UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di misure meccaniche, termiche e collaudi

Prof. Lucia Parussini
Prof. Rodolfo Taccani

a.a.2021-2022

Outline

- Introduzione alla probabilità
- Variabili casuali, densità di probabilità e distribuzioni
- Valore atteso e varianza
- Legge dei Grandi Numeri ed il Teorema del Limite Centrale

Introduzione alla probabilità

La **teoria della probabilità** si interessa dello studio di **fenomeni casuali o aleatori** (osservabili ma non prevedibili).

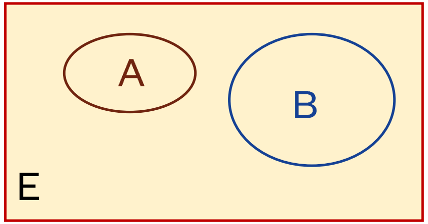
E *spazio degli eventi* o *spazio campionario*: insieme dei risultati
A *evento casuale*: sottoinsieme di E, costituito da una o più *modalità* soddisfacenti a determinate condizioni prefissate.

Un evento A si dice:
- ELEMENTARE se è costituito da un solo elemento
- CERTO se coincide con E
- IMPOSSIBILE se è l'insieme vuoto ∅

Esempi: il lancio di una moneta, di un dado, l'estrazione di una carta da un mazzo o di una pallina da un'urna.
- ❑ Lancio della moneta E={testa, croce}: "nel lancio della moneta esce o testa o croce" A =E ={testa, croce} (evento certo)
- ❑ Lancio del dado E={1,2,3,4,5,6} :
  - "esce un numero pari " A={2,4,6}
  - "esce il numero 3" A={3} (evento elementare)
  - "esce un numero inferiore a 1" A=∅ (evento impossibile)

Eventi ***incompatibili*** ***(o disgiunti):*** se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.

$$A \cap B = \emptyset$$

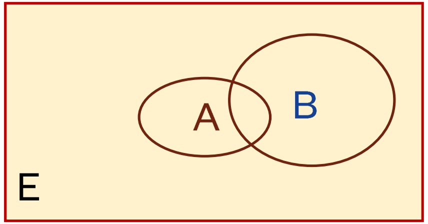


Esempio: l'apparizione simultanea di testa e di croce nel lancio di una moneta.

Osservazione: due eventi elementari sono sempre incompatibili !

Eventi ***compatibili:*** se il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro.

$$A \cap B \neq \emptyset.$$



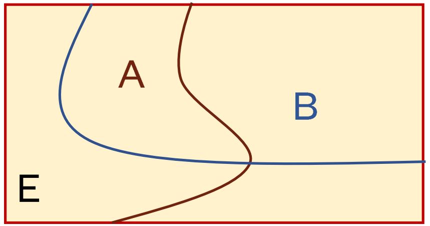
Esempio: Nel lancio del dado l'evento "esce faccia 3" è compatibile con l'evento "esce faccia dispari ".

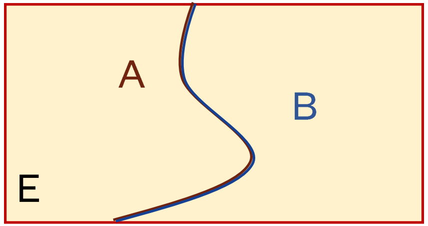
Due eventi A e B si dicono ***esaustivi*** se la loro unione genera l'intero spazio campionario.

$$A \cup B = E$$

Due eventi A e B si dicono ***complementari*** ***(o contrari)*** se sono disgiunti e la loro unione genera l'intero spazio campionario.

$$A \cup B = E \text{ e } A \cap B = \emptyset$$





Esempio: Consideriamo l'esperimento casuale lancio di un dado non truccato con spazio campionario E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

A = {1, 3, 5} e B = {2, 3, 4, 5, 6}, corrispondenti rispettivamente al caso in cui al lancio del dado escano i numeri dispari ed al caso in cui al lancio del dado escano i numeri maggiori di 1, sono esaustivi.

A = {1,3,5} e B = {2, 4, 6}, corrispondenti rispettivamente al caso in cui al lancio del dado escano i numeri dispari ed al caso in cui al lancio del dado escano i numeri dispari, sono complementari.

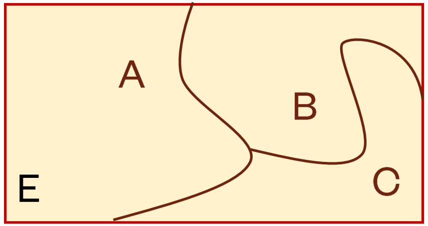
Introduzione alla probabilità

Gli n insiemi $A_1, A_{2,\ldots,} A_n$ contenuti in E costituiscono una ***partizione*** di E se sono disgiunti e se la loro unione coincide con E.

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$$

e

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{e} \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{e} \quad \ldots \quad A_2 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{e} \quad \ldots A_{n-1} \cap A_n = \emptyset$$



Esempio: Consideriamo l'esperimento casuale lancio di un dado non truccato con spazio campionario E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

A = {1} , B = {3, 6} , C = {2, 4, 5} sono una partizione di E.

Introduzione alla probabilità

Due eventi si dicono ***indipendenti*** se il verificarsi dell’uno non influisce sul verificarsi dell’altro.

Due eventi si dicono ***dipendenti*** se il verificarsi dell’uno influisce sul verificarsi dell’altro.

Degli eventi casuali si dicono ***eventi equiprobabili*** in una data prova se la simmetria dell'esperimento permette di supporre che nessuno di essi sia più probabile di un altro.

Esempio: l'apparizione di una delle sei facce di un dado nel caso in cui questo sia regolare (non truccato).

Ci sono vari approcci al *concetto di probabilità*:

- Definizione classica - probabilità classica (o a priori, o matematica, o di Laplace)
- Definizione frequentista - probabilità frequentista (o a posteriori, o statistica, o legge empirica del caso)
- Definizione soggettivista
- Definizione assiomatica

Introduzione alla probabilità

Definizione classica

Se con a indichiamo il numero di elementi dell'insieme A e con n l'insieme degli elementi dell'insieme E, la probabilità dell'evento A si scrive:

$$p = \frac{a}{n}$$

con

$$0 \leq p \leq 1$$

dove 0 evento impossibile e 1 evento certo.

Esempi:

- ❑ Lancio della moneta E={testa, croce} : "nel lancio della moneta esce o testa o croce" A =E ={testa, croce} $p = \frac{2}{2} = 1$
- ❑ Lancio del dado E={1,2,3,4,5,6}:
  - "esce un numero pari " A={2,4,6} $p = 3/6 = 0.5$
  - "esce un numero inferiore a 1" A=∅ $p = 0/6 = 0$

Introduzione alla probabilità

Definizione frequentista

Se indichiamo con m la frequenza assoluta dell'evento e con N il numero totale di prove effettuate, definiamo frequenza relativa, o semplicemente frequenza:

$$f = \frac{m}{N}$$

con

$$0 \leq f \leq 1$$

$$\lim_{N \to \infty} f(N) = \lim_{N \to \infty} \frac{m}{N} \approx \frac{a}{n} = p$$

Introduzione alla probabilità

Definizione soggettivista

Per gli eventi casuali per i quali non è possibile determinare la probabilità che si verifichino a priori, perché non si conosce il valore di a, e nemmeno la frequenza, perché non sono noti m e N, la valutazione relativa al loro verificarsi è affidata alla stima soggettiva, spesso suggerita dall'esperienza personale o dall'intuizione, non necessariamente supportata da considerazioni oggettive, ma espressa tuttavia in modo coerente.

Il modello soggettivo esprime il grado di fiducia che si ha nella realizzazione di un evento.

Evento	Probabilità
E' impossibile che, non è vero che	0
E' quasi impossibile che, non credo che	0 ÷ 0.1
E' molto difficile che, è improbabile che	0,1 ÷ 0,2
E' difficile che, dubito	0,2 ÷ 0,3
E' alquanto difficile che	0,3 ÷ 0,4
E' un po' improbabile che	0,4 ÷ 0,5
Non saprei decidere tra il sì e il no, forse	0,5
Ho una certa speranza che	0,5 ÷ 0,6
Ho buone speranze che	0,6 ÷ 0,7
E' probabile che	0,7 ÷ 0,8
E' molto probabile che	0,8 ÷ 0, 9
Sono quasi certo che, quasi certamente	0,9 ÷ 1
E' certo che, è vero che	1

Introduzione alla probabilità

Definizione assiomatica

Sia E l'insieme dei risultati di un fenomeno casuale A un evento, sottoinsieme di E.

