PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

16 luglio 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Bozza di soluzione

Domanda 1

Si supponga di avere a disposizione *infiniti* dati del processo stocastico stazionario seguente:

$$y(t) = \epsilon(t) + 2\epsilon(t-1)\ , \quad \epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(0\,,4)$$

Si considerino le due seguenti classi di modelli:

$$\mathcal{M}_1 \quad : \quad y(t) = a\, y(t-1) + \eta_1(t)\ , \quad \eta_1(t) \sim WN(0, \lambda_1^2)$$

$$\mathcal{M}_2 \quad : \quad y(t) = b\, y(t-2) + \eta_2(t)\ , \quad \eta_2(t) \sim WN(0, \lambda_2^2)$$

Si chiede di:

1. determinare la stima ottima di a e di λ_1 utilizzando l'approccio PEM (a minimizzazione dell'errore di predizione);
2. determinare la stima ottima di b e di λ_2 utilizzando l'approccio PEM (a minimizzazione dell'errore di predizione);
3. discutere i risultati ottenuti.

Soluzione

$$\mathcal{S}: \; y(t) = \varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1)$$

$$\varepsilon(t) \sim WN(0,4)$$

① $$\mathcal{M}_1: \; y(t) = a\, y(t-1) + \eta_1(t)$$

$$\eta_1(t) \sim WN(0, \lambda_1^2)$$

$\hat{a} = ?$ $\hat{\lambda}_1^2 = ?$

modello $\mathcal{M}_1$ in forma di predittore ad 1 passo in avanti, alimentato dai dati osservati

$$\mathcal{M}_1 \longrightarrow \hat{y}(t|t-1) = a\, y(t-1)$$

parametro incognito

Valuto il funzionale di costo asintotico da minimizzare per il problema PEM:

$$\bar{J}(a) = E\left\{\left[y(t) - \hat{y}(t|t-1)\right]^2\right\}$$

Sviluppando l'espressione: $\downarrow$

$$\bar{J}(a) = E\{[y(t)]^2\} + E\{[\hat{y}(t|t-1)]^2\} + -2E\{y(t)\,\hat{y}(t|t-1)\}$$

Sviluppo i singoli termini

è var(y) dato che $E[y(t)]=0$

$$E\{[y(t)]^2\} = E\{[\varepsilon(t)+2\varepsilon(t-1)]^2\} = (1+4)\cdot var(\varepsilon) = 5\cdot 4 = 20 = \gamma_y(0)$$

il processo stocastico y è un processo MA(1)

$$= (1+c_1^2)\,\lambda_\varepsilon^2$$

$$E\{[\hat{y}(t|t-1)]^2\} = E\{a^2[y(t-1)]^2\} = a^2 E\{[y(t-1)]^2\} = a^2 \gamma_y(0) = 20a^2$$

il processo stocastico y è stazionario → allora $E\{[y(t-1)]^2\} \equiv E\{[y(t)]^2\}$

Rimane il termine

$$E\{ y(t) \cdot \hat{y}(t|t-1) \} =$$ sostituisco

lo porto fuori da $E(\cdot)$

$$= E\left\{ [\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1)] \cdot a [\varepsilon(t-1) + 2\varepsilon(t-2)] \right\} =$$

posso farlo perché è conosciuto una deterministica

$$= a E\{ \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t-1) + 2\varepsilon(t)\varepsilon(t-2) +$$
$$+ 2[\varepsilon(t-1)]^2 + 4\varepsilon(t-1)\varepsilon(t-2) \} =$$

$$= a \left\{ \overbrace{E[\varepsilon(t)\varepsilon(t-1)]}^{0} + 2\overbrace{E[\varepsilon(t)\varepsilon(t-2)]}^{0} + \right.$$
$$\left. + 2\underbrace{E[\varepsilon(t-1)]^2}_{\lambda_\varepsilon^2} + 4\overbrace{E[\varepsilon(t-1)\varepsilon(t-2)]}^{0} \right\}$$

