UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di misure meccaniche, termiche e collaudi

Prof. Lucia Parussini
Prof. Rodolfo Taccani

a.a.2021-2022

Outline

- Introduzione
- Errore
  - Errori sistematici
  - Errori casuali
- Incertezza

Introduzione

Il **risultato di una misurazione** è solo una **approssimazione** o una **stima** del valore associato alla grandezza oggetto della misurazione, ovvero il **misurando**.

Motivi:

- La definizione del misurando può non descrivere completamente la realtà fisica (il modello matematico può essere incompleto).
- Il processo di misura modifica il misurando (nelle misure industriali questo viene trascurato).
- I campioni che si utilizzano nel confronto non sono ideali (campioni sempre migliorabili); non forniscono il valore esatto delle unità di misura ma solo una loro (buona) approssimazione.
- Il metodo di misura sfrutta, generalmente, un fenomeno fisico, che può non essere completamente noto.
- Generalmente il metodo non considera altri fenomeni che possono interferire con quello utilizzato.

Introduzione

Il **risultato di una misurazione** è solo una **approssimazione** o una **stima** del valore associato alla grandezza oggetto della misurazione, ovvero il **misurando**.

Motivi:

- Il principio operativo impiegato differisce da quello ideale a causa di: componenti non ideali, rumore generato internamente allo strumento stesso, sensibilità alle condizioni ambientali, taratura inadeguata, età, ecc.
- I dispositivi utilizzati non sono ideali.
- Capacità ed esperienza dell'operatore hanno un ruolo fondamentale nel processo di misura. (Es: esecuzione della misura al "momento giusto", valutazione della posizione di un indice su una scala graduata, corretta interpretazione dei risultati di una misura, elaborazioni corrette delle letture degli strumenti, ecc.)

Introduzione

Il **risultato di una misurazione** è solo una **approssimazione** o una **stima** del valore associato alla grandezza oggetto della misurazione, ovvero il **misurando**.

Motivi:

- Procedimento software:
  - L'errore dovuto al procedimento è legato ad approssimazioni ed assunzioni tipiche del metodo, dove spesso si fanno delle ipotesi semplificative.
  - L'errore del software è legato agli algoritmi matematici utilizzati per il calcolo.
- Sollecitazioni meccaniche, disturbi elettromagnetici, condizioni ambientali (ad es. la temperatura) *(grandezze di influenza)* influenzano tutto il processo di misura in modo imprevedibile

Introduzione

Se il processo di misura è ripetuto un certo numero di volte, i risultati ottenuti sono sempre differenti, anche se le condizioni di misura non sono cambiate. Se il processo di misura è ripetuto da un altro operatore, con strumenti differenti, i risultati della misura possono essere differenti (anche riproducendo le stesse condizioni di misura).

Ecco perché esprimere il risultato di una misura con un solo valore (e un'unità di misura) è privo di significato!

Parametro	Numero	Incertezza	u.d.m.
Temperatura al suolo	297	± 1	K
Massa a vuoto	1244	± 2	kg
Lunghezza corridoio	20,0	± 0,1	m

Introduzione

Per determinare la qualità della misura ottenuta e per rendere significativo il confronto della misurazione effettuata con altre misurazioni della stessa grandezza è necessario associare alla misura un valore, detto **incertezza di misura**, che descrive il grado di accuratezza e precisione con cui la grandezza è nota.

L'incertezza di misura è definita da norme internazionali recepite dagli istituti di normazione nazionali.

In Italia l'Ente di riferimento è l'Ente Nazionale di Normazione (UNI) che ha approvato la norma "Guida all'espressione dell'incertezza di misura", UNI CEI ENV 13005:2000 (traduzione italiana della ISO "Guide to the expression of uncertainty in measurement" GUM), alla quale ogni certificazione di misura deve attenersi.

Errore di misura e ***incertezza di misura***, per quanto indichino quantità evidentemente connesse, in teoria della misura sono due concetti ben distinti.

Errore

Errore di misura [VIM3] 2.16 la differenza tra **un "valore vero"** di una grandezza e la sua misura.

Indicando con M il valore della misura, con V il suo valore vero, l'errore E è dato da:

$$E = M - V$$

Dalla sua definizione ricaviamo che l'errore è una grandezza con segno e che è associata ad una ben identificata misura. In altre parole, due misurazioni della stessa grandezza effettuate anche una immediatamente dopo l'altra possono avere errori completamente differenti.

In valore relativo si ha l'errore relativo definito come:

$$e\% = 100\frac{M - V}{V} = 100\frac{E}{V}$$

Errore

Valore vero (di una grandezza) [VIM3] 2.11
Valore compatibile con la definizione di una data grandezza in senso determinato.
Note:
Esso è un valore che sarebbe ottenuto da una misurazione perfetta.
I valori veri sono per natura indeterminati.

Valore convenzionalmente vero (di una grandezza) [VIM3] 2.12
Valore attribuito ad una grandezza in senso determinato ed accettato, a volte per convenzione.

Si noti che essendo ignoto il valore vero della grandezza anche *l'errore di misura è in grandezza inconoscibile.*

L'errore è un **concetto idealizzato**; gli errori non possono essere conosciuti esattamente.

Errore

Nella definizione di errore si è usato l'articolo indeterminativo per sottolineare la circostanza che una grandezza può avere più "valori veri" ammissibili del misurando.

Esempio: si consideri la misurazione della lunghezza di un tavolo. All'aumentare della precisione della misura, ad esempio al di sotto del decimo di millimetro, il bordo del tavolo avrà una forma frastagliata e quindi ci saranno molti valori compatibili con la definizione di lunghezza del tavolo.

Esempio: misurazione dell'accelerazione di gravità g, grandezza compatibile con più valori veri; infatti g, oltre a dipendere dal punto della terra dove si esegue la misurazione dipende anche dall'effetto maree generato dalla luna e dal sole.

Errore

Errori casuali

Tempo di reazione nel far partire o fermare l'orologio: può essere sia in eccesso che in difetto (ad esempio partenza e arrivo), quindi l'errore può avere segno positivo o negativo.