La **probabilità dell'evento** A è la funzione $P(A)$ $(0 \leq P(A) \leq 1)$ che associa univocamente ad ogni sottoinsieme di E un numero reale $P(A)$.

Proprietà 1 $P(A) \geq 0 \quad \forall A$

Proprietà 2 $P(E) = 1$

Proprietà 3 Siano $A_1, A_2, A_3, \dots$ eventi casuali, sottoinsiemi di E, a due a due disgiunti.
La probabilità corrispondente alla loro unione è uguale alla somma delle singole probabilità, cioè

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

Si verifica facilmente che $P(\emptyset) = 0$.

Teorema della probabilità dell'evento complementare o contrario

Sia $\bar{A}$ evento complementare di A, allora si ha:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(E) = 1$$

Esempio: se la probabilità che esca la faccia 1 nel lancio di un dado è pari a 1/6, la probabilità che esca una qualsiasi delle altre facce è: 1-1/6=5/6.

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità totale o di eventi incompatibili

Siano A_1 e A_2 due eventi incompatibili, allora si ha

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Esempio: consideriamo, nel caso del lancio del dado, il verificarsi degli eventi seguenti: esce la faccia 1, esce un numero pari. La probabilità dell'evento: "esce la faccia 1 oppure esce un numero pari", che corrisponde a quella dell'unione dei due insiemi, è data dalla somma delle due probabilità: 1/6+1/2=4/6=2/3.

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n eventi a due a due incompatibili, allora si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Esempio: consideriamo, nel caso del lancio del dado, il verificarsi dell'evento: "esce la faccia 1 oppure la faccia 3 oppure esce un numero pari", la probabilità dell'evento è data dalla somma: 1/6 +1/6+1/2=5/6.

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità di eventi compatibili

Siano A_1 e A_2 due eventi compatibili, allora

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Esempio: consideriamo, nel caso del lancio del dado, il verificarsi degli eventi seguenti: esce la faccia 2, esce un numero pari. La probabilità dell'evento: "esce la faccia 2 oppure esce un numero pari", che corrisponde a quella dell'unione dei due insiemi, è data da: 1/6+1/2-1/3=2/6=1/3.

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n eventi compatibili, allora si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots +$$
$$+(-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Variabili casuali, densità di probabilità e distribuzioni

Teorema della probabilità di eventi compatibili

Esempio:

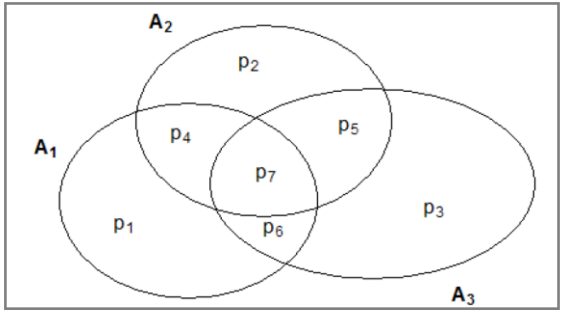
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^{7} p_i$$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + 2p_6 + 3p_7$$

$$P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_3) = p_4 + p_5 + p_6 + 3p_7$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p_7$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$



Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità di eventi compatibili indipendenti

Siano A_1 e A_2 due eventi compatibili e indipendenti, la probabilità dell'evento composto è uguale a

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

Esempio: la probabilità di ottenere, in due lanci consecutivi del dado, la faccia 6 è pari a (1/6) (1/6) = 1/36.

Generalizzando: siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n eventi compatibili e indipendenti, la probabilità dell'evento composto è uguale a:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$$

Osservazione: La probabilità dell'unione di due eventi indipendenti è data da:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2)$$

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità di eventi compatibili dipendenti o della probabilità composta

Siano A_1 e A_2 due eventi compatibili e dipendenti, la probabilità dell'evento composto è uguale a

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

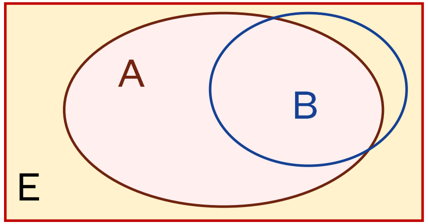
Esempio: In una scatola sono contenute 10 palline, 4 rosse e 6 nere.
$P(A)$ è la probabilità che in due estrazioni successive escano due palline entrambe nere
L'evento A_1: "esce una pallina nera alla prima estrazione" ha una probabilità pari a $P(A_1)$ = 6/10.
L'evento $A_2|A_1$: "esce una pallina nera alla seconda estrazione" ha una probabilità pari a $P(A_2|A_1)$= 5/9, poiché la prima pallina estratta non è più stata reintrodotta nella scatola.
L'evento A: "esce una pallina nera alla prima estrazione e una pallina nera alla seconda estrazione" ha una probabilità pari a $P(A)$ = (6/10)(5/9) = 1/3.

Probabilità condizionale

La probabilità condizionale di B dato A è il valore assunto dalla probabilità dell'evento B qualora si sappia che si è verificato l'evento A.

Sapendo che l'evento A si è verificato, concludiamo che il risultato del nostro esperimento deve essere un elemento del sottoinsieme A di E. Quindi la valutazione della nuova probabilità di B deve tenere conto dei soli risultati che sono presenti sia nel sottoinsieme A che nel sottoinsieme B, vale a dire nel sottoinsieme di E ottenuto intersecando i due sottoinsiemi A e B.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Introduzione alla probabilità

Teorema di Bayes

Consideriamo una partizione $A_1, A_{2,\dots}, A_n$ di E. Sia inoltre B un evento di E. La formula di Bayes è:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Dalla definizione di probabilità condizionale segue che $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i) \quad \forall i = 1,2,\dots,n$

Consideriamo ora gli eventi $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$. Essi costituiscono chiaramente una partizione di B: infatti sono disgiunti e la loro unione coincide con B. Pertanto la probabilità di B, $P(B)$, è uguale alla somma delle probabilità degli eventi $A_i \cap B (i = 1,2,\dots,n)$:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)$$

Dalla definizione di probabilità condizionale:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes si usa quando un evento B può verificarsi sotto diverse condizioni sulle quali si possono fare n ipotesi. Se si conosce la probabilità delle ipotesi nonché le probabilità condizionate, si potrà verificare se le ipotesi iniziali erano corrette o se devono essere modificate.

Esempio:
Una malattia colpisce 1 persona su 100. Un test dà esito positivo nel 98% dei casi su persone effettivamente malate e nello 0,5% dei casi su persone che invece stanno bene. Se una persona fa il test, che probabilità P ha di essere davvero malata se il test dà esito positivo?
A_1 la persona è malata, A_2 la persona è sana, B il test è positivo
$P(A_1|B)$ probabilità che la persona sia malata posto che il test sia positivo
$P(A_1) = 1/100$ incidenza della malattia (probabilità che la persona sia malata)
$P(B|A_1) = 98/100$ incidenza di positività sui malati (probabilità che il test sia positivo posto che la persona sia malata)
$P(A_2) = 99/100$ incidenza della non-malattia (probabilità che la persona sia sana)
$P(B|A_2) = 5/1000$ esito positivo sui sani (probabilità che il test sia positivo posto che la persona sia sana)

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{1}{100}\frac{98}{100}}{\frac{1}{100}\frac{98}{100} + \frac{99}{100}\frac{5}{1000}} = 66.4\%$$

Teorema di Bayes

Esempio:
In un caso di omicidio ci sono due sospetti, A e B, considerati dalla polizia “ugualmente sospettati”. Sul luogo del delitto sono stati rinvenuti dei capelli non appartenenti alla vittima, e quindi appartenenti al colpevole. La prova del DNA sui capelli e sui due sospetti ha portato alla conclusione che il DNA ritrovato potrebbe appartenere all’80% ad A e al 50% a B.
Qual'è la probabilità che sia A il colpevole alla luce dell’analisi del test sul DNA? E che sia B?