$\varepsilon(\cdot)$ è processo stazionario di rumore bianco

$$= 8a$$

In definitiva

$$\bar{J}(a) = \underbrace{E\left\{[y(t)]^2\right\}}_{20} + \underbrace{E\left\{[\hat{y}(t|t-1)]^2\right\}}_{20a^2} + \underbrace{-2E\left\{y(t)\,\hat{y}(t|t-1)\right\}}_{8a}$$

$$= 20 + 20a^2 - 16a = \bar{J}(a)$$

Il valore ottimo di a è quello che minimizza il funzionale

$$\hat{a} = \arg\min_{a} \bar{J}(a) \Rightarrow \frac{d\bar{J}}{da} = 0$$

$$\frac{d\bar{J}}{da} = 40a - 16 = 0$$

$$\hat{a} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

$$\lambda_1^2 = \bar{J}(\hat{a}) = 20 + 4a(5a-4)\Big|_{a=\hat{a}}$$

$$= 20 + 4 \cdot \frac{2}{5}\left(\cancel{5}^{1} \cdot \frac{2}{\cancel{5}_{1}} - 4\right)$$

$$= 20 - \frac{16}{5} = \frac{84}{5} = 16{,}80$$

Riassumendo:

$$\mathcal{M}_1 \quad y(t) = a\,y(t-1) + \eta_1(t)$$

$$\eta_1(\cdot) \sim WN(0, \lambda_1^2)$$

$$\hat{a} = \frac{2}{5} = 0{,}40$$

$$\hat{\lambda}_1^2 = \frac{84}{5} = 16{,}80$$

Soluzione (2)

$\mathcal{S}: \; y(t) = \varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1)$

$\varepsilon(t) \sim WN(0,4)$

secondo modello

$$\mathcal{M}_2: \quad y(t) = b\, y(t-2) + \eta_2(t)$$

$$\eta_2(t) \sim WN(0, \lambda_2^2)$$

$\hat{b} = ? \quad \hat{\lambda}_2^2 = ?$

modello $\mathcal{M}$ in forma di predittore ad 1 passo in avanti, alimentato dai dati osservati

$$\mathcal{M}_2 \longrightarrow \hat{y}(t|t-1) = b\, y(t-2)$$

parametro incognito

Valuto il funzionale di costo asintotico da minimizzare per il problema PEM:

$$\bar{J}(b) = E\left\{\left[y(t) - \hat{y}(t|t-1)\right]^2\right\}$$

Sviluppando l'espressione:

$$\bar{J}(b) = E\left\{[y(t)]^2\right\} + E\left\{[\hat{y}(t|t-1)]^2\right\} + -2E\left\{y(t)\,\hat{y}(t|t-1)\right\}$$

Sviluppo i singoli termini

già' calcolato prima

$$E\left\{[y(t)]^2\right\} = \gamma_y(0) = 20$$

$$E\left\{[\hat{y}(t|t-1)]^2\right\} = E\left\{[b\,y(t-2)]^2\right\} = b^2\, E\left\{[y(t-2)]^2\right\} = 20\,b^2$$

il processo y e' stazionario → quella e' $\gamma_y(0)$

$$E\left\{y(t)\,\hat{y}(t|t-1)\right\} = E\left\{\left[\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1)\right] \cdot b\left[\varepsilon(t-2) + 2\,\varepsilon(t-3)\right]\right\}$$

$$E\left\{ y(t)\,\hat{y}(t|t-1) \right\} =$$

$$= b \cdot \left\{ \overbrace{E\left[\varepsilon(t)\cdot\varepsilon(t-2)\right]}^{0} + 2\overbrace{E\left[\varepsilon(t)\,\varepsilon(t-3)\right]}^{0} + 2\overbrace{E\left[\varepsilon(t-1)\,\varepsilon(t-2)\right]}^{0} + 4\overbrace{E\left[\varepsilon(t-1)\,\varepsilon(t-3)\right]}^{0} \right\} = 0$$