Errori sistematici

Vanno sempre nella stessa direzione. Possono essere legati allo strumento. Ad esempio il cronometro può misurare sempre un tempo con un certo errore percentuale.

Errori aleatori

Gli errori casuali (stocastici, aleatori) sono presumibilmente originati da variazioni non prevedibili o casuali, nel tempo e nello spazio, delle grandezze di influenza.

Gli effetti di tali variazioni, effetti casuali, danno luogo a variazioni in osservazioni ripetute del misurando.

Benché non sia possibile correggere l'errore casuale del risultato di una misurazione, è tuttavia possibile ridurlo aumentando il numero di osservazioni; la sua speranza matematica o valore atteso o valor medio, è zero.

Errore casuale [VIM3] 2.19
componente dell'errore di misura che nelle misurazioni ripetute varia in modo imprevedibile.

Errori sistematici

L’errore sistematico non può essere sempre eliminato ma sovente può essere notevolmente ridotto.

Se una grandezza di influenza produce sul risultato di una misurazione un effetto identificato in un errore sistematico, tale effetto può essere quantificato e, se di proporzioni significative rispetto all’accuratezza richiesta alla misurazione, compensato apportando una correzione o fattore di correzione.

Si ipotizza che, a seguito della correzione, il valore atteso dell’errore generato da un effetto sistematico sia zero.

Errore sistematico [VIM3] 2.17
componente dell'errore di misura che nelle misurazioni ripetute rimane costante o varia in modo prevedibile.

Errori grossolani

Sono dovuti in genere a disattenzione e sviste dell'operatore (registrazione o analisi dei dati, scelta di metodi e strumenti) o a guasti dello strumento.

Possono introdurre un errore rilevante ed ignoto nel risultato di una misurazione.

Normalmente sono di ampiezza tale da essere immediatamente riconoscibili e rivelate da un'accurata revisione dei dati; sviste minori possono essere mascherate da variazioni casuali, o apparire tali.

Le valutazioni dell'incertezza non sono concepite per tenere conto di tali errori.

Correzioni degli errori aleatori e sistematici

L'errore casuale si può ridurre aumentando il numero di osservazioni.

L'errore sistematico si può correggere perché è modellizzabile, in base a:

- conoscenze sul comportamento dei sistemi che intervengono nella misurazione;
- conoscenza dell'effetto delle grandezze di influenza.

Per questi errori si può correggere il risultato sulla base del modello (se la componente di errore è significativa).

Esempio: "errori" di consumo degli strumenti (carico strumentale).

Correzioni degli errori aleatori e sistematici

Correzione [VIM3] 2.53 compensazione di un effetto sistematico stimato

Può essere un valore **aggiunto** algebricamente al risultato bruto di una misurazione per compensare l'errore sistematico o un fattore numerico per il quale il risultato bruto di una misurazione viene **moltiplicato** per compensare l'errore sistematico.

$$V = M + C$$
$$V = CM$$

Nota: Dato che l'errore sistematico non può essere conosciuto perfettamente, la compensazione non può essere completa. Il risultato di una misurazione, anche se corretto per gli effetti sistematici identificati, è ancora una **stima** del valore del misurando a causa dell'incertezza originata dagli effetti casuali e dalla non perfetta correzione del risultato per gli effetti sistematici.

Incertezza

VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA Norma UNI CEI 13005 – Guida all'espressione dell'incertezza di misura – GUM

Incertezza di misura [VIM3] 2.26

parametro non negativo che caratterizza la dispersione dei valori delle quantità attribuite a un misurando, in base alle informazioni utilizzate.

L'incertezza di misura fa parte di un risultato di misurazione. Le "informazioni utilizzate" nella definizione sono le informazioni ottenute dall'esecuzione della misurazione.

Il parametro può essere, per esempio, una deviazione standard chiamata incertezza di misura standard (o un suo multiplo specificato), o la semilarghezza di un intervallo, con una probabilità di copertura dichiarata.

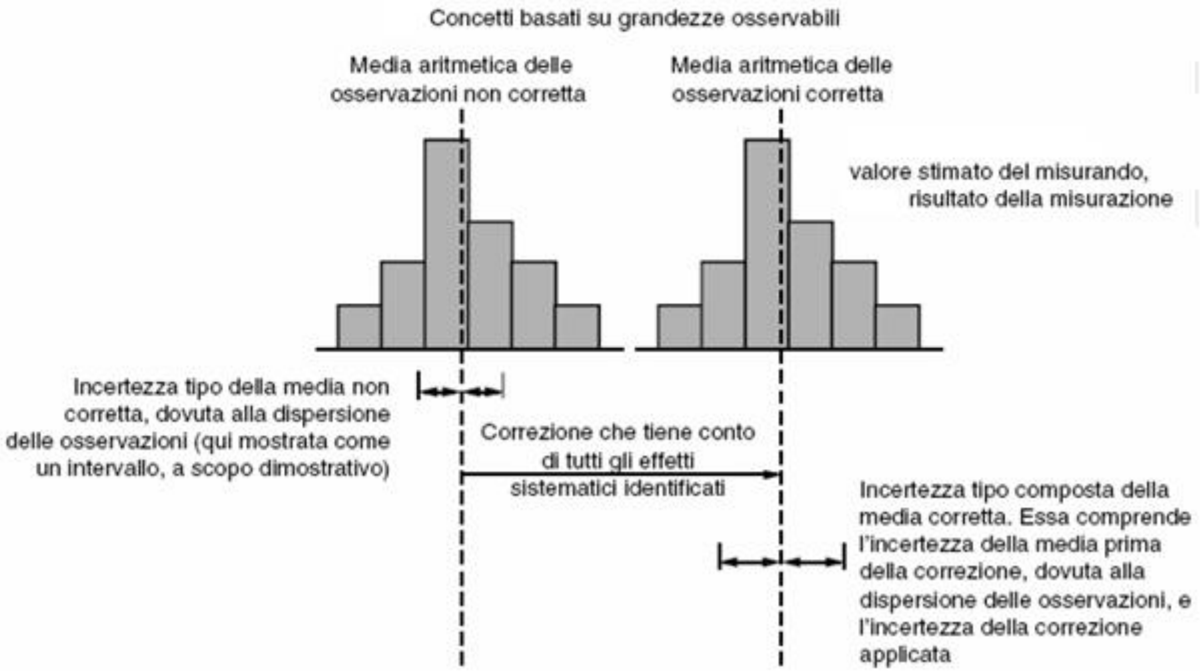
Incertezza

VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA Norma UNI CEI 13005 – Guida all'espressione dell'incertezza di misura – GUM