Sappiamo:
P(A) = P(B) = 0,5 (probabilità che A sia colpevole uguale alla probabilità che B sia colpevole: 1/2)
P(test|A) = 0.80 (probabilità che il test sia positivo posto che A sia il colpevole)
P(test|B) =0.50 (probabilità che il test sia positivo posto che B sia il colpevole)

Allora:
P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B) = 0.8 0.5 + 0.5 0.5 = 0.65

probabilità che A sia il colpevole posto che il test sia positivo
P(A|test) = P(test|A)P(A) /[P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B)] = 0.8 0.5 / 0.65 = 0.6 = 60%
probabilità che B sia il colpevole posto che il test sia positivo
P(B|test) = P(test|B)P(B) /[P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B)] = 0.5 0.5 / 0.65 = 0.4 = 40%

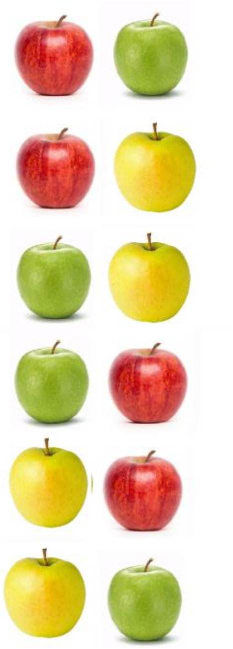
Richiami di calcolo combinatorio

Disposizioni semplici

Il numero di disposizioni semplici di n oggetti presi a k a k, con $0 < k \leq n$, è dato da

$$\boxed{D_{n,k} = D_{n,k-1}(n-k+1) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}$$

Esempio: n=3, k=2



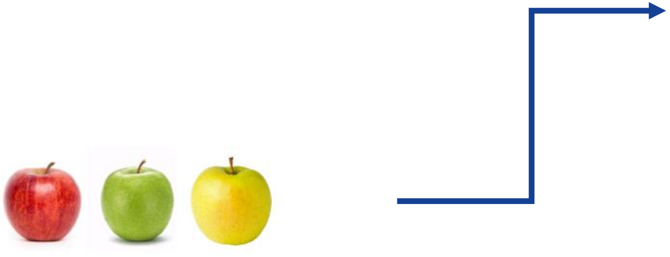
Richiami di calcolo combinatorio

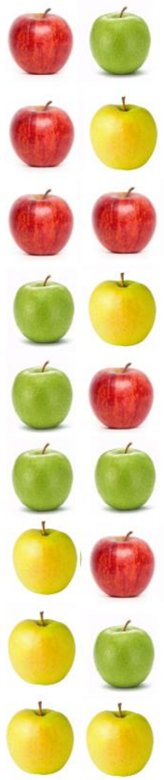
Disposizioni con ripetizione

Nel caso in cui sia consentito ad un oggetto di figurare nei gruppi più di una volta, si parla di disposizioni con ripetizione. Sono disposizioni con ripetizione di classe k i raggruppamenti ottenibili da n oggetti distinti presi a k a k, in cui ogni oggetto può essere ripetuto fino a k volte:

$$\boxed{D'_{n,k} = n^k}$$

Esempio: n=3, k=2





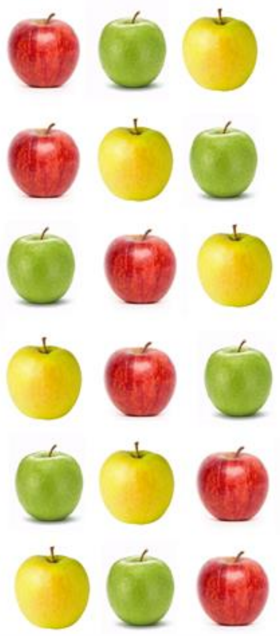
Richiami di calcolo combinatorio

Permutazione semplice

Definiamo le *permutazioni semplici* di n oggetti come le disposizioni semplici degli n oggetti, presi a n a n

$$\boxed{P_n = D_{n,n} = n!}$$

Esempio: n=3

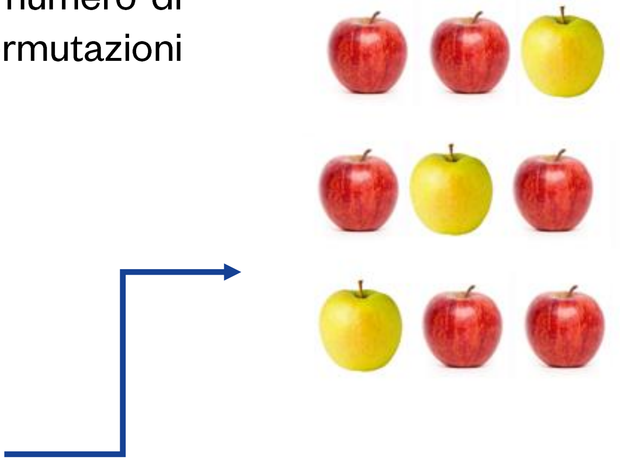


Permutazione con ripetizioni

Il numero di permutazioni di n oggetti in cui uno o più elementi sono ripetuti più volte ($r, s, t, \ldots$ volte) è dato dal rapporto tra il numero di permutazioni semplici degli n oggetti e quello delle permutazioni semplici degli $r, s, t, \ldots$ oggetti:

$$\boxed{P_n^{(r,s,t,\ldots)} = \frac{P_n}{P_r \cdot P_s \cdot P_t \cdot \cdots} = \frac{n!}{r!\, s!\, t! \ldots}}$$

Esempio: n=3, r=2



Richiami di calcolo combinatorio

Combinazione semplice

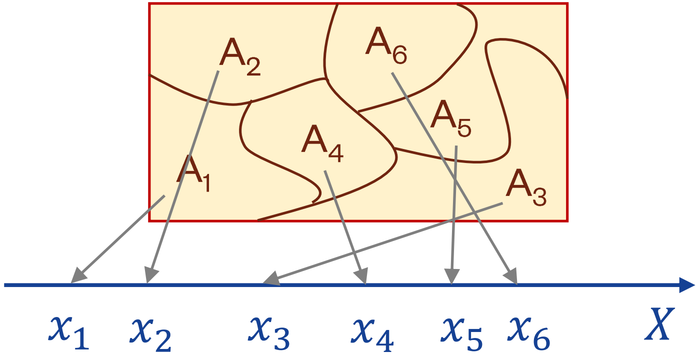
Chiamiamo *combinazioni semplici* di n oggetti distinti presi a k a k (con $k \leq n$) tutti i gruppi contenenti k oggetti realizzabili con gli n oggetti dati, in modo tale che due gruppi qualsiasi differiscano tra loro per almeno un oggetto

$$\boxed{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{P_n}{P_{n-k}P_k}}$$

Esempio: n=4, k=2

Variabili casuali

In generale, se consideriamo un esperimento il cui insieme di possibili risultati è E, diremo variabile casuale una applicazione X a valori reali definita sull'insieme E che associa ad ogni elemento di E un numero reale.



Variabili casuali, densità di probabilità e distribuzioni

Variabili casuali

Sono modelli teorici utili a descrivere i fenomeni aleatori.

Sono sempre specificate da due entità:
- l'insieme dei valori assunti dalla variabile
- le probabilità associate a ciascun valore (o le densità di probabilità associata ad un intervallo di valori)

Gli eventi specificati dai valori assunti dalle variabili sono sempre incompatibili, e formano una classe completa (spazio degli eventi).

La somma delle probabilità (o l'integrale della funzione di densità di probabilità esteso a tutto il campo di esistenza della variabile) vale uno.

Una variabile casuale X può essere continua (cioè assumere un insieme continuo di valori) oppure discreta (cioè assumere un insieme di valori discreti, x_i, con $i = 1,2, \dots , j, \dots$).

Variabili casuali, densità di probabilità e distribuzioni

Funzione di probabilità di una variabile casuale discreta

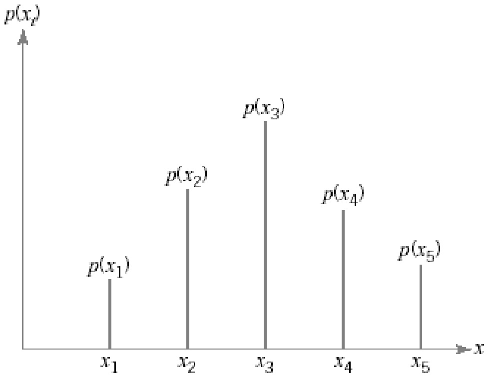
Supponiamo che X sia una variabile casuale discreta, cioè che X possa assumere valori appartenenti all'insieme di numeri reali $\{x_1, x_2, \dots, x_j, ..\}$. Ad ognuno dei valori che X può assumere, possiamo assegnare una funzione di probabilità $p(x_i)$ tale che sia $p(x_i) \geq 0$ per ogni $i = 1,2, \dots, j, \dots$ e tale che sia

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

Data una variabile casuale discreta $X: \Omega \to S \subseteq \mathbb{R}$ la *funzione di probabilità* è la funzione $p: S \to [0,1]$

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) & x \in S \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash S \end{cases}$$

che associa ad ogni valore di x assunto dalla variabile casuale X la probabilità che la variabile X assuma esattamente quel valore.