$\varepsilon(t)$ è processo di rumore bianco

In definitiva:

$$\bar{J}(b) = \overbrace{E\left\{\left[y(t)\right]^2\right\}}^{+20} + \overbrace{E\left\{\left[\hat{y}(t|t-1)\right]^2\right\}}^{+20b^2} - 2\underbrace{E\left\{ y(t)\,\hat{y}(t|t-1)\right\}}_{0}$$

$$= 20\left(1+b^2\right)$$

Il valore ottimo di b è quello che minimizza il funzionale

$$\hat{b} = \arg\min_b \bar{J}(b) \Rightarrow \frac{d\bar{J}}{db} = 0$$

$$\frac{d\bar{J}}{db} = 40b = 0 \longrightarrow \hat{b} = 0$$

$$\hat{\lambda}_2^2 = \bar{J}(\hat{b}) = 20$$

Riassumendo:

$$M_2 : \quad y(t) = b\,y(t-2) + \eta_2(t)$$

$$\eta_2(t) \sim WN(0, \lambda_2^2)$$

$$\hat{b} = 0$$

$$\hat{\lambda}_2^2 = 20$$

Commenti ai risultati ottenuti

Il processo stocastico y è un processo stazionario di tipo MA(1), mentre i due modelli M_1 ed M_2 sono rispettivamente processi AR(1) ed AR(2).

Ciò significa che:

(1) per quanto riguarda i predittori ad 1 passo ottenuti dai modelli M_1 ed M_2, l'errore di predizione NON può essere rumore bianco con le caratteristiche del rumore del processo y: in realtà nel caso di M_1 l'errore di predizione ad 1 passo è un processo MA(2) mentre nel caso del predittore a partire da M_2 l'errore di predizione è un processo MA(1)

$$M_1 \qquad e_{M_1}(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) =$$

$$= \varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1) - \frac{2}{5}\varepsilon(t-1) - \frac{4}{5}\varepsilon(t-2)$$

$$= \varepsilon(t) + \frac{8}{5}\varepsilon(t-1) - \frac{4}{5}\varepsilon(t-2)$$

MA(2)

$$\mathrm{var}\, e_{M_1} = \left(1 + \frac{64}{25} + \frac{16}{25}\right)\mathrm{var}\,\varepsilon = 84/5$$

$\mathcal{M}_2$ $\quad e_{\mathcal{M}_2}(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) =$

$= \varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1) - 0 \quad MA(1)$

$$\text{var}\, e_{\mathcal{M}_2} = (1+4)\,\text{var}\,\varepsilon = 20$$

All'aumentare dell'ordine del modello, la varianza dell'errore di predizione ad 1 passo aumenta

$$\mathcal{M}_1 \; AR(1) \qquad \mathcal{M}_2 \; AR(2)$$

$$\text{var}\, e_{\mathcal{M}_1} < \text{var}\, e_{\mathcal{M}_2}$$

(2) per quanto riguarda $\mathcal{M}_2$, ci si doveva attendere che il parametro $\hat{b}$ fosse nullo: il processo y è $MA(1)$ quindi vale che:

$$\gamma_y(\tau) \rightarrow \begin{cases} \neq 0 & |\tau| \leq 1 \\ 0 & |\tau| > 1 \end{cases}$$

Campioni del processo y a distanza temporale τ maggiore di 1 sono scorrelati $\rightarrow$ la migliore predizione allora è il valore atteso, che vale zero.

Domanda 2

Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a tempo discreto, descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 0.80\, x_1(t) + 2\, v_1(t) \\ y(t) &= 1.65\, x_1(t) + v_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

con

$$v_1(t) \sim \mathcal{G}(0,1)$$

$$v_2(t) \sim \mathcal{G}(0,1)$$

Al solito, $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ sono mutuamente indipendenti e sono indipendenti da $x(1)$ [valore all'istante iniziale dello stato]. Si assuma inoltre che

$$\mathrm{E}\left[x(1)\right] = 0$$

Si chiede di

1. determinare il **predittore (di Kalman) di regime** che fornisce la predizione ottima dello stato $\hat{x}_1(t+1|t)$ per il sistema.
2. determinare la varianza dell'errore di predizione ad un passo dell'osservazione, dato il predittore

$$\hat{y}\left(t+1|t\right) = H\hat{x}\left(t+1|t\right)$$

3. Si assuma ora che

$$v_2(t) \equiv v_1(t) \quad \forall t$$

Le equazioni (1) in tal caso descrivono un processo di tipo ARMA: lo si verifichi.

