbiamo $y \in (X \cap (-\infty, y))'$ o/e $y \in (X \cap (y, +\infty))'$. Se ad esempio vale quest'ultima, $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in X$ t.c. $y < x_n < y + \frac{1}{n}$. Chiaramente $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Infine, si può definire una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che sia strettamente decrescente

Es. sia $y \in \mathbb{R}$ e sia $X = \{y\}$. Allora per $x_n = y \ \forall n$, ho $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ ma $y \notin X' = \emptyset$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{2+t}{1-t+t^2-t^3}\,dt & \text{se } x\le 0\\[2ex] \displaystyle\int_x^{3x}\frac{1}{\arctan(t)}\,dt & \text{se } x>0\,.\end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; Per $t\to+\infty$ $\arctan(t)=\frac{\pi}{2}(1+o(1))$, per il teor della media

$f(x) = \dfrac{2x}{\arctan(c_x)} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ da $x\le c_x\le 3x$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\dfrac{2+t}{(1-t)(1+t^2)} = \dfrac{A}{t-1}+\dfrac{Bt+C}{1+t^2}$

$A=-\frac{3}{2}$, $B=+\frac{3}{2}$ (perché deve essere $A+B=0$)

$-\frac{3}{2}(1+t^2)+\frac{3}{2}t(t-1)+C(t-1) = -\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}+C(t-1)=2+t$ così

$-\frac{3}{2}+C=1 \Rightarrow C=\frac{5}{2}$

quindi per $x\le 0$, $f(x) = -\frac{3}{2}\log|x-1| + \frac{3}{4}\log(1+x^2)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg} x \xrightarrow{x\to-\infty} -\frac{5}{4}\pi$

- stabilire se $f\in C^0(\mathbb{R})$;

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)=0$, ma da $\arctan t = t(1+o(1))$ per $t\to 0$,

segue $\displaystyle\int_x^{3x}\frac{1}{\arctan t}\,dt = \int_x^{3x}\frac{1+o(1)}{t} = \log 3 + \int_x^{3x}\frac{o(1)}{t}\,dt \xrightarrow{x\to 0^+} \log 3$

dove $\displaystyle\int_x^{3x}\frac{o(1)}{t}\,dt = 2x\,\frac{o(1)}{t}\Big|_{t=c_x} \xrightarrow{x\to 0} 0$ perché $x\le c_x\le 3x$

- calcolare $f'(x)$ o eventualmente $f'_s(x)$ e $f'_d(x)$;

$f'(x) = \dfrac{2+x}{(1-x)(1+x^2)}$ per $x<0$, ed $f'_s(0)=2$

$f'_d(0)$ non esiste e per $x>0$ $f'(x) = \dfrac{3}{\arctan(3x)} - \dfrac{1}{\arctan x}$

- stabilire dove f cresce e dove decresce. .

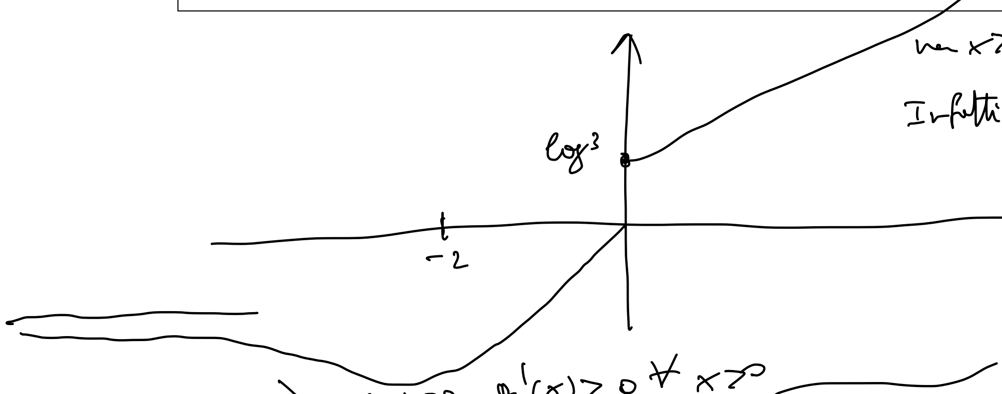
per $x<0$, ho $f'(x)=0$ se $x=-2$, $f'(x)<0$ per $x<-2$ e $f'(x)>0$ per $-2<x<0$. Per $x>0$ $f'(x)>0$