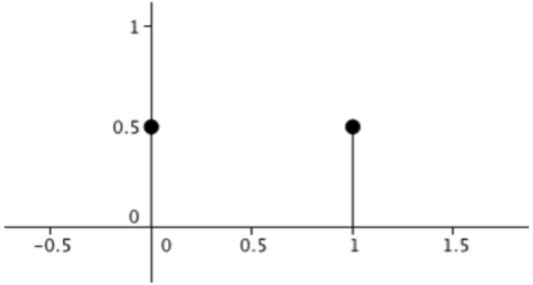
Funzione di probabilità di una variabile casuale discreta

Esempio:

Nel caso dell'esperimento casuale di lancio di una moneta bilanciata con spazio campionario Ω costituito dai punti campionari Croce e Testa: $\Omega = \{C, T\}$. Si assume la variabile casuale $X : \Omega \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}$, che ad ogni punto dello spazio (croce e testa) associa uno ed un solo numero reale, ad esempio 0 a C ed 1 a T; simbolicamente abbiamo: $X(C) = 0$; $X(T) = 1$.

Abbiamo $S = \{0,1\}$ e la funzione di probabilità:

$$p(x) = \begin{cases} p(0) = P(X = 0) = 1/2 & per\ 0 \in S \\ p(1) = P(X = 1) = 1/2 & per\ 1 \in S \\ 0 & per\ x \in \mathbb{R} \setminus S \end{cases}$$



Variabili casuali, densità di probabilità e distribuzioni

Funzione di probabilità di una variabile casuale discreta

Esempio:

lancio di 2 monete $\Omega^2 = \{(T,T),(C,T),(T,C),(C,C)\}$
Variabile casuale discreta: X numero totale degli esiti T; $X : \Omega^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}$; i suoi possibili valori sono:
0 se non si ottiene alcuna testa: $X(C,C) = 0$
1 se una delle due monete dà testa: $X[(C,T),(T,C)] = 1$
2 se entrambe le monete danno testa: $X(T,T) = 2$
Abbiamo le probabilità:

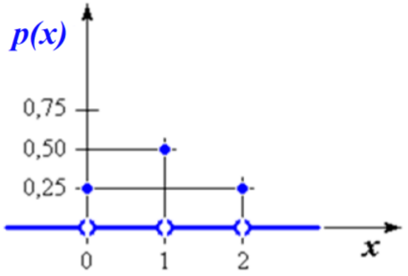
$$P(X = 0) = P(C,C) = 1/4$$

$$P(X = 1) = P(C,T) = P(T,C) = \frac{2}{4} = 1/2$$

$$P(X = 2) = P(T,T) = 1/4$$

Abbiamo $S = \{0,1,2\}$ e la funzione di probabilità:

$$p(x) = \begin{cases} p(0) = P(X=0) = \frac{1}{4} = 0.25 & per\ 0 \in S \\ p(1) = P(X=1) = \frac{1}{2} = 0.50 & per\ 1 \in S \\ p(2) = P(X=2) = \frac{1}{4} = 0.25 & per\ 2 \in S \\ 0 & per\ x \in \mathbb{R}\backslash S \end{cases}$$



Variabili casuali, densità di probabilità e distribuzioni

Funzione di densità di probabilità di una variabile casuale continua

Per le variabili casuali continue non ha senso determinare la probabilità su ciascun valore assunto dalla variabile casuale semplice X (visto che è sempre nulla), ma è corretto parlare di probabilità che la variabile casuale assuma valori in un intervallo, anche piccolissimo, del tipo $(x, x + dx]$.

Infatti, una variabile casuale continua X è una funzione che può assumere tutti i valori compresi in un intervallo (a, b). I casi possibili sono di fatto infiniti e quindi:

$$P(X = x) = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli}{numero\ di\ casi\ possibili} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Esempio: La probabilità che la temperatura nella stanza sia esattamente 20°C è nulla, invece sarà maggiore di zero la probabilità che la temperatura sia compresa fra 20°C e 20.1°C.

Funzione di densità di probabilità di una variabile casuale continua

Data la variabile casuale continua X che assume valori nell'intervallo $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, la *funzione di densità di probabilità (o PDF)* è la funzione che ad ogni numero reale associa il limite, per dx che tende a 0, del rapporto tra la probabilità che la variabile casuale assuma valori nell'intervallo $(x, x + dx]$ e l'ampiezza dx.

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \; x \to \lim_{dx \to 0} \left[\frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx} \right]$$

La funzione di densità in x rappresenta quanto vale la probabilità *intorno ad* x in rapporto all'ampiezza di tale *intorno*. Il termine funzione di densità, serve proprio ad evocare quanto è *densa* la probabilità.

Variabili casuali, densità di probabilità e distribuzioni

Funzione di densità di probabilità di una variabile casuale continua

Ogni evento deve essere ricondotto all'unione, negazione o intersezione di intervalli

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = Z(x)$$

$Z(x)$ ***funzione di ripartizione*** (o ***funzione cumulativa***)

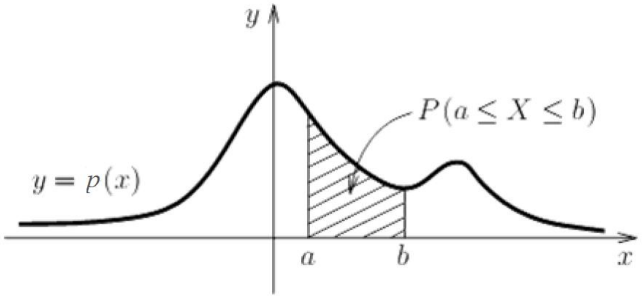
Quindi per ogni coppia di numeri reali (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, si ha

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} p(x)dx = Z(b) - Z(a)$$

La funzione di densità di probabilità è sempre $p(x) \geq 0$

L'area totale sottesa alla funzione è uguale a 1, ossia:

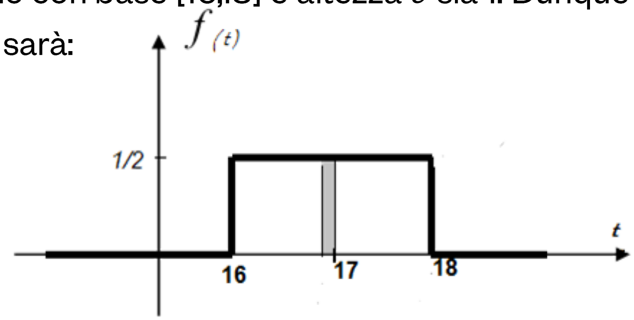
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$



Funzione di densità di probabilità di una variabile casuale continua

Esempio:

A aspetta una telefonata da B il quale ha preannunciato che chiamerà, in un istante non meglio precisato, fra le 16:00 e le 18:00. A si deve però assentare dalle 16:45 alle ore 17:00. Qual'è la probabilità che la telefonata arrivi mentre A è assente?
L'istante della telefonata è una variabile casuale X continua. Per quanto ne sa A, tutti i momenti dalle 16:00 alle 18:00 sono equiprobabili, mentre fuori da questo intervallo la probabilità è zero. E' intuitivo che la densità abbia un valore costante c sull'intervallo [16, 18] ed ha il valore zero fuori di questo intervallo. Quanto vale la costante c? Deve essere tale da soddisfare la relazione $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$, ovvero l'area del rettangolo con base [16,18] e altezza c sia 1. Dunque $2c = 1$ e perciò abbiamo $c = 1/2$. La funzione di densità della variabile X, sarà:



$$f(t) = \begin{cases} 0 & per\ t < 16 \\ \frac{1}{2} & per\ 16 \leq t \leq 18 \\ 0 & per\ t > 18 \end{cases}$$

$P(16{:}45 \leq X \leq 17{:}00) = \frac{1}{4}\frac{1}{2}$ =0.125

Valore atteso

Consideriamo una variabile casuale X con una distribuzione discreta caratterizzata da un certo numero (finito o infinito) di valori x_i, dove $i = 1, \dots, j, \dots$. Indichiamo con la lettera $p(x_i)$ la funzione di probabilità della variabile casuale X e definiamo il valore atteso di X, che indicheremo con $E(X)$, mediante l'equazione:

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$$

Consideriamo una variabile casuale X con una distribuzione continua la cui densità di probabilità è data dalla funzione $p(x)$. Il valore atteso (o valor medio) è definito dall'equazione seguente:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

Valore atteso

Proprietà del valore atteso

- Sia $Y = aX + b$, allora $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$

- Sia a tale che $P(X \geq a) = 1$, allora $E(X) \geq a$
- Sia b tale che $P(X \leq b) = 1$, allora $E(X) \leq b$

- Siano a e b tale che $P(a \leq X \leq b) = 1$, allora $a \leq E(X) \leq b$

- Siano X_A e X_B due variabili casuali, $E(X_A + X_B) = E(X_A) + E(X_B)$

- Siano $X_A, X_B, \ldots$ un insieme finito di variabili casuali, $E(X_A + X_B + \cdots) = E(X_A) + E(X_B) + \cdots$

- Allora, per una combinazione lineare di variabili casuali si ha:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n)$$

Varianza

Consideriamo una variabile casuale X caratterizzata da una densità di probabilità $p(x)$ e da un valore atteso $\mu \equiv E(X)$. La varianza $Var(X)$ della distribuzione di probabilità è definita come:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

Proprietà della varianza

- La varianza è uguale a zero se e solo se esiste un numero reale c tale che $P(X = c) = 1$.
- Sia $Y = aX + b$, allora $Var(Y) = Var(aX + b) = a^2Var(X)$
- Per ogni variabile casuale X, si ha
$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - [E(X)]^2 = E[X^2] - \mu^2$$

Varianza

Siano X_A e X_B due variabili casuali.

