ESAME DI GEOMETRIA - VI APPELLO A.A. 2020/21

Trieste, 16 settembre 2021

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$
Detto W il sottospazio da essi generato, determinare la dimensione di W, una sua base, e un sottospazio supplementare a W.

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & \alpha\\1 & 2\end{pmatrix}$, a coefficienti nel campo K. Determinare i valori del parametro α per cui A è diagonalizzabile nei tre casi $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_3$, e in tali casi scrivere una matrice diagonale simile ad A.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da $f(x_1, x_2, x_3) = (hx_2, -hx_1, hx_3)$, dove h è un parametro reale. Supponiamo $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare canonico. Determinare i valori di h per cui f risulta un'isometria. Per tali valori di h trovare gli autospazi di f e la sua forma normale ortogonale.

4. Verificare che la seguente espressione definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$:
$$b((x, y, z), (x_1, y_1, z_1)) = 2xx_1 + xy_1 + yx_1 + 5yy_1 + zz_1.$$
Rispetto a tale prodotto scalare, determinare la norma di e_1 e una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ avente il normalizzato di e_1 come primo vettore.

5. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali di dimensioni finite. Dimostrare che esistono basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W tali che
$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$