$\Updownarrow$

per $x>0$ $g(x) := 3\arctan x - \arctan(3x) > 0$

Infatti $g(0)=0$

$g'(x) = \dfrac{3}{1+x^2}-\dfrac{3}{1+9x^2} = \dfrac{3(1+9x^2)-3(1+x^2)}{(1+x^2)(1+9x^2)} = \dfrac{24x^2}{(1+x^2)(1+9x^2)} > 0$



così $g(0)=0$, $g'(x)>0\ \forall x>0$ $\Rightarrow g(x)>0\ \forall x>0$.

COGNOME e NOME STAMPATELLO LEGGIBILE **N. Matricola** ______

ESERCIZIO N. 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente integrabile in $\mathbb{R}$, il che si scrive con $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$, e sia $F(x) := \int_0^x f(t)dt$.

- Si dimostri che F e' una funzione continua in $\mathbb{R}$.

sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideriamo $a<b$ con $a<x_0<b$.

Allora $f \in L[a,b] \Rightarrow \exists M>0$ con $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$.

$$0 \leq |F(x)-F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leq |x-x_0|\,M \quad \forall x \in [a,b]$$

e siccome $\lim_{x \to x_0} |x-x_0|\,M = 0$ segue

$$\lim_{x \to x_0} |F(x)-F(\cancel{x}x_0)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

- Sia dia l'esempio di una $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ tale che $F(x) := \int_0^x f(t)dt$ non e' una primitiva di f in $\mathbb{R}$ spiegando l'esempio in modo particolareggiato.

La funzione di Heaviside $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x<0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x=0 \end{cases}$

e' $H \in L_{loc}(\mathbb{R})$,

Ma $F(x) = \int_0^x H(t)\,dt$ non e' una primitiva

perché $F'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} H(x) = 1$
$F'_s(0) = \lim_{x \to 0^-} H(x) = 0$ } dal teor. Fond del Calcolo

$F'_d(0) \neq F'_s(0) \Rightarrow F'(0)$ non esiste

ESERCIZIO N. 4. Calcolare tutti i ~~punti~~ polinomi di McLaurin di

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \,. \end{cases}$$

$$\left(e^{-\frac{1}{x^4}}\right)' = \frac{4}{x^5} e^{-\frac{1}{x^4}}, \quad f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$

Per induzione $f^{(n)}(x) = \left(\frac{a_{N_n n}}{x^{N_n}} + \frac{a_{N_n-1\, n}}{x^{N_n-1}} + \dots + a_{0n} \right) e^{-\frac{1}{x^4}}$

per $x \neq 0$ e $f^{(n)}(0)$.

Allora $f^{(n+1)}(x)$ e' di forma simile per $x \neq 0$

e si vede subito che

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad P_n(x) \equiv 0 \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \dots$$

ESERCIZIO N. 5. Stabilire se la funzione $f(x) = x^{-\frac{1}{x}} \cos x$ e' integrabile in $[1, +\infty)$.

$$x^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}\lg x}} = e^{-\frac{1}{x}\lg x} = 1 - \frac{1}{x}\lg x + \frac{\frac{1}{x^2}\lg^2 x}{2} + o\left(\frac{1}{x^2}\lg^2 x\right) \quad \text{per } x \to +\infty$$

Allora

$$f(x) = \underset{\text{non integrabile}}{\cos x} - \underbrace{\frac{1}{x}\lg x \cos x}_{\text{si verifica che e' integrabile usando una integrazione per parti}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\lg^2(x)\,(1+o(1))\cos x}_{\text{assolutamente integrabile}}$$

quindi f non e' integrabile

$$\int_1^M \frac{1}{x}\lg x \cos x\, dx = \int_1^M \frac{1}{x}\lg x\, (\sin x)' =$$

$$= \frac{\lg(M)}{M}\sin(M) - \int_1^M \sin x \left(\frac{1}{x}\lg x\right)' =$$

$$= \underbrace{\frac{\lg(M)}{M}\sin(M)}_{\xrightarrow{M\to\infty} 0} - \int_1^M \underbrace{\sin x \left(-\frac{\lg x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}_{\text{assolutamente integrabile in } [1,+\infty)}$$