Incertezza di misura

L'incertezza di misura comprende, in generale, molti componenti. Alcune di queste possono essere valutate dalla valutazione di tipo A dell'incertezza di misura dalla distribuzione statistica dei valori delle quantità da serie di osservazioni e possono essere caratterizzate da deviazioni standard. Le altre componenti, che possono essere valutate dalla valutazione di tipo B dell'incertezza di misura, possono anche essere caratterizzate da deviazioni standard, valutate da funzioni di densità di probabilità basate sull'esperienza o altre informazioni.

Incertezza


Concetti basati su grandezze osservabili
Media aritmetica delle osservazioni non corretta
Media aritmetica delle osservazioni corretta
valore stimato del misurando, risultato della misurazione
Incertezza tipo della media non corretta, dovuta alla dispersione delle osservazioni (qui mostrata come un intervallo, a scopo dimostrativo)
Correzione che tiene conto di tutti gli effetti sistematici identificati
Incertezza tipo composta della media corretta. Essa comprende l'incertezza della media prima della correzione, dovuta alla dispersione delle osservazioni, e l'incertezza della correzione applicata

Incertezza TIPO A

Sono considerate n_i osservazioni ripetute indipendenti della grandezza x_{iq} eseguite nelle stesse condizioni sperimentali.

Si immagina una popolazione virtuale infinita di valori, pertinenti alla grandezza x_{iq} da cui sono stati estratti, quelli della serie di valori ottenuti nelle n_i osservazioni (campione).

Incertezza TIPO A

La stima del valore sperato o del valore medio della popolazione infinita è la media aritmetica delle osservazioni

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} x_{iq}$$

Lo scarto tipo sperimentale s_i, stima dello scarto quadratico medio della popolazione infinita σ_i, e' dato da:

$$s_i = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} \left(x_{iq} - \bar{x}_i\right)^2}{n_i - 1}}$$

dove $\nu = n_i - 1$ sono i gradi di libertà

La miglior stima dello scarto tipo sperimentale della media che rappresenta l'incertezza tipo $u_{\bar{x}_i}$ della media $\bar{x}_i$ è data da:

$$u_{\bar{x}_i} = s_{\bar{x}_i} = \frac{s_i}{\sqrt{n_i}}$$

Incertezza TIPO A

In conclusione:

Per le incertezze di categoria A sono dunque fornite:

- la media aritmetica $\bar{x}_i$, come stima del valore sperato
- l'incertezza tipo $u_{\bar{x}_i}$, come stima dello scarto quadratico medio campionario della media $s_{\bar{x}_i}$

L'incertezza può essere data in valore assoluto $u_{\bar{x}_i}$ o relativo espresso come:

$$\frac{u_{\bar{x}_i}}{\bar{x}_i}$$

Incertezza TIPO A

Esempio:

Misurazioni di resistenza ripetute sullo stesso oggetto

Si vuole determinare l'incertezza tipo da attribuire al risultato di una misurazione di resistenza effettuata con metodo e strumentazione d'incertezza trascurabile rispetto a quella legata alle condizioni di misurazione.

Sono state eseguite n=12 misurazioni ottenendo i valori riportati nella seguente tabella:

n	R (Ω)
1	99.98
2	99.93
3	100.23
4	100.09
5	100.20
6	99.98
7	99.93
8	100.20
9	99.90
10	100.03
11	100.06
12	99.94

L'incertezza tipo può essere determinata con una **valutazione di categoria A.**

Incertezza TIPO A

Esempio:

La miglior stima del misurando è data dal valore medio dei risultati delle misurazioni:

$$\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} R_q = 100.04\Omega$$

Lo scarto tipo sperimentale si ottiene con la seguente espressione:

$$u(R) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n}\left(R_q - \bar{R}\right)^2}{n-1}} = 11.7 \cdot 10^{-2}\ \Omega$$

L'incertezza tipo assoluta (scarto tipo della media) si ricava dalla precedente:

$$u(\bar{R}) = \frac{u(R)}{\sqrt{n}} = 3.39 \cdot 10^{-2}\ \Omega$$

In valore relativo, l'incertezza tipo può essere determinato con la relazione $u(\bar{R})/\bar{R} = 0.34 \cdot 10^{-3}$

Risultato:

$$(100.04 \pm 0.03)\Omega$$

dove $0.03\ \Omega$ è l'incertezza tipo

Incertezza TIPO B

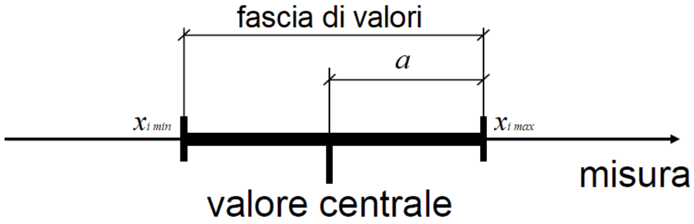
La grandezza NON è ottenuta con osservazioni ripetute, e la sua distribuzione è valutata *a priori* sulla base di:

- dati di misurazioni precedenti
- esperienza dell'operatore
- specifiche tecniche del costruttore
- dati forniti in certificati di taratura

Incertezza TIPO B

Bisogna quindi indagare sul tipo di distribuzione di probabilità che assume la variabile nell'intervallo dichiarato o conosciuto che può essere espresso:

- come semiampiezza a dell'intervallo intorno al valore misurato x_i
- come valore massimo e valore minimo $x_{i\,min}$ e $x_{i\,max}$



Nel primo caso la stima del valore sperato è il valore misurato.

