Sia $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Allora x_n è definitivamente diverso da zero e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\alpha}.$$

DIM:

• Proviamo che definitivamente si ha $|x_n| > \frac{1}{2}|\alpha|$. Preso $\varepsilon = \frac{1}{2}|\alpha|$ nella definizione di $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$, si ha che esiste $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \hat{n}$,

$$\alpha - \frac{1}{2}|\alpha| < x_n < \alpha + \frac{1}{2}|\alpha|$$

cioè, se $\alpha > 0$,

$$\frac{1}{2}|\alpha| < x_n < \frac{3}{2}|\alpha|,$$

mentre, se $\alpha < 0$,

$$-\frac{3}{2}|\alpha| < x_n < -\frac{1}{2}|\alpha|.$$

In ogni caso, quindi, si ha $|x_n| > \frac{1}{2}|\alpha|$.

• Fissato $\varepsilon > 0$, si vuole dimostrare che, definitivamente,

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < \varepsilon.$$

Si osservi che, se $n \geq \hat{n}$,

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{|x_n - \alpha|}{|x_n| \cdot |\alpha|} < |x_n - \alpha| \cdot \frac{2}{|\alpha|^2}$$

poiché $\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|\alpha|}$. Nella definizione di limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$, si ha che esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_1$, $|x_n - \alpha| < \varepsilon \cdot \frac{|\alpha|^2}{2}$.

Pertanto si conclude che, se $n \geq \max\{\hat{n}, n_1\}$, si ha

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < |x_n - \alpha| \cdot \frac{2}{|\alpha|^2} < \varepsilon.$$