Definiamo covarianza delle due variabili casuali:

$$Cov(X_A, X_B) \equiv E\big[\big(X_A - E(X_A)\big)\big(X_B - E(X_B)\big)\big] = E[X_A X_B] - E(X_A)E(X_B)$$

Quindi:

$$Var(X_A + X_B) = E\left[\big(X_A + X_B - E(X_A + X_B)\big)^2\right] =$$
$$= E\left[\big(X_A - E(X_A)\big)^2\right] + E\left[\big(X_B - E(X_B)\big)^2\right] + 2E\big[\big(X_A - E(X_A)\big)\big(X_B - E(X_B)\big)\big]$$

$$Var(X_A + X_B) = Var(X_A) + Var(X_B) + 2\,Cov(X_A, X_B)$$

Varianza

Siano X_A e X_B due variabili casuali indipendenti.

Due variabili casuali sono dette indipendenti qualora la conoscenza dei valori assunti dall'una non influenzi in alcun modo la previsione sui valori che saranno assunti dall'altra. Poiché, per due variabili casuali indipendenti, abbiamo

$$E(X_A \cdot X_B) = E(X_A) \cdot E(X_B)$$

$$Cov(X_A, X_B) = 0$$

Possiamo dunque concludere che la varianza della somma di due variabili indipendenti è uguale alla somma delle varianze delle singole variabili:

$$Var(X_A + X_B) = Var(X_A) + Var(X_B)$$

Densità di probabilità binomiale

La distribuzione binomiale, detta anche distribuzione di Bernoulli, è la probabilità di ottenere k successi in n prove indipendenti.

p: probabilità favorevole all'evento
$q = 1 - p$: probabilità sfavorevole all'evento.

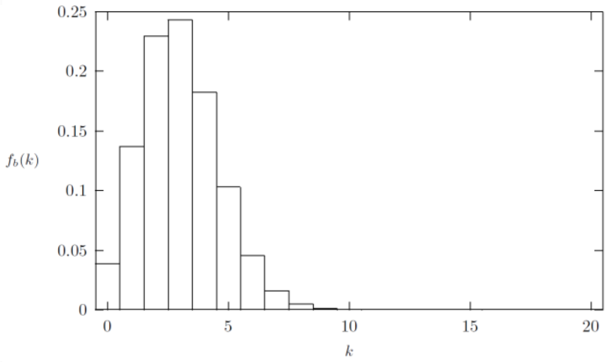
Questa probabilità è data da:

$$f_b(k|n,p) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & per\ \ k = 0, \dots, n \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

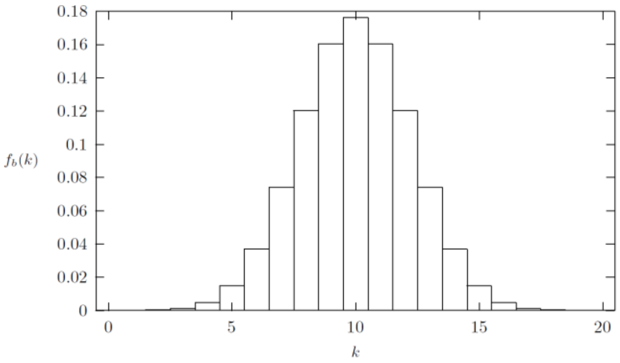
$\mu = np = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ media

$\sigma^2 = npq$ varianza

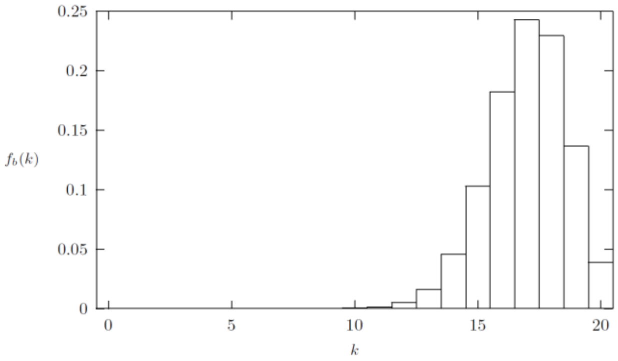
Densità di probabilità binomiale



Densità di probabilità binomiale con p=0.15 e n=20



Densità di probabilità binomiale con p=0.50 e n=20



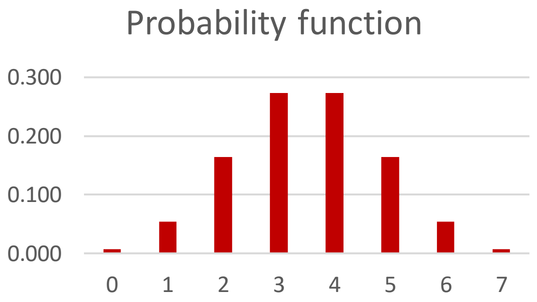
Densità di probabilità binomiale con p=0.85 e n=20

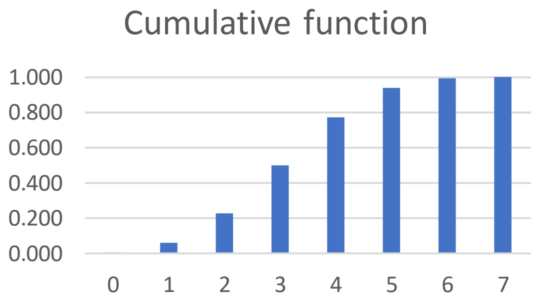
Densità di probabilità binomiale

Esempio: Una moneta è lanciata n =7 volte, studiare la distribuzione di probabilità della variabile binomiale X = numero di volte in cui compare testa. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega = \{C, T\}$.

$p = q =$ 1/2 con $x = 0, \dots, 7$

x	p(x)	Z(x)
0	0.008	0.008
1	0.055	0.063
2	0.164	0.227
3	0.273	0.500
4	0.273	0.773
5	0.164	0.938
6	0.055	0.992
7	0.008	1.000





Esempio: Un partecipante ad una gara di tiro con l'arco colpisce il bersaglio in media con la probabilità dell'80%. Calcolare il numero medio di centri che egli può aspettarsi con 20 tiri e calcolare anche la varianza:

probabilità di colpire p = 80/100 = 4/5

probabilità di non colpire q = 20/100 = 1/5

X = numero di volte in cui centra il bersaglio $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},\ \Omega = \{centro\ colpito, certro\ non\ colpito\}$

Media $\mu = np$ = 20 4/5 = 16

Varianza $\sigma^2 = npq$ = 20 4/5 1/5 = 3.2

Densità di probabilità di Poisson

Se consideriamo le probabilità di un evento che capita molto raramente, utilizzando la distribuzione binomiale, dovremo fare un numero enorme di calcoli considerando probabilità dell'evento e probabilità contraria.

La distribuzione di Poisson, che è una approssimazione della distribuzione binomiale, consente di ridurre il costo computazionale.
Quando n tende a infinito, lasciando fisso np, la distribuzione binomiale tende alla distribuzione di Poisson.
In statistica quest'approssimazione viene solitamente accettata quando $n \geq 20$ e $p \leq 1/20$, oppure quando $n \geq 100$ e $np \leq 10$.

Esempio classico: Nel 1898 Ladislaus von Bortkiewicz pubblicò uno studio (The Law of Small Numbers) nel quale faceva vedere come il numero di soldati dell'esercito prussiano morti fra il 1875 e il 1894 a seguito di un calcio di cavallo, pur variabile da un anno all'altro e da un'armata all'altra, seguisse, in maniera molto fedele, una distribuzione di Poisson.