Nel secondo caso si calcola come valore medio: $\bar{x}_i = \frac{x_{i\,min}+x_{i\,max}}{2}$

Il valore sperato sarà pari a quello centrale dell'intervallo.

La valutazione quindi dipende da come viene fornito l'intervallo dichiarato dal costruttore, dal certificato di taratura, etc.

Incertezza TIPO B

Noti gli estremi dell'intervallo massimo di variazione del valore bisogna valutare l'incertezza, intesa come stima dello scarto quadratico medio campionario della media, a seconda della distribuzione di probabilità con cui si suppone sia distribuito il misurando all'interno dell'intervallo.

Normalmente si usano:

- ❑ Distribuzione rettangolare
- ❑ Distribuzione trapezoidale
- ❑ Distribuzione triangolare
- ❑ Distribuzione normale

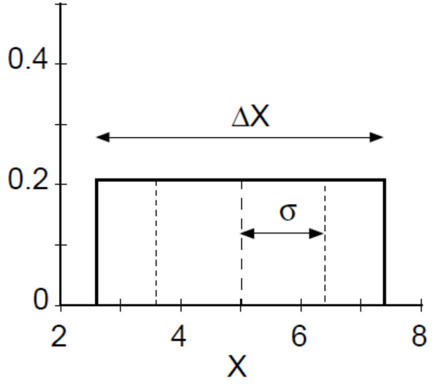
Incertezza TIPO B

Distribuzione rettangolare

Tutti i valori x_i che una variabile causale X può assumere nell'intervallo di valori dichiarato sono ugualmente probabili. L'andamento della distribuzione di probabilità è rettangolare.

Si dimostra che la stima dello scarto quadratico medio campionario della media, e quindi l'incertezza tipo della media, è pari a:

$$u_{\bar{x}_i} = \frac{x_{i\,max} - x_{i\,min}}{2\sqrt{3}}$$



Incertezza TIPO B

Distribuzione trapeizoidale

Un'altra possibilità è che spesso è più realistico trovare i valori x_i vicino al valore medio che in prossimità degli estremi. L'andamento della distribuzione di probabilità è trapeizoidale.

Si dimostra che la stima dello scarto quadratico medio campionario della media, e quindi l'incertezza tipo della media, è pari a,

$$u_{\bar{x}_i} = \frac{(x_{i\,max} - x_{i\,min})\sqrt{1+\beta^2}}{2\sqrt{6}}$$

con β compreso tra zero ed uno.

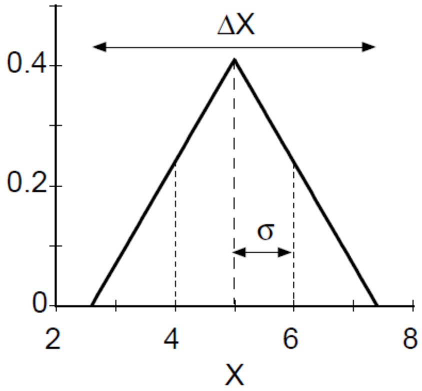
Incertezza TIPO B

Distribuzione triangolare

Per $\beta = 0$ si ha una distribuzione triangolare (per $\beta = 1$ si ha la distribuzione rettangolare).

Si dimostra che la stima dello scarto quadratico medio campionario della media, e quindi l'incertezza tipo della media, è pari a:

$$u_{\bar{x}_i} = \frac{(x_{i\,max} - x_{i\,min})}{2\sqrt{6}}$$

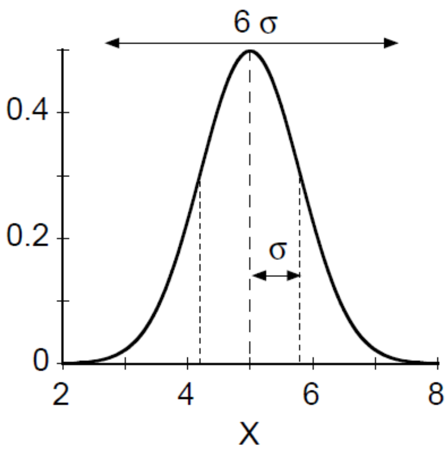


Incertezza TIPO B

Distribuzione normale

La stima dello scarto quadratico medio campionario della media, e quindi l'incertezza tipo della media, è pari a:

$$u_{\bar{x}_i} = \frac{(x_{i\,max} - x_{i\,min})}{2}$$



Incertezza TIPO B

Esempio:

Misurazione di una corrente continua con amperometro analogico

Si vuole determinare l'incertezza tipo da attribuire al risultato della misurazione di una corrente continua effettuata con una sola lettura per mezzo di uno strumento analogico. Le caratteristiche dello strumento usato sono quelle riportate nella tabella seguente:

Caratteristiche dell'amperometro

Tipo	Magneto elettrico
Portata	2 A
Classe	1
Fondo scala	100 divisioni

La lettura è stata pari a 88.5 divisioni corrispondenti a 1.770 A.

Incertezza TIPO B

Esempio:
Si stabilisce di esprimere l'incertezza del risultato in termini di sola incertezza strumentale non essendo d'interesse la variabilità del misurando.
In base all'indice di classe e alla portata dello strumento, si può determinare il massimo scostamento assoluto in tutti i punti della scala, che è dato da:

$$a = \frac{1 \cdot S}{100} = \frac{1 \cdot 2}{100} = 0.02\ A$$

essendo:
1 la classe dello strumento ed S il valore di fondo scala in unità fisiche

L'incertezza tipo assoluta $u(I)$ può essere allora valutata assumendo una distribuzione rettangolare:

$$u(I) = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{0.02}{2\sqrt{3}} = 0.0058\ A$$

L'incertezza tipo relativa è $\frac{u(I)}{I} = \frac{0.0058}{1.770} = 0.0033\ (0.33\%)$

Risultato: $(1.770 \pm 0.06)A$ dove 0.06 A è l'incertezza tipo.

