ESAME DI GEOMETRIA - IV APPELLO A.A. 2020/21

Trieste, 14 luglio 2021

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da:
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare l'immagine e il nucleo di f.
   (b) Considerare i sottospazi di $\mathbb{R}^3$
$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$
   Trovare basi per $f(U), f(V), f(U) \cap f(V)$.

2. Sia $f : K^3 \to K^3$ l'applicazione lineare tale che $M_{\mathcal{C}}(f) = A$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di K^3 e
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (i) Dire se f è diagonalizzabile in ciascuno dei due casi $K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$.
   (ii) Determinare gli autovalori e i relativi autospazi di f nei due casi $K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$.
   (iii) Nel caso in cui f sia diagonalizzabile, dire quante sono le basi di K^3 rispetto a cui la matrice di f è diagonale.

3. Si consideri la seguente matrice
$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$
   Verificare che è una matrice ortogonale che rappresenta una riflessione. Calcolare una matrice ortogonale U, e la sua inversa ${}^tU$, tali che ${}^tUS_\alpha U$ sia diagonale.

4. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che
$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ -1 & \pi & 2 \\ \sqrt{2} & 7 & 333 \end{pmatrix} = 1.$$
Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+\pi & c+2 \\ \sqrt{2}+1 & 7-\pi & 331 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -1/2 & \pi/2 & 1 \\ \sqrt{2}/3 & 7/3 & 111 \end{pmatrix}.$$