Densità di probabilità di Poisson

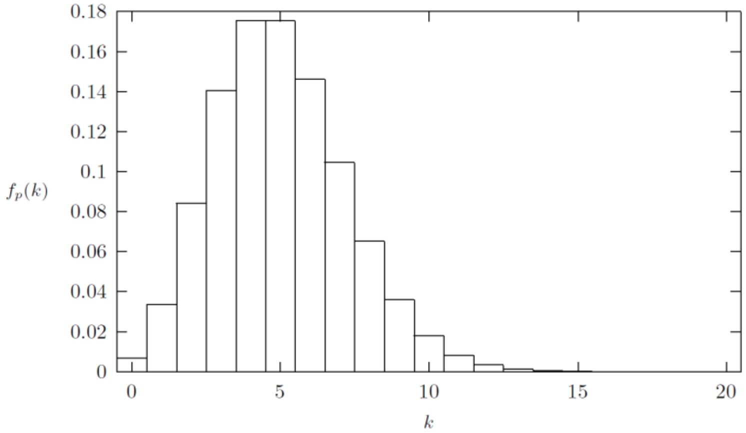
La densità di Poisson è definita da

$$f_p(k|\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) & per \;\; k = 0, 1, \dots \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

dove $\lambda = np > 0$.

$\mu = \lambda$ media

$\sigma^2 = \lambda$ varianza



Densità di probabilità di Poisson con λ=5.

Densità di probabilità di Poisson

Esempio: Nel suo studio, von Bortkiewicz analizzò i verbali di 10 reggimenti relativi ad un periodo di 20 anni, constatando che in totale 122 soldati erano morti a seguito di un calcio di cavallo. Quindi, in media, in ciascun reggimento ogni anno il numero di decessi per calcio di cavallo è stato pari a 0.61 (122/200 dove 200 sono il numero di reggimenti totali).

Consideriamo allora tale frequenza come probabilità **$p = 0.61$**, per un calcio di cavallo **$n=1$, $np = 1 \cdot 0.61 = 0.61$.**

Si calcoli la distribuzione di Poisson con $\lambda=0.61$.

Morti per un calcio di mulo	nessuno	un morto	due morti	tre morti	quattro morti	cinque morti
Numero reggimenti osservati	109	65	22	3	1	0
Numero reggimenti attesi	108.7	66.3	20.2	4.1	0.6	0.1
Probabilità	0.543	0.331	0.101	0.021	0.003	0.000

Densità di probabilità di Poisson

Esempio: La percentuale di pezzi difettosi prodotti da una macchina è, in media, dello 0.2%. Siccome la ditta esporta tali pezzi in confezioni di 1000, calcolare quanti pezzi in più dovranno essere messi in ogni confezione perché la probabilità di avere in una confezione meno di 1000 pezzi efficienti sia inferiore allo 0.01%.

La macchina in media produce 2 pezzi difettosi ogni mille, quindi la probabilità che un pezzo sia difettoso è **p= 0.002.**
Il numero di pezzi per confezione è **n= 1000.**
Essendo **n=1000** molto grande e **p=0.002** molto piccola possiamo approssimare bene utilizzando la distribuzione di Poisson. Costruiamo la variabile aleatoria di Poisson con λ=np=2 per 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... pezzi e vediamo a quale numero corrisponde una probabilità inferiore a 0.01%. Otteniamo una probabilità del:
4.98% di avere 0 pezzi difettosi
13.53% di avere 1 pezzo difettoso
27.07% di avere 2 pezzi difettosi
27.07% di avere 3 pezzi difettosi
36.09% di avere 4 pezzi difettosi
9.02% di avere 5 pezzi difettosi
2.41% di avere 6 pezzi difettosi
0.21% di avere 7 pezzi difettosi
0.005% di avere 8 pezzi difettosi (probabilità che ogni 20 confezioni da 1000 pezzi ve ne sia una con 8 pezzi difettosi) < 0.01%
0.0002% di avere 9 pezzi difettosi (probabilità che ogni 500 confezioni da 1000 pezzi ve ne sia una con 9 pezzi difettosi)
In **ogni confezione di 1000 pezzi vanno aggiunti 8 pezzi per essere ragionevolmente sicuri che la confezione contenga 1000 pezzi efficienti.**

Densità di probabilità di Gauss

- Molte distribuzioni che si incontrano nel mondo reale sono effettivamente di tipo normale, ovvero sono molto ben approssimate da una Normale: la Normale è un modello che descrive adeguatamente la distribuzione di numerosi fenomeni.
- Molte distribuzioni, di per sé anche lontane come forma dalla Normale, magari anche asimmetriche (purché unimodali), sono normalizzabili mediante una trasformazione di variabile (es. $w = \log(x)$).
- In generale si distribuiscono normalmente quei caratteri o fenomeni che sono il risultato di un gran numero di piccoli fattori, tra loro indipendenti (es. variabili biometriche, prodotto di serie, processo di misura, ...).
- I valori prodotti da un processo di misura sono generalmente distribuiti normalmente: misurando ripetutamente lo stesso oggetto, lo strumento non produce sempre lo stesso valore, a causa del cosiddetto errore di misura, risultato della somma di un gran numero di piccoli fattori indipendenti che influenzano il processo.

Densità di probabilità di Gauss

La densità di probabilità di Gauss è definita dalla seguente equazione:

$$f_g(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

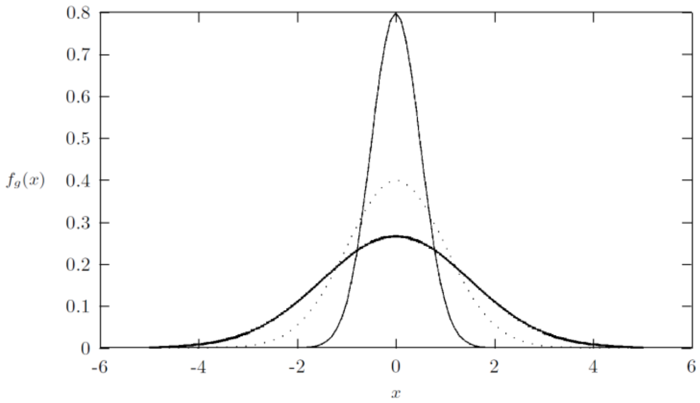
Si può sempre standardizzare la variabile normale: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

La densità normale con media uguale a zero e con varianza uguale a 1, $f_g(z|0,1)$, è chiamata densità normale standard:

$$f_g(z|0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$

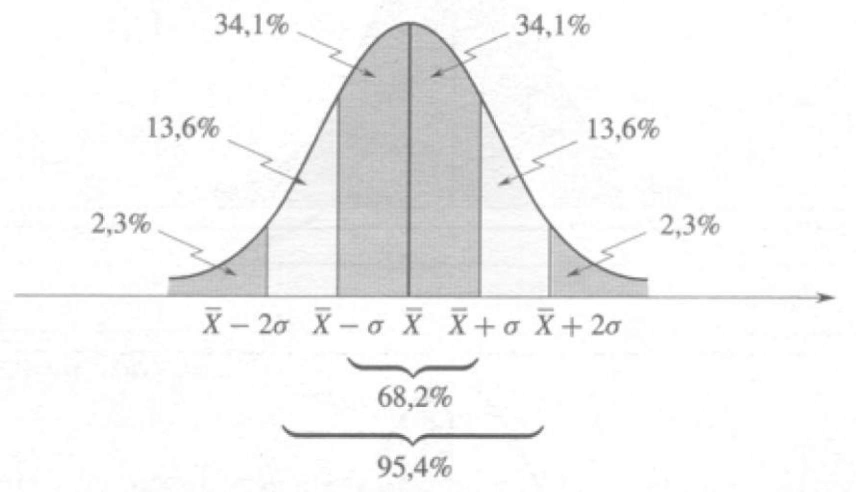
Indichiamo con $\phi_g(z)$ la funzione di ripartizione della densità normale standard:

$$\phi_g(z) = \int_{-\infty}^{z} f_g(t|0,1)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$



Densità di probabilità normale, o gaussiana, con μ = 0. Le tre curve corrispondono a σ = 0.5 (la campana più alta e stretta), a σ = 1 (la densità normale standard) ed a σ = 1.5 (la campana più bassa e larga)

Densità di probabilità di Gauss



Il 68,26% dei valori è compreso fra $\bar{X} - \sigma$ e $\bar{X} + \sigma$.
Il 95,44% dei valori è compreso fra $\bar{X} - 2\sigma$ e $\bar{X} + 2\sigma$.
Il 99,73% dei valori è compreso fra $\bar{X} - 3\sigma$ e $\bar{X} + 3\sigma$.

Densità di probabilità di Gauss

Esempio:

Supponiamo di sapere che il reddito delle famiglie degli studenti dell'Università di Trieste si distribuiscano normalmente con $\bar{X}$=15000 EUR e σ=1500 EUR.