Incertezza composta

L'incertezza del risultato di una misurazione consiste in genere delle due componenti di categoria A (quelle valutate per mezzo di metodi statistici) e B (quelle valutate mediante altri metodi) che vanno composte quadraticamente:

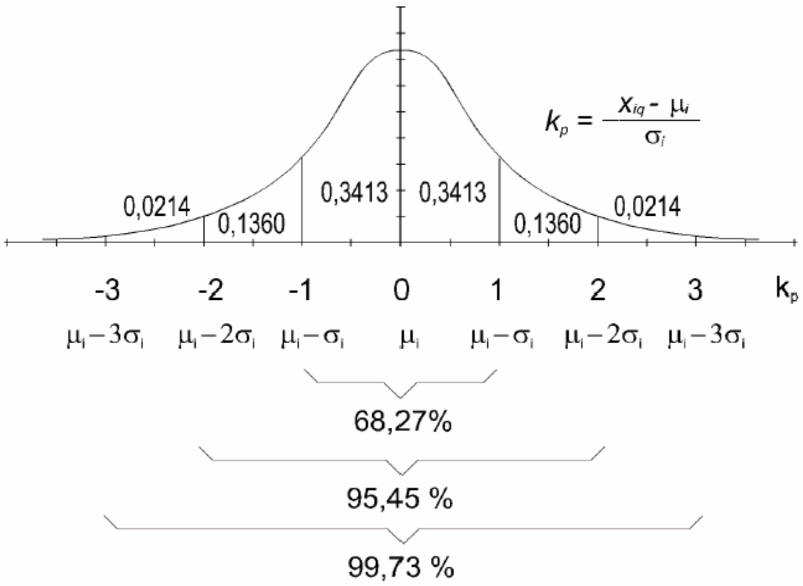
$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ incertezza assoluta composta

Incertezza estesa

In molte applicazioni commerciali, industriali e normative si preferisce definire un intervallo più ampio $U(y)$ intorno al risultato y della misurazione, in modo che vi siano compresi una più grande parte dei valori (livello di confidenza 95%, 99%) che ragionevolmente possono attribuirsi al misurando.

Questo intervallo, denominato incertezza estesa (globale) U, si ottiene moltiplicando l'incertezza tipo composta u per un opportuno fattore di copertura k (compreso fra 2 e 3) dipendente dalla distribuzione.

Per distribuzione normale a 95% corrisponde k =1,96



Propagazione delle incertezze nelle misure indirette

Nella maggior parte dei casi il misurando non viene misurato direttamente, ma viene determinato tramite un certo numero n di grandezze $X_1, X_2, \dots, X_n$ ("grandezze di ingresso"), attraverso una relazione funzionale f:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

- ❑ Individuare il modello della misurazione
- ❑ Valutare le incertezze delle grandezze di ingresso
- ❑ Calcolare *l'incertezza composta* del misurando

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette

Dato il modello

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots x_m)$$

che lega le m misure delle grandezze $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots x_m$ alla grandezza y, la stima da attribuire alla misura è data da:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots \bar{x}_m)$$

essendo $\bar{x}_i$ le stime dei valori delle grandezze di ingresso.

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette

Grandezze non correlate

Sono definite e note le incertezze tipo $u_{\bar{x}_i}$ delle misure dirette x_i.
Le grandezze x_i sono tutte statisticamente indipendenti.
Le incertezze tipo $u_{\bar{x}_i}$ sono piccole rispetto alle misure x_i e sono quindi trattabili come infinitesimi.
Sono definite e calcolabili le derivate parziali prime di f rispetto alle variabili indipendenti.

L'incertezza tipo composta $u_{\bar{y}}$ è data da:

$$u_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{\bar{x}_i}^2}$$

L'incertezza tipo composta è la radice quadrata positiva della varianza composta $u_{\bar{y}}^2$.

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette

Grandezze non correlate

Esempi ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$, non correlati)

Somma

$$y = x_1 + x_2$$
$$\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$
$$u_{\bar{y}}^2 = u_{\bar{x}_1}^2 + u_{\bar{x}_2}^2$$

Differenza

$$y = x_1 - x_2$$
$$\bar{y} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$
$$u_{\bar{y}}^2 = u_{\bar{x}_1}^2 + u_{\bar{x}_2}^2$$

Prodotto

$$y = x_1 x_2$$
$$\bar{y} = \bar{x}_1 \bar{x}_2$$
$$u_{\%\bar{y}}^2 = u_{\%\bar{x}_1}^2 + u_{\%\bar{x}_2}^2$$

Quoziente

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$
$$\bar{y} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$$
$$u_{\%\bar{y}}^2 = u_{\%\bar{x}_1}^2 + u_{\%\bar{x}_2}^2$$

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette

Grandezze correlate

Sono definite e note le incertezze tipo $u_{\bar{x}_i}$ delle misure dirette x_i.

Le grandezze x_i sono correlate.

Le incertezze tipo $u_{\bar{x}_i}$ sono piccole rispetto alle misure x_i e sono quindi trattabili come infinitesimi.

Sono definite e calcolabili le derivate parziali prime di f rispetto alle variabili indipendenti.

