ESAME DI GEOMETRIA - V APPELLO A.A. 2020/21

Trieste, 2 settembre 2021

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Considerare il seguente sistema lineare complesso:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ -x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

   Risolvere il sistema applicando l'algoritmo di Gauss alla matrice completa e indicando a ogni passo gli elementi pivot. Descrivere l'insieme delle soluzioni (che tipo d'insieme è, la sua dimensione, ecc.).

2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico, sia dato l'endomorfismo f definito, rispetto alla base canonica, da $f(e_1) = f(e_3) = e_1+e_3$, $f(e_2) = f(e_4) = e_2+e_4$. Stabilire che f è un endomorfismo autoaggiunto. Trovare una base $\mathcal{B}$ ortonormale di autovettori di f, la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ e le matrici di passaggio da $\mathcal{B}$ alla base canonica e dalla base canonica a $\mathcal{B}$.

3. a) Ricordare le definizioni di matrice quadrata simmetrica e antisimmetrica.
   b) Sia A una matrice $n \times n$ a entrate in un campo K. Dimostrare che A è simmetrica se e solo se per ogni matrice $n \times n$ B si ha che ${}^tBAB$ è simmetrica.
   c) Dimostrare che A è antisimmetrica se e solo se per ogni matrice $n \times n$ B si ha che ${}^tBAB$ è antisimmetrica.

4. Considerare il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^3$. Denotiamo con e_1, e_2, e_3 la base canonica. Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

   (i) Determinare la dimensione e una base ortonormale di U.
   (ii) Determinare un'equazione lineare in x_1, x_2, x_3 che abbia $U^\perp$ come spazio delle soluzioni.
   (iii) Estendere la base di U trovata al punto (i) a una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.