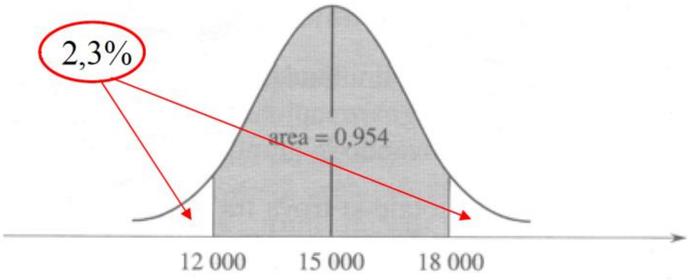
Domande:

- Quante famiglie guadagnano più di 18000 EUR ?
- Se l'ARDIS vuole assegnare una borsa di studio al 2.3% degli studenti meno abbienti, che soglia di reddito massimo deve fissare ?

Osserviamo che:

$\bar{X} - 2\sigma$ = 15000-3000 = 12000

$\bar{X} + 2\sigma$ = 15000+3000 = 18000



- Circa il 2,3% delle famiglie guadagnano più di 18000 EUR.
- La soglia di reddito massimo che l'ARDIS deve fissare è pari a 12000 EUR.

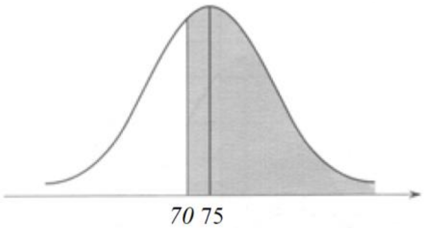
Densità di probabilità di Gauss

Esempio: La velocità delle auto rilevata dall'autovelox su una tangenziale si distribuisce normalmente con $\bar{X}$=75 km/h e σ =8 km/h.

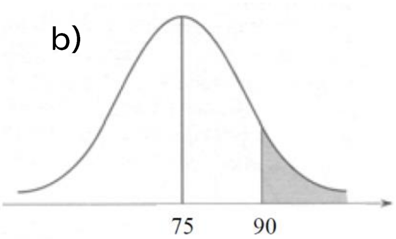
a) Che percentuale di auto superano il limite di velocità di 70 km/h ?

b) A quanti automobilisti su 100 viene ritirata la patente (oltre 90 km/h) ?

a)



b)



a) $z = \frac{x-\bar{X}}{\sigma} = \frac{x-75}{8}$ per x=70 z= -0.625,

Dalle tabelle 1-$\phi_g(-0.625) = \phi_g(0.625)$=(0.7324+0.7357)1/2=0.7341

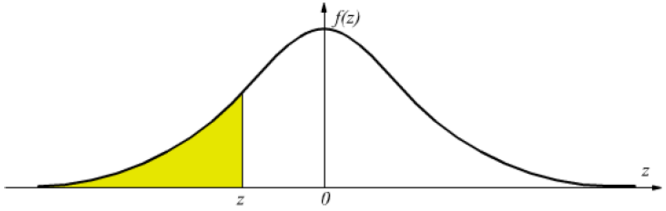
Il 73,41% degli autoveicoli in transito superano il limite di velocità di 70 km/h .

b) $z = \frac{x-\bar{X}}{\sigma} = \frac{x-75}{8}$ per x=90 z= 1.88,

Dalle tabelle 1-$\phi_g(-1.88)$=1-0.9699=0.0301

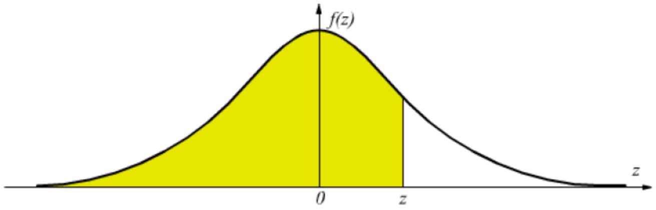
A 3 automobilisti su 100 viene ritirata la patente.

Densità di probabilità di Gauss



Probabilità cumulativa per valori negativi di z

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,001	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,001	0,001
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,002	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,003	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,004	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,006	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,008	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,011
-2,1	0,0179	0,0174	0,017	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,015	0,0146	0,0143
-2	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,025	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,063	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,102	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,123	0,121	0,119	0,117
-1	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,166	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,209	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,242	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,305	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,281	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,33	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,352	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,409	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0	0,5	0,496	0,492	0,488	0,484	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641



Probabilità cumulativa per valori positivi di z

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,999	0,999
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Densità di probabilità Chi-quadro

Si considerano ν variabili aleatorie indipendenti $Y_1, Y_2, \dots, Y_\nu$ distribuite secondo la legge normale con media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$; allora la variabile χ^2 è:

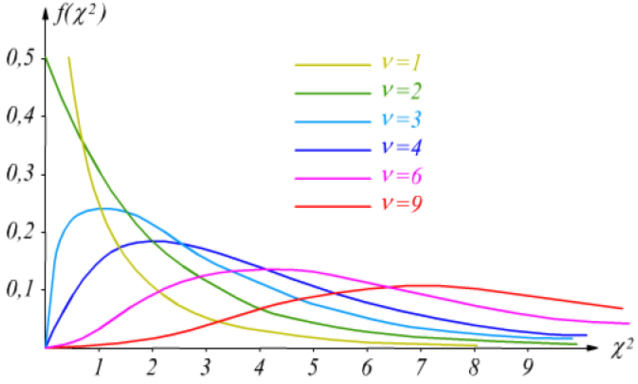
$$\chi^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_\nu^2$$

La variabile χ^2 si distribuisce secondo la:

$$f_{\chi^2}(t|\nu) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} t^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$$

$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)!$ se ν pari

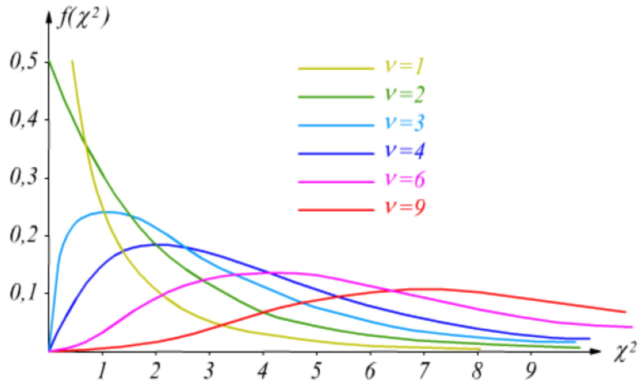
$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(\nu-2)!!}{2^{\frac{\nu-1}{2}}}$ se ν dispari



Densità di probabilità Chi-quadro

Le proprietà fondamentali della distribuzione chi-quadro sono:

- Asimmetria.
- Dipendenza dal parametro intero ν che indica i gradi di libertà: per ogni valore di ν si ha una curva diversa.
- La variabile χ^2 non può assumere valori negativi dato che è una somma di quadrati.
- E' completamente definita nel primo quadrante.



Densità di probabilità Chi-quadro

Sia X una variabile aleatoria con media $E(X) = \mu$ e varianza $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ e sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ un campione casuale.

Si definisce **varianza campionaria** la quantità:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

La **deviazione standard campionaria** è la radice quadrata della varianza campionaria:

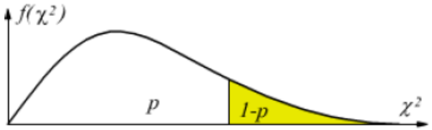
$$s = \sqrt{s^2}$$

La varianza campionaria ha una distribuzione Chi-quadro.

Esempi di applicazioni: tra i test maggiormente conosciuti che utilizzano la distribuzione Chi-quadro ci sono:

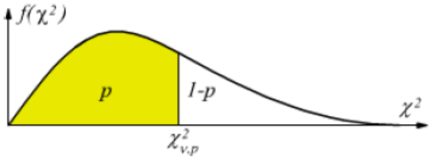
- ❑ Goodness of fit
- ❑ Test dell'indipendenza

Densità di probabilità Chi-quadro



valori critici della coda superiore (1-p) della distribuzione χ^2

v	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	0,45	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,82
3	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	4,35	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,52
6	5,35	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	6,35	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	7,34	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96	26,12
9	8,34	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	9,34	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59



valori critici della coda inferiore (p) della distribuzione χ^2

v	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001
1	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000
2	0,147	0,072	0.051	0.020	0.002
3	0,406	0,244	0,15	0,080	0.024
4	1.064	0,494	0,336	0,206	0.091
5	1.610	1.145	0,577	0,385	0,146
6	2.204	1.635	1.237	0,606	0,265
7	2.833	2.167	1.690	1.239	0,415
8	3.490	2.733	2.180	1.646	0,595
9	4.168	3.325	2.700	2.088	1.152
10	4.865	3.940	3.247	2.558	1.479

Densità di probabilità t-Student

Consideriamo due variabili casuali indipendenti:

Z: distribuita normalmente con media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$
Y: distribuita secondo chi-quadro con ν gradi di libertà.