L'incertezza tipo composta $u_{\bar{y}}$ da attribuire alla misura è data da:

$$u_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u_{\bar{x}_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(\bar{x}_i, \bar{x}_j)}$$

dove $u(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ è la covarianza stimata associata a x_i e x_j.

$$u_{p,q} = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{k=1}^{m} (p_k - \bar{p})\,(q_k - \bar{q})$$

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette

Il grado di correlazione è caratterizzato dal coefficiente di correlazione:

$$r(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \frac{u(\bar{x}_i, \bar{x}_j)}{u_{\bar{x}_i} u_{\bar{x}_j}}$$

con $-1 < r(\bar{x}_i, \bar{x}_j) < 1$

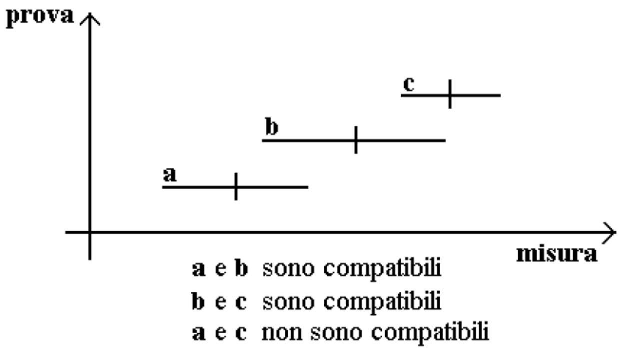
$r(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = 0$ grandezze non correlate
$r(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = 1$ grandezze totalmente correlate

Per esempio se gli strumenti sono della stessa famiglia e sono stati tarati dallo stesso laboratorio si può supporre una correlazione totale, $r = 1$.

Incertezza

Compatibilità delle misure

La presenza dell'incertezza rende impossibile parlare di eguaglianza tra due misure. Questo concetto è sostituito da quello della loro *compatibilità*. Con riferimento alla figura , si verifica compatibilità tra due o più misure quando le fasce di incertezza ad esse associate, effettuate in tempi diversi, in luoghi diversi, da persone diverse, con metodi e strumenti diversi, ma nello stesso stato, cioè nelle stesse condizioni, hanno intersezione non nulla.



Si noti che il concetto di compatibilità non gode della proprietà transitiva: se a è compatibile con b e b è compatibile con c, non necessariamente a è compatibile con c. Vengono definite *mutuamente compatibili* le misure che hanno almeno un elemento in comune entro tutte le rispettive fasce di incertezza.

Incertezza

Nelle valutazioni di conformità

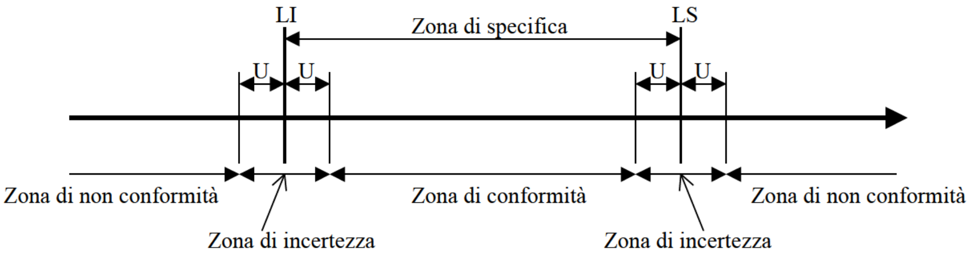
Le misurazioni vengono spesso effettuate per verificare che il risultato ricada entro un intervallo di valori considerato accettabile.

È questo il caso della metrologia industriale, quando sia necessario verificare la conformità a specifiche di prodotti sia nella fase di produzione che in quella di accettazione, e della metrologia legale, quando si debba verificare il rispetto di limiti imposti dalla normativa (p. es. il livello di inquinamento elettromagnetico).

L'inevitabile presenza di incertezza associata al risultato della misura introduce però una situazione di indeterminazione in alcuni casi critici.

Incertezza

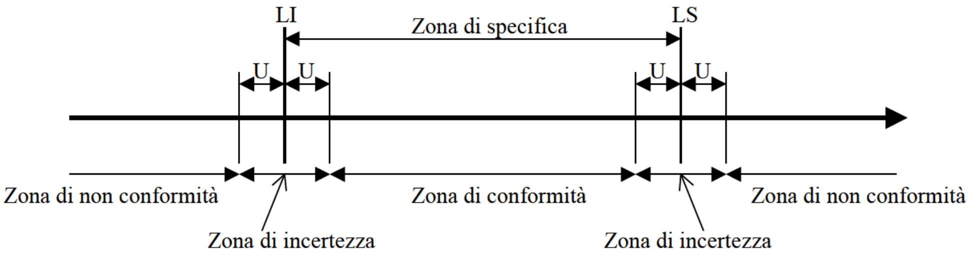
Nelle valutazioni di conformità



- *zona di conformità*: è la zona di specifica ridotta dell'incertezza estesa (se la misura ricade in questa zona, l'esito del confronto è da considerarsi positivo)
- *zona di non conformità*: è la zona al di fuori delle specifiche, comprensiva dell'incertezza estesa di misura (se la misura ricade in questa zona, l'esito del confronto è da considerarsi negativo)
- *zona di incertezza*: è la zona attorno ai limiti delle specifiche, con ampiezza pari al doppio dell'incertezza estesa (se la misura ricade in questa zona, non è possibile stabilire con certezza la conformità o la non conformità)

Incertezza

Nelle valutazioni di conformità



Soltanto opportune indicazioni normative (come quelle previste nella ISO 14253, che riguarda le specifiche dimensionali dei prodotti) o accordi preventivi tra le parti possono definire le azioni da intraprendere quando il risultato di una misura cada all'interno della zona di incertezza.

Cifre significative

Le incertezze devono essere arrotondate ad una o massimo due cifre significative.

Esempio: Si supponga di aver eseguito delle misurazioni ripetute di velocità, ottenendo:
(10.44±0.01285838) m/s
Non ha senso portarsi dietro tutte le cifre ma si deve arrotondare (alla seconda cifra decimale)
(10.44±0.01) m/s

Esempio: Si supponga di aver eseguito delle misurazioni ripetute di resistenza ottenendo:
(10.241254±0.002638) Ω.
Per la rappresentazione del risultato, la norma prescrive, innanzitutto, di arrotondare l'incertezza e di rappresentarla con una sola cifra significativa, visto che le altre sarebbero prive di significato. Arrotondando il valore di incertezza dell'esempio, si ottiene, quindi, 0.003 Ω. A questo punto, osservando l'incertezza, si nota che sul risultato di misura si ha un'indeterminazione che è dell'ordine di grandezza dei mΩ.
Nell'esempio considerato, il modo corretto per esprimere il risultato della misurazione è il seguente: (10.241±0.003) Ω.