- si trovi il predittore ottimo ad un passo per il processo ARMA e la varianza dell'errore di predizione;
- sarebbe possibile applicare la teoria della predizione alla Kalman in questo caso? Motivare la risposta.

Soluzione Domanda 2

1)
$$\begin{cases} x_1(t+1) = 0{,}80\, x_1(t) + 2\, v_1(t) \\ y(t) = 1{,}65\, x_1(t) + v_2(t) \end{cases}$$

$v_1(\cdot) \sim G(0,1)$

$v_2(\cdot) \sim G(0,1)$

$E[x_1(1)] = 0$

$v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ mutuamente indipendenti ed indip. da $x_1(1)$

Confrontando le equazioni proposte col modello

$$\begin{cases} x(t+1) = F x(t) + \eta_1(t) \\ y(t) = H x(t) + \eta_2(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} \eta_1 \sim G(0, V_1) \\ \eta_2 \sim G(0, V_2) \end{matrix}$$

si ha:

$F = 0{,}80 \qquad H = 1{,}65$

$V_1 = \text{var}\, \eta_1 = 4 \qquad V_2 = \text{var}\, \eta_2 = 1$

$|F| < 1 \Rightarrow$ valgono le ipotesi del 1° teorema di convergenza della ARE

Dalla teoria

soluzione della ARE

$$\bar{K} = F \bar{P} H^T (H \bar{P} H^T + V_2)^{-1} =$$

$$= 0{,}80 \cdot \bar{P} \cdot 1{,}65 \cdot \frac{1}{1{,}65 \cdot \bar{P} \cdot 1{,}65 + 1} = \frac{1{,}32 \bar{P}}{1 + 2{,}7225 \bar{P}}$$

guadagno di Kalman del filtro di regime

$$\bar{P} = F \left[\bar{P} - \bar{P} H^T (V_2 + H \bar{P} H^T)^{-1} H \bar{P} \right] F^T + V_1$$

ARE

$$\bar{P} = \frac{0{,}64 \bar{P}}{1 + 2{,}7225 \bar{P}} + 4 =$$

$$= \frac{0{,}64 \bar{P} + 4 + 10{,}89 \bar{P}}{1 + 2{,}7225 \bar{P}} \qquad \Big/ \cdot (1 + 2{,}7225 \bar{P})$$

$$2{,}7225 \bar{P}^2 + \bar{P} = 4 + 11{,}53 \bar{P}$$

$$2{,}7225 \bar{P}^2 - 10{,}53 \bar{P} - 4 = 0$$

$$\bar{P} = \begin{cases} +4{,}2162 & \text{OK} \\ \cancel{-0{,}3485} & < 0 \text{ non accettabile!} \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\bar{P} = 4,2162$$

$$\bar{K} = 0,4460$$

Il predittore di Kalman di regime è

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t+1|t) = 0,80\, x_1(t|t-1) + \\ \qquad + 0,4460\left[y(t) - 1,65\,\hat{x}_1(t|t-1)\right] \\ \hat{x}(1) = 0 \end{cases}$$

2

Dato il predittore

$$\hat{y}(t+1|t) = H\,\hat{x}_1(t+1|t)$$

la varianza di $\hat{y}$ è semplicemente

$$\text{var}\,\hat{y} = H^2\,\text{var}\,\hat{x}_1 = H^2 \cdot \bar{P}$$

NB sono entrambi scalari!

$$\text{var}\,\hat{y} = (1{,}65)^2 \cdot 4{,}2162$$

$$= 11{,}4786$$

③ Riscrivo le equazioni con $v_1(t) \equiv v_2(t)$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 0{,}80\, x_1(t) + 2 v_1(t) \\ y(t) = 1{,}65\, x_1(t) + v_1(t) \end{cases} \qquad v_1(\cdot) \sim G(0,1)$$

