**Corso di GEOMETRIA - Prova scritta**
**A.A. 2020/2021 - 13 settembre 2021**
**Prof. Valentina Beorchia**

| Cognome | Nome |
|---|---|
| | |

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale.

Si dimostri il seguente Teorema: in uno spazio vettoriale finitamente generato $V$, $n$ vettori $v_1, \ldots, v_n$ formano una base se e solo se ogni vettore di $V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

$rg\, A = 1 = rg\, f = \dim \mathrm{Im} f$, base di $\mathrm{Im} f$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\dim \ker f = 3 - rg\, f = 3 - 1 = 2$, l'equazione di $\ker f$ è $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

una base di $\ker f$ è data, ad esempio, da $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$

(c) **(1 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione dell'immagine $f(r)$ della retta $r$ di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 &= -t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= t \end{cases}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}-t\\t\\t\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(-t) + t + t \\ 4(-t) + 2t + 2t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim f(r) = 0$

(d) **(3 punti)** Si dica se il seguente sistema è compatibile, e in caso affermativo si determini l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, dove $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

$rg\, A = 1 = rg\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}\right) \Rightarrow$ per RC il sistema è compatibile, e la generica soluzione dipende da $n - rg\, A = 3 - 1 = 2$ parametri.

Il sistema è equivalente a $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$

se pongo $x_3 = c$, $x_2 = d$, trovo $x_1 = \frac{1}{2}(-c - d + 1)$; la gen. soluzione è $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-c-d+1) \\ d \\ c \end{pmatrix}$

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$p_B(x) = \det \begin{pmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & -3 \\ 0 & -3 & 3-x \end{pmatrix} = (4-x)\left((3-x)^2 - 9\right) = (4-x)(9-6x+x^2-9) = (4-x)(x^2-6x)$$

$$\overset{!}{=} x(4-x)(x-6)$$

$$\Longrightarrow \quad Sp(L_B) = \{0, 4, 6\}$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per $L_B$.

$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, con eq. $\begin{cases} 4x = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$, base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

$V_4 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, con eq. $\begin{cases} -y - 3z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{cases}$, base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\Longleftrightarrow y = 0, z = 0$

$V_6 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, con eq. $\begin{cases} -2x = 0 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases}$, base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

Base ortonormale di autovettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{B}$$

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = {}^t M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le due rette

$$r:\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t \\ z &= 2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x &= \tau \\ y &= 3+\tau \\ z &= -2+\tau \end{cases}$$

Si dica se sono parallele, incidenti oppure sghembe. Nel caso siano complanari, si trovi un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

$W_r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$, $W_s = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$; siccome i due vettori non sono proporzionali $\Rightarrow$ le due rette NON sono parallele.

Sono incidenti $\Leftrightarrow$ il sistema $\begin{cases} 1+t = \tau \\ 2-t = 3+\tau \\ 2t = -2+\tau \end{cases}$ è compatibile. Osserviamo che $t=-1$, $\tau=0$ è soluzione del sistema, e le rette si intersecano nel punto $(0,3,-2)$.

Quindi sono anche complanari.

Piano che contiene entrambe: $\begin{cases} x = \quad t+\tau \\ y = 3-t+\tau \\ z = -2+2t+\tau \end{cases}$

Equazione cartesiana:

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y-3 \\ 2 & 1 & z+2 \end{pmatrix} = 0$, cioè $\boxed{3x - y - 2z = 1}$

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano $H$ passante per il punto $(1,1,1)$ e ortogonale alla retta

$$q:\begin{cases} x = & 1-t \\ y = & -2+3t \\ z = & -3+t. \end{cases}$$

Ricordiamo che per un piano $ax+by+cz=d$, il vettore $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ è ortogonale al piano dato.

Quindi il generico piano ortogonale a $q$ ha equazione

$-x+3y+z=d$.

Impongo passaggio per $(1,1,1)$: $-1+3+1=d$, $d=3$

$\Longrightarrow H: \boxed{-x+3y+z=3}$