Cifre significative

Il numero di cifre significative con cui si scrive il risultato deve essere coerente con il numero che rappresenta l'incertezza.

Non ha senso scrivere:

(10.2±3) kg

(10.2±0.03) kg

Cifre significative

Cifre significative: concetto legato all'approssimazione con cui si sceglie di rappresentare una grandezza.

Errore di arrotondamento $\leq \pm 5 \cdot 10^{-n}$
n = numero di cifre significative utilizzando la notazione scientifica

Esempi:
u = 5.236 tutte cifre significative (4)
u = 5.000 tutte cifre significative (4)
u = 000.5 1 cifra significativa
u = 0.005 1 cifra significativa
u = 1.005 tutte cifre significative (4)
u = 5000 tutte cifre significative (4)

Cifre significative

Esempi:

u = 5000 quante cifre significative (c.s.) ha?

Ricorriamo alla notazione scientifica:

Se interessano solo le migliaia: 1 c.s.
$u = 5 \cdot 10^3$
Se interessano anche le centinaia: 2 c.s.
$u = 5.0 \cdot 10^3$
Se interessano anche le decine: 3 c.s.
$u = 5.00 \cdot 10^3$
Se interessano anche le unità: 4 c.s.
$u = 5.000 \cdot 10^3$

Cifre significative

Regole pratiche

ARROTONDAMENTO:
Per semplificare, si segue la seguente regola per gli arrotondamenti:
le cifre da 0 a 4 comportano un arrotondamento sulla cifra precedente alla stessa unita;
dal 5 al 9 la cifra precedente è arrotondata all'unità superiore.

Esempio:
arrotondamento a 1 c.s.
0.01285838 → 0.01
0.002638 → 0.003
arrotondamento a 3 c.d.
0.01285838 → 0.013
0.002638 → 0.003

Cifre significative

Regole pratiche

SOMMA

Per l'addizione, in presenza di cifre decimali, bisogna mantenere una cifra decimale in più, nel numero più accurato, in rapporto a quella contenuta nel numero meno accurato. Il risultato va arrotondato al numero di cifre decimali pari a quello del numero meno accurato.

Esempio:

2.635 4c.s 3c.d. → 2.64 3c.s 2c.d.

0.9 1c.s 1c.d.

1.52 3c.s 2c.d.

0.7345 4c.s 4c.d. → 0.73 2c.s 2c.d.

$$2.635 + 0.9 + 1.52 + 0.7345 = 5.7895 \rightarrow \; 2.64 + 0.9 + 1.52 + 0.73 = 5.8$$

Cifre significative

Regole pratiche

SOTTRAZIONE

Per la sottrazione, in presenza di cifre decimali, arrotondare il numero più accurato allo stesso numero di cifre decimali di quello meno accurato. Dare il risultato allo stesso numero di cifre decimali del numero meno accurato.

Esempio:

7.6345 5c.s 4c.d. → 7.635 4c.s 3c.d.

0.031 2c.s 3c.d.

$$7.6345 - 0.031 = 7.6035 \rightarrow 7.635 - 0.031 = 7.603$$

Cifre significative

Regole pratiche

PRODOTTO E DIVISIONE

Per la moltiplicazione e divisione arrotondare il numero più accurato ad una cifra significativa in più di quella del numero meno accurato.

Arrotondare il risultato allo stesso numero di cifre significative del numero meno accurato.

Esempio:

1.2 2c.s

6.335 4c.s $\rightarrow$ 6.34 3c.s

0.0072 2c.s

3.14159 6c.s $\rightarrow$ 3.14 3c.s

$$\frac{1.2 \cdot 6.335 \cdot 0.0072}{3.14159} \rightarrow \frac{1.2 \cdot 6.34 \cdot 0.0072}{3.14} \rightarrow 0.0174 \rightarrow 0.017$$

Esempi: e1

Si misurano i lati di un blocchetto di alluminio con un calibro ventesimale. Si ottengono i valori 10.35 mm, 2.20 mm, 3.85 mm. Determinare la misura del volume del blocchetto.

Soluzione

Il volume del blocchetto vale: $V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = 10.35 \cdot 2.20 \cdot 3.85 = 87.66\ \mathrm{mm}^3$

Essendo richiesta la misura del volume, è necessario calcolare anche l'incertezza combinata.

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial l_1} u_{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial l_2} u_{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial l_3} u_{l_3}\right)^2} = \sqrt{\left(l_2 \cdot l_3 \cdot u_{l_1}\right)^2 + \left(l_1 \cdot l_3 \cdot u_{l_2}\right)^2 + \left(l_1 \cdot l_2 \cdot u_{l_3}\right)^2}$$

L'incertezza associata alle misure effettuate con il calibro, avendo a disposizione una singola misura, è calcolabile come incertezza di tipo B. La risoluzione del calibro ventesimale è pari a 0.05 mm. Pertanto l'incertezza associata alle singole misure (distribuzione rettangolare) è pari a:

$$u_{l_1} = u_{l_2} = u_{l_3} = \frac{0.05\ mm}{2\sqrt{3}} = 0.0144\ mm$$

L'incertezza combinata vale dunque:

$$u_V = \sqrt{(2.20 \cdot 3.85 \cdot 0.0144)^2 + (10.35 \cdot 3.85 \cdot 0.0144)^2 + (10.35 \cdot 2.20 \cdot 0.0144)^2} = 0.67\ mm^3$$

Dunque la misura del volume: $(87.7 \pm 0.7) mm^3$

Esempi: e2

Si riportano in tabella i risultati di una serie di misure effettuate con un dinamometro su uno stesso misurando in condizioni note e ripetibili:

[N]	10.5	10	9.7	9.2	10.3	9.5	10.1	10.3	9.7	9.9	9.8	10.2	10.4	9.6	10.1
[N]	10	9.7	10.3	9.5	10.1	10.3	9.7	9.9	9.8	10.2	10.4	9.6	10.1	9.2	10.5

In seguito si utilizza lo stesso strumento per misurare il medesimo misurando, ma in condizioni differenti; si riportano le misure in tabella:

[N]	10.4	10.3	9.7	9.9	10.1	10

Si determini il valore delle due misure secondo la norma UNI 4546. In seguito si esprimano le misure con livelli di confidenza pari al 95% e al 99%.