Applico la Z-trasformata alla 1ª equazione

$$z\, x_1(t) = 0{,}80\, x_1(t) + 2 v_1(t)$$

$$x_1(t) = \frac{2}{z - 0{,}80} v_1(t)$$

ora sostituisco nella 2ª equazione

$$y(t) = \left[\frac{1{,}65 \cdot 2}{z - 0{,}80} + 1 \right] v_1(t)$$

$$= \frac{3{,}30 + z - 0{,}80}{z - 0{,}80} v_1(t)$$

$$= \frac{z + 2{,}50}{z - 0{,}80} v_1(t)$$

È un processo stocastico che si definisce è un ARMA(1,1) non in forma canonica
[lo zero ha modulo > 1]

$$y(t) = \frac{z+2{,}50}{z-0{,}80}\, v_1(t) \qquad v_1(\cdot) \sim G(0,1)$$

Determino la varianza di $y(\cdot)$ $\rightarrow$ riscrivo il processo in termini di potenze di z^{-1}

$$y(t) = \frac{1+2{,}50\, z^{-1}}{1-0{,}80\, z^{-1}}\, v_1(t)$$

$$y(t) = 0{,}80\, y(t-1) + v_1(t) + 2{,}50\, v_1(t-1)$$

Dato che $E[v_1(\cdot)] = 0$ e che a regime il processo di $y(\cdot)$ è stazionario in senso debole ($W(z)$ ha poli con modulo <1) allora vale che

$$E[y(t)] = 0$$

Calcolo la varianza usando l'espressione

$$\operatorname{var} y = E\{[y(t)]^2\}$$

$$= E\{[0{,}80\, y(t-1) + v_1(t) + 2{,}50\, v_1(t-1)]^2\} =$$

$$\mathrm{var}\, y = \sigma_y^2 = E\Big\{ 0{,}64\,[y(t-1)]^2 + [v_1(t)]^2 +$$

$$+\, 6{,}25\,[v_1(t-1)]^2 +$$

$$+\, 2 \cdot 0{,}80\,[y(t-1)\, v_1(t)] +$$

$$+\, 2 \cdot 0{,}80 \cdot 2{,}50\,[y(t-1)\, v_1(t-1)] +$$

$$+\, 2 \cdot 2{,}50\,[v_1(t) \cdot v_1(t-1)] \Big\}$$

$$= 0{,}64\, \underbrace{E\{[y(t-1)]^2\}}_{\sigma_y^2} + \underbrace{E\{[v_1(t)]^2\}}_{\sigma_{v_1}^2 = 1} + 6{,}25\, \underbrace{E\{[v_1(t-1)]^2\}}_{\sigma_{v_1}^2 = 1} +$$

il processo di $y(\cdot)$ è stazionario

$$+\, 1{,}60 \cdot \underbrace{E\{ y(t-1)\, v_1(t) \}}_{\emptyset} +$$

$y(t-1)$ non dipende da $v_1(t)$

$$+\, 4{,}00 \cdot E\{ y(t-1) \cdot v_1(t-1) \} +$$

$$+\, 5{,}00 \cdot \underbrace{E\{ v_1(t) \cdot v_1(t-1) \}}_{\emptyset}$$

$v_1(\cdot)$ rumore bianco

$$E\{ y(t-1) \cdot v_1(t-1) \} = E\Big\{ 0{,}80\, y(t-2) + [v_1(t-1)]^2 + \ldots$$

$$E\{y(t-1)\cdot v_1(t-1)\} = E\{0,80\,y(t-2)\,v_1(t-1) + [v_1(t-1)]^2 + 2,50\,[v_1(t-1)\cdot v_1(t-2)]\}$$

$$= 0,80\,\underbrace{E\{y(t-2)\cdot v_1(t-1)\}}_{\cancel{0}} + \underbrace{E\{[v_1(t-1)]^2\}}_{1 = \sigma^2_{v_1}} + 2,50\,\underbrace{E\{[v_1(t-1)\,v_1(t-2)]\}}_{\cancel{0}} =$$

