PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

10 settembre 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Es. 1

Domanda 1

Di un sistema dinamico lineare tempo-invariante, a tempo discreto, descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} x(k+1) & = & A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) & = & C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

è nota la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare l'espressione di A^k facendo uso dei **modi di risposta del sistema**.

A^k utilizzando i modi di risposta

Response Modes

- Without loss of generality we let $k_0 = 0$ and we "expand" matrix $A^{k-k_0} = A^k$ in "matrix partial fractions".
- Clearly
$$\det(zI - A) = \prod_{i=1}^{\sigma} (z - \lambda_i)^{n_i}$$
where $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ are the **distinct** eigenvalues of A and n_i is the **algebraic multiplicity** of such eigenvalues.
- Of course $\sum_{i=1}^{\sigma} n_i = n$.
- It can be shown that:
$$A^k = \sum_{i=1}^{\sigma} \left[A_{i0}\lambda_i^k 1(k) + \sum_{l=1}^{n_i-1} A_{il} k(k-1)\cdots(k-l+1)\lambda_i^{k-l} 1(k-l) \right]$$
where
$$A_{il} = \frac{1}{l!}\frac{1}{(n_i-1-l)!}\lim_{z\to\lambda_i}\left\{ \frac{d^{n_i-1-l}}{dz^{n_i-1-l}}\left[(z-\lambda_i)^{n_i}(zI-A)^{-1}\right]\right\}$$

1° passo: polinomio caratteristico e molteplicità degli autovalori

$$\det(zI - A) = \det \begin{bmatrix} z & -4 & 0 \\ 1 & (z-4) & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = z(z-2)^2$$

$$P_A(z) = z(z-2)^2$$ — $\lambda_1 = 0$ autovalore semplice; $\lambda_2 = +2$ autovalore doppio

Quindi

$$A^k = \sum_{i=1}^{2} A_{i0}\, \lambda_i^k \cdot 1(k) + \sum_{l=1}^{2-1} A_{2l}\, k \cdot \lambda_2^{(k-l)} \cdot 1(k-l)$$

$$= A_{10} \cdot (\lambda_1)^k \cdot 1(k) + A_{20} \cdot (\lambda_2)^k \cdot 1(k) + A_{21} \cdot k (\lambda_2)^{k-1} \cdot 1(k-1)$$

Le matrici A_{10}, A_{20}, A_{21} sono calcolate così $\longrightarrow$

$$A_{10} = \lim_{z \to \lambda_1} \left[(z-\lambda_1)(zI-A)^{-1} \right]$$

$$A_{20} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to \lambda_2} \left\{ \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[(z-\lambda_2)^2 (zI-A)^{-1} \right] \right\}$$

$$= \lim_{z \to \lambda_2} \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z-\lambda_2)^2 (zI-A)^{-1} \right] \right\}$$

$$A_{21} = \lim_{z \to \lambda_2} \left[(z-\lambda_2)^2 (zI-A)^{-1} \right]$$

donc

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z-4}{(z-2)^2} & \frac{4}{(z-2)^2} & 0 \\ \frac{-1}{(z-2)^2} & \frac{z}{(z-2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix}$$

A questo punto

$$A_{10} = \lim_{z \to 0} \begin{bmatrix} \frac{z(z-4)}{(z-2)^2} & \frac{4z}{(z-2)^2} & 0 \\ -\frac{z}{(z-2)^2} & \frac{z^2}{(z-2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \lim_{z \to 2} \begin{bmatrix} z-4 & 4 & 0 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(z-2)^2}{z} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{20} = \lim_{z \to 2} \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 (zI - A)^{-1} \right] \right\} =$$

$$= \lim_{z \to 2} \left\{ \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} z-4 & 4 & 0 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & 0 & (z-2)^2/z \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \lim_{z \to 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(z^2-4)}{z^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In definitiva:

$$A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \delta(k) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 2^k \cdot 1(k) +$$

$$+ \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot k\, 2^{k-1} \cdot 1(k-1)$$