Soluzione

Per il misurando 1: $n_1 = 30 \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} = 9.953\ N \qquad s_1 = \sqrt{\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2} = 0.362N \quad u_{\bar{x}_1} = \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} = 0.066\ \mathrm{N}$

Dunque la misura della forza è: $(10.0 \pm 0.1)N$

Per il misurando 2: $n_2 = 6 \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} = 10.067\ N \qquad s_2 = \sqrt{\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2} = 0.258N \quad u_{\bar{x}_2} = \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} = 0.105\mathrm{N}$

Dunque la misura della forza è: $(10.1 \pm 0.1)N$

Esempi: e2

Per il misurando 1:

$$(10.0 \pm 0.1)N$$

Per l'incertezza estesa, essendo la cardinalità del campione superiore a 30, possiamo utilizzare l'approssimazione gaussiana.

Per un LC pari al 95%, il relativo quantile è $z_{0.975}$= 1.96, quindi:

$$(10.0 \pm 0.2)N \quad LC\ 95\%\ fc\ 1.96$$

Per un LC pari al 99%, il relativo quantile è $z_{0.995}$= 2.58, quindi:

$$(10.0 \pm 0.3)N \quad LC\ 99\%\ fc\ 2.58$$

Per il misurando 2:

$$(10.1 \pm 0.1)N$$

Per l'incertezza estesa, essendo la cardinalità del campione inferiore a 30, dobbiamo riferirci alla distribuzione t-Student, con $\nu = n_2 - 1 =$ 5.

Per un LC pari al 95%, il relativo quantile è $t_{5,0.975}$ = 2.57, quindi:

$$(10.1 \pm 0.3)N \quad LC\ 95\%\ fc\ 2.57$$

Per un LC pari al 95%, il relativo quantile è $t_{5,0.995}$ = 4.03, quindi:

$$(10.1 \pm 0.4)N \quad LC\ 99\%\ fc\ 4.03$$

Esempi: e3

Si misura la pressione interna di un recipiente mediante un manometro di fondoscala pari a 1 MPa, la cui risoluzione è pari a 1/1000 del fondoscala. Sia la lettura pari a 100 kPa, si esprima la relativa misura. Si esprima quindi la misura con un livello di confidenza del 95% e del 99%.

Soluzione

Per la distribuzione rettangolare

$$u = \frac{r \cdot FS}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.29\ \mathrm{kPa}$$

misura: 100.00 ± 0.29 kPa

Il fattore di copertura per la distribuzione rettangolare al 95% è pari a 1.65:
misura: 100.00 ± 0.48 kPa

Il fattore di copertura per la distribuzione rettangolare al 99% è pari a 1.71:
misura: 100.00 ± 0.50 kPa

Nota: A fattori di copertura maggiori di 1.73 sono invece associati livelli di confidenza superiori al 100%.

Esempi: e4

Si vuole misurare l'accelerazione a_C di un corpo lungo una slitta attuata da un pistone idraulico che imprime una forza costante al corpo stesso (che quindi si muove con moto uniformemente accelerato). La slitta ha una corsa di lunghezza L=0.490 mm, misurata con un metro avente risoluzione $\tilde{r}$ =5 mm. Vengono eseguite 11 prove e si registrano i seguenti tempi di percorrenza della slitta t_S (cioè i tempi con cui il corpo ha percorso la lunghezza L):

t_S [s]	0.222	0.193	0.195	0.193	0.191	0.199	0.197	0.199	0.202	0.198	0.191

Esprimere il valore dell'accelerazione a_C con un livello di confidenza del 95%.

N.B. La legge di moto di un corpo uniformemente accelerato è $x(t) = \frac{1}{2}at^2$

Soluzione

L'espressione dell'accelerazione è:

$$a_C(L, t_S) = \frac{2L}{t_S^2}$$

Per propagare l'incertezza derivo:

$$\frac{\partial a_C}{\partial L} = \frac{2}{t_S^2} \qquad \frac{\partial a_C}{\partial t_S} = -\frac{4L}{t_S^3}$$

Esempi: e4

Da cui si ricava l'espressione dell'incertezza sull'accelerazione:

$$u_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a_C}{\partial L} u_L\right)^2 + \left(\frac{\partial a_C}{\partial t_S} u_{t_S}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t_S^2} u_L\right)^2 + \left(\frac{4L}{t_S^3} u_{t_S}\right)^2}$$

Non resta che ricavare valore medio e incertezza per tempo di percorrenza e lunghezza. Per la lunghezza:

$$u_L = \frac{5}{2\sqrt{3}} = 1.443\ mm$$

Per il tempo di percorrenza utilizziamo gli 11 dati a disposizione:

$$\bar{X}_{t_S} = 0.19818\ s \qquad s_{t_S} = 0.00867\ s \qquad u_{t_S} = \frac{s_{t_S}}{\sqrt{11}} = 0.00261\ s$$

A questo punto abbiamo tutto per calcolare u_a:

$$u_a = \sqrt{\left(\frac{2}{t_S^2} u_L\right)^2 + \left(\frac{4L}{t_S^3} u_{t_S}\right)^2} = 0.6613\ m/s^2$$

Quindi il valore atteso di accelerazione:

$$\bar{X}_a = \frac{2L}{\bar{X}_{t_S}^2} = 24.952 m/s^2$$

Va calcolato il fattore di copertura per l'incertezza estesa: Per un LC pari al 95%, il relativo quantile è $t_{10,0.975} = 2.23$, quindi $\alpha_{95\%} = 2.23$ da cui l'incertezza estesa $u_{e,95\%} = \alpha_{95\%} u_a = 1.4747 m/s^2$

Il risultato è quindi: $a_C = (25.0 \pm 1.5)\ m/s^2$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di

Ingegneria e Architettura