Parità: decodifica soft

Fulvio Babich (babich@units.it)

DIA – Università di Trieste

MAP in presenza di un codice

$$\log\frac{p(x_i=+|\mathbf{r})}{p(x_i=-|\mathbf{r})}=\log\frac{p(\mathbf{r}|x_i=+)p(x_i=+)}{p(\mathbf{r}|x_i=-)p(x_i=-)}=\log\frac{p(r_1,r_2,\dots,r_n|x_i=+)p(x_i=+)}{p(r_1,r_2,\dots,r_n|x_i=-)p(x_i=-)}=$$

$$=\log\frac{p(r_1,r_2,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n|x_i=+)p(r_i,|x_i=+)p(x_i=+)}{p(r_1,r_2,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n|x_i=-)p(r_i,|x_i=-)p(x_i=-)}$$

$$=\log\frac{p(r_1,r_2,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n|x_i=+)}{p(r_1,r_2,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n|x_i=-)}$$ Codice

$$+\log\frac{p(r_i,|x_i=+)}{p(r_i,|x_i=-)}$$ Canale (BPSK: $\log\frac{p(r_i,|x_i=+)}{p(r_i,|x_i=-)}=4r_i\sqrt{\frac{E_{\mathrm{av}}}{N_0}}$)

$$+\log\frac{p(x_i=+)}{p(x_i=-)}$$ A priori

Codici di parità: matematica delle APP

- $$L = \log \frac{p_+}{p_-} = \log \frac{p_+}{1 - p_+} \qquad p_+ = \frac{\exp(L)}{1 + \exp(L)}$$

  Consideriamo una coppia di bit (antipodali), u_1, u_2. $u_1 \bullet u_2$=+ se u_1=u_2.

  $$p_+(u_1 u_2) = p(u_1^+)p(u_2^+) + (1 - p(u_1^+))(1 - p(u_2^+)) = 1 - p(u_1^+) - p(u_2^+) + 2p(u_1^+)p(u_2^+)$$

  $$p_-(u_1 u_2) = p(u_1^+) + p(u_2^+) - 2p(u_1^+)p(u_2^+)$$

  Sostituendo, dopo alcuni passaggi si ottiene

  $$p_+(u_1 u_2) = \frac{1 + \exp(L(u_1))\exp(L(u_2))}{(1 + \exp(L(u_1)))(1 + \exp(L(u_2)))}$$

  $$p_-(u_1 u_2) = \frac{\exp(L(u_1)) + \exp(L(u_2))}{(1 + \exp(L(u_1)))(1 + \exp(L(u_2)))}$$

  $$L(u_1 u_2) = \log\left[\frac{1 + \exp(L(u_1))\exp(L(u_2))}{\exp(L(u_1)) + \exp(L(u_2))}\right]$$

Matematica delle APP

- Generalizzando (si dimostra per induzione, partendo da J=2)

$$L(u_1 u_2 \ldots u_J) = \log\left[\frac{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp\left(L\left(u_j\right)\right)+1\right)+\prod_{j=1}^{J}\left(\exp\left(L\left(u_j\right)\right)-1\right)}{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp\left(L\left(u_j\right)\right)+1\right)-\prod_{j=1}^{J}\left(\exp\left(L\left(u_j\right)\right)-1\right)}\right]$$

Detto $x = \dfrac{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp\left(L\left(u_j\right)\right)-1\right)}{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp\left(L\left(u_j\right)\right)+1\right)} = \dfrac{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp\left(L\left(u_j\right)/2\right)-\exp\left(-L\left(u_j\right)/2\right)\right)}{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp\left(L\left(u_j\right)/2\right)-\exp\left(-L\left(u_j\right)/2\right)\right)} = \prod_{j=1}^{J}\tanh\left(L\left(u_j\right)/2\right)$

Si ottiene: $L(u_1 u_2 \ldots u_J) = \log\left[\dfrac{1+x}{1-x}\right]$

da cui $x = \dfrac{\exp\left(L\left(u_1 u_2 \ldots u_J\right)\right)-1}{\exp\left(L\left(u_1 u_2 \ldots u_J\right)\right)+1} = \tanh\left(L\left(u_1 u_2 \ldots u_J\right)/2\right)$

Sostituendo: $L(u_1 u_2 \ldots u_J) = 2\arctan(x) = 2\arctan\left(\prod_{j=1}^{J}\tanh\left(L\left(u_j\right)/2\right)\right)$

Single parity check (SPC)

- Si consideri un codice a verifica di parità (una parola di codice, **c**, è costituita da K bit di informazione e 1 bit di ridondanza tale che il numero di bit di valore 1 nella parola è in numero pari).
- Si consideri la versione binaria antipodale **d**=1-2**c**. Nella parola **d**, i valori pari a '-1' sono in numero pari. Pertanto valgono le relazioni: $\prod_{k=1}^{K+1} d_k = 1, \quad d_k = \prod_{h=1,h\neq k}^{K+1} d_h$
- Di conseguenza la stima soft del valore k-mo derivante dalla stima degli altri valori (contributo del codice alla stima complessiva) si ottiene con la relazione determinata in precedenza (stima soft di un prodotto).
- Se si organizzano i dati una matrice bidimensionale, con R righe e C colonne, e si aggiunge una riga di parità verticale e una colonna di parità orizzontale, si ottiene un codice prodotto in cui ogni bit può essere sottoposto a una doppia stima soft (di riga e di colonna), consentendo una decodifica iterativa. $R_c = \frac{RC}{(R+1)(C+1)}$
- Sono possibili configurazioni più complesse, per ottenere prestazioni migliori e tassi di codifica opportuni. (F. Babich, "Design of Adaptive Systems for the Fading Channel Adopting Efficient Coded Modulations", IEEE ICC 2006, Istanbul, Turkey, 11-15 June 2006.)

Probabilità d'errore di blocco (o di parola - *word error probability*); errori indipendenti.

- Decodifica mediante decisione morbida (*soft decision decoding*). Introduciamo il concetto di distanza euclidea fra due parole di codice *i,j*, d_{ij}^{E} , mentre la distanza di Hamming sia $d_{ij}^{H} \geq d_{\min}$ -

- Modulazione binaria antipodale: $\left(d_{ij}^{E}\right)^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k:c_{ik} \neq c_{jk}}}^{n} \left(\pm 2\sqrt{E_g}\right)^2 = 4E_g d_{ij}^{H}$

- In generale, la probabilità d'errore fra due parole è: $P_{e_{ij}} = Q\left(d/\sqrt{2N_0}\right)$

- Pertanto, applicato lo *union bound* e introdotto il tasso del codice $R_c=k/n$ (E_b = energia dei bit di sorgente) otteniamo:

  modulazione binaria antipodale: $P_W \leq \left(2^k - 1\right)Q\left(\sqrt{2R_c d_{\min} E_b / N_0}\right)$