$y(t-2)$ scorrelata da $v_1(t-1)$

$v_1(\cdot)$ rumore bianco

$$= 1$$

In definitiva:

$$\sigma^2_y = 0,64\,\sigma^2_y + [1 + 6,25]\,\sigma^2_{v_1} + 4\,\sigma^2_{v_1}$$

$$\sigma^2_y = \frac{[1 + (2,50)^2 + 2\cdot 0,80\cdot 2,50]}{1-(0,80)^2}\,\sigma^2_{v_1}$$

$$= \frac{11,25}{0,36}\cdot 1 = 31,25$$

Trovo una descrizione in forma canonica per il processo ARMA

$$y(t) = \underbrace{\frac{z+2,50}{z-0,80}}_{W(z)} v_1(t)$$

zero in $-2,50$
$|\cdot|>1$
Uso un filtro passatutto

$$0,40 = \frac{1}{2,50} \rightarrow T(z) = \frac{z+0,40}{z+2,50}$$

$$\overline{W}(z) = W(z)\cdot T(z) = \frac{z+0,40}{z-0,80}$$

Impongo l'uguaglianza degli spettri complessi per determinare la varianza del processo di rumore bianco $\eta(\cdot)$ in ingresso a $\overline{W}(z)$

$$W(z)\cdot W(z^{-1})\cdot \sigma^2_{v_1} = \overline{W}(z)\cdot\overline{W}(z^{-1})\cdot\sigma^2_\eta$$

$0,4 = \frac{1}{2,5}$

$$\frac{z+2,5}{z-0,8}\cdot\frac{z^{-1}+2,5}{z^{-1}-0,8}\cdot 1 = \frac{z+0,4}{z-0,8}\cdot\frac{z^{-1}+0,4}{z^{-1}-0,8}\sigma^2_\eta \cancel{\frac{z}{z}}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{(z+2,5)}}\overset{1}{\cancel{(1+2,5z)}}}{\underset{1}{\cancel{(z-0,8)}}\underset{1}{\cancel{(1-0,8z)}}} = \left(\frac{1}{2,5}\right)^2 \frac{\overset{1}{\cancel{(2,5z+1)}}\overset{1}{\cancel{(2,5+z)}}}{\underset{1}{\cancel{(z-0,8)}}\underset{1}{\cancel{(1-0,8z)}}}\sigma^2_\eta$$

$$1 = \frac{1}{6,75}\,\sigma_\eta^2$$

$$\sigma_\eta^2 = 6,75$$

Il processo ARMA in forma canonica è

$$\eta(\cdot) \longrightarrow \boxed{\bar{W}(z)} \longrightarrow y(\cdot) \qquad \bar{W}(z) = \frac{z+0,4}{z-0,8}$$

$$\eta(\cdot) \sim G(0, 6{,}75)$$

Il predittore ad 1 passo in avanti alimentato dai dati ha il filtro espresso da

$$W_1(z) = \frac{z\left[C(z) - A(z)\right]}{C(z)}$$

dove $\dfrac{C(z)}{A(z)} = \bar{W}(z)$

$$W_1(z) = z \cdot \left[\frac{\cancel{z}+0,4-\cancel{z}+0,8}{z+0,4}\right] = \frac{1,2z}{z+0,4}$$

In potenze di (z^{-1}):

$$W_1(z) = \frac{1,2}{1+0,4z^{-1}}$$

quindi:

$$\hat{y}(t+1|t) = -0,4\,\hat{y}(t|t-1) + 1,2\,y(t)$$

predittore ARMA

La varianza dell'errore di predizione vale ovviamente

$$var\left[y(t) - \hat{y}(t|t-1)\right] = var\,\eta = 6,75$$

Espressione alternativa del predittore

$$\hat{y}(t|t-1) = -0,4\,\hat{y}(t-1|t-2) + 1,2\,y(t-1)$$

3

Svolte le equazioni sono

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 0{,}80\, x_1(t) + \overbrace{2\, v(t)}^{v_1(t)} \\ y(t) = 1{,}65\, x_1(t) + \underbrace{v(t)}_{v_2(t)} \end{cases}$$

$v(\cdot) \sim G(0,1)$

$E[x_1(1)] = 0$

$V_1 = \mathrm{var}\, v_1(\cdot) = 4$

$V_2 = \mathrm{var}\, v_2(\cdot) = 1$

$v_1(t), v_2(t)$ sono indipendenti da $x_1(1)$, MA NON tra loro

$$E\left[v_1(t) \cdot v_2^T(t)\right] = E\left[v_2(t) \cdot v_1^T(t)\right] = N \neq 0$$

quindi...