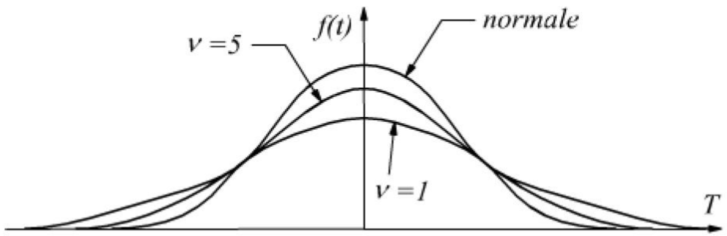
$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y}}$$

ha una distribuzione t-Student con ν gradi di libertà

$$f_S(t|\nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu}B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

dove B è la funzione beta

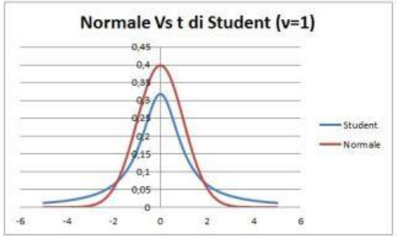
$$B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}$$

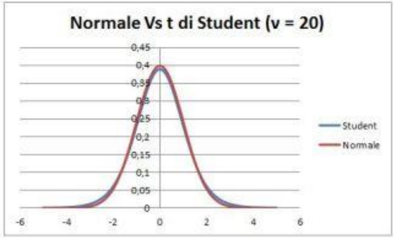


Densità di probabilità t-Student

Le caratteristiche di questa distribuzione sono:

- Simmetria rispetto al valor medio $\mu = 0$.
- Dipendenza dal parametro ν gradi di libertà.
- Tende alla distribuzione normale quando ν tende ad infinito ($\nu \rightarrow \infty$) (già con campioni di 30-50 dati praticamente coincidono).
- Per ogni valore di ν si ha una diversa distribuzione.
- Come nel caso della normale, l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse vale 1.





Densità di probabilità t-Student

Esempi di applicazioni sono test delle ipotesi su:

- **media di una popolazione** di cui non è conosciuta la deviazione standard della popolazione e calcolo dell'intervallo di confidenza

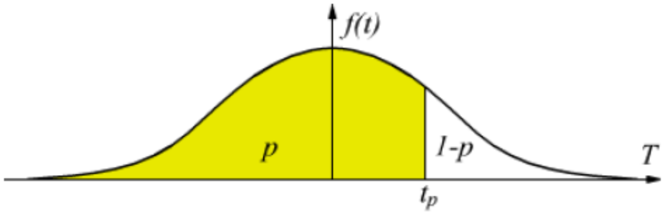
  Nel caso in cui la varianza della popolazione σ^2 non è nota:
  - se il numero n del campione è grande, si può sostituire σ^2 con la varianza del campione s^2
  - se, invece, l'ampiezza del campione è piccolo e tale campione proviene da una distribuzione normale, data una popolazione normale avente media μ da cui si estraggono campioni casuali con ampiezza n, indicando con $\bar{X}$ la media campionaria e con s lo scarto quadratico medio campionario (o deviazione standard campionaria), la variabile

  $$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

  é una variabile aleatoria avente distribuzione t-Student con grado di libertà $\nu = n - 1$.

- **differenza tra due medie**
- **differenza tra due medie di 2 campioni dipendenti**
- **coefficiente di correlazione**

Densità di probabilità t-Student



Distribuzione t di Student P(T<t)=p

v	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	1	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,31	636,62
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	0,765	0,978	1,25	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	0,741	0,941	1,19	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,61
5	0,727	0,92	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,86	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,1	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,297	4,781
10	0,7	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,93	4,318
13	0,694	0,87	1,079	1,35	1,771	2,16	2,65	3,012	3,852	4,221

Due importanti disuguaglianze

Consideriamo una variabile casuale X e indichiamo con $f(x)$ la funzione che ne descrive la densità di probabilità. Supponiamo $P(X \geq 0) = 1$.

Disuguaglianza di Markov

$$E(X) \geq zP(X \geq z) \qquad \forall z > 0$$

Disuguaglianza di Chebyshev

$$P(|X - E(X)| \geq z) \leq \frac{Var(X)}{z^2}$$

La disuguaglianza di Chebyshev è una diretta conseguenza della disuguaglianza di Markov e ha senso solo per le densità di probabilità per cui la varianza esiste.

Probabilità che i dati sperimentali differiscano dal valor medio per più di una fissata quantità

Dalla disuguaglianza di Chebyshev segue immediatamente che

$$P(|X-\mu| \geq n\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{n^2\sigma^2} = \frac{1}{n^2}$$

La probabilità che una misura differisca dal valore atteso per più di

- ❑ σ è certamente minore o uguale al 100%
- ❑ 2σ è certamente minore o uguale al 25%
- ❑ 3σ è certamente minore o uguale al 11%

Probabilità che i dati sperimentali differiscano dal valor medio per più di una fissata quantità

Se la densità della variabile casuale è normale, la probabilità che una misura cada in un intervallo di semiampiezza

- 3σ intorno alla media è pari a $\phi_g(3) - \phi_g(-3)$ = 0.9987 – (1 – 0.9987) = 0.9974
- 2σ intorno alla media è pari a $\phi_g(2) - \phi_g(-2)$ = 0.9773 – (1 – 0.9773) = 0.9546

Questo significa chela probabilità che una misura differisca dal valore atteso per più di

- 2σ è certamente minore o uguale al 4.5%
- 3σ è certamente minore o uguale al 0.3%

La disuguaglianza di Chebyshev fornisce dunque una valutazione per eccesso di tali probabilità, la sua utilità sta nella sua grande generalità.

Valore atteso e varianza della media di una serie di osservazioni

Consideriamo n variabili casuali indipendenti $X_1, \dots, X_n$ tutte provenienti dalla stessa distribuzione teorica con media μ e varianza σ^2.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(\bar{X}_n) = \mu$$

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Valore atteso e varianza della media di una serie di osservazioni

Numero minimo di osservazioni

Osserviamo che, applicando la disuguaglianza di Chebyshev alla variabile casuale rappresentata dalla media del campione, $\bar{X}_n$, troviamo che, per ogni numero reale z maggiore di zero,

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq z) \leq \frac{\sigma^2}{nz^2}$$

Esempio: Sia $\sigma = 3$, espressa nell'unità di misura della grandezza che stiamo osservando; desideriamo che sia minore o uguale all'1 per cento la probabilità che la media aritmetica delle misure si discosti dal valore atteso per più di un'unità

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq 1) \leq \frac{9}{n} \leq 0.01$$

$$n \geq 900$$

Se conoscessimo la particolare densità di probabilità che caratterizza le nostre misure, scopriremmo che 900 è una valutazione per eccesso e che, per ottenere il risultato desiderato, è sufficiente un valore più piccolo di n.

Legge dei Grandi Numeri

Supponiamo che $X_1, X_2, \dots, X_n$ sia un campione casuale proveniente da una densità di probabilità con media μ e varianza finita σ^2.

Consideriamo la variabile casuale $\bar{X}_n$ che rappresenta la media aritmetica del campione casuale:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

La Legge dei Grandi Numeri asserisce che

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu \quad \text{per } n \to \infty$$

Legge dei Grandi Numeri

Dimostrazione:

Per ogni n finito,

$$E(\bar{X}_n) = \mu \quad \text{e} \quad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Applicando la disuguaglianza di Chebyshev:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) = 1 \;\; \text{equivalente a} \;\; \bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu \quad \text{per } n \to \infty.$$

Teorema del Limite Centrale

Consideriamo un insieme di variabili casuali $X_1, \dots X_n$, indipendenti ed identicamente distribuite, quindi provenienti dalla medesima densità di probabilità con valore atteso μ e varianza finita σ^2.
Allora

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \leq t\right] = \phi_g(t) \qquad \forall t \in \Re$$

con

$$\phi_g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du = P(X \leq t)$$

densità di probabilità gaussiana dove

$$X = \frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Teorema del Limite Centrale

Nessuna ipotesi relativa alla natura della densità di probabilità da cui proviene il campione casuale: può essere qualunque (sia continua che discreta).

Unico vincolo: la densità di probabilità da cui proviene il campione casuale ha varianza finita.

Se un campione casuale proviene da una qualunque distribuzione, non necessariamente nota, la densità di probabilità della media aritmetica $\bar{X}_n$ approssimerà sempre meglio (al crescere di n) una densità di probabilità gaussiana con media μ e varianza σ^2/n.

Soglia di applicabilità: $n \geq 50$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di

Ingegneria e Architettura