Complementi per il corso di Analisi 1

Prof. Alessandro Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2020/2021

1 La funzione esponenziale

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema. *Dato $a > 0$, esiste un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ tale che, per ogni x_1, x_2,*
(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$,
(ii) $f(1) = a$.
Se inoltre $a \neq 1$, tale funzione è invertibile.

Premettiamo alcune considerazioni, nell'ipotesi che il teorema sia stato verificato. La funzione f si chiama "esponenziale di base a" e si denota con $\exp_a$. Se $a \neq 1$, la funzione inversa $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ si chiama "logaritmo di base a" e si denota con $\log_a$. Si ha quindi, per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in]0, +\infty[$,

$$\exp_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y) .$$

Dalle proprietà dell'esponenziale
(i) $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \exp_a(x_2)$,
(ii) $\exp_a(1) = a$,
seguono le corrispondenti proprietà del logaritmo
(i') $\log_a(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)$,
(ii') $\log_a(a) = 1$.

Siccome la funzione costante $f(x) = 1$ verifica a) e b) con $a = 1$, si ha che $f = \exp_1$; in altri termini, $\exp_1(x) = 1$ per ogni x.

Vediamo dapprima alcune proprietà della funzione esponenziale. Notiamo che $\exp_a(1) = a^1$,

$$\exp_a(2) = \exp_a(1 + 1) = \exp_a(1) \exp_a(1) = a \cdot a = a^2 ,$$

e, come si può vedere per induzione,

$$\exp_a(n) = a^n ,$$

per ogni $n \geq 1$. Inoltre, siccome $\exp_a(1) = \exp_a(1+0) = \exp_a(1) \exp_a(0)$, si ha che $\exp_a(0) = 1$. Per queste analogie con le potenze, spesso si scrive a^x invece di $\exp_a(x)$.

Se scriviamo

$$a = \exp_a(1) = \exp_a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \exp_a\left(\frac{1}{2}\right)\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2,$$

si vede che, essendo l'esponenziale positivo,

$$\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{a}\,.$$

Si verifica poi per induzione che, per ogni $n \geq 1$,

$$\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n\,,$$

e in particolare

$$a = \exp_a(1) = \exp_a\left(n\frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Pertanto, $\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)$ risolve l'equazione $x^n = a$. Tale x è la "radice n-esima di a" e si scrive $x = \sqrt[n]{a}$: si ha quindi

$$\exp_a\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}\,,$$

e pertanto, se $m \in \mathbb{N}$,

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \exp_a\left(m\frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Notiamo che, se $b = \sqrt[n]{a}$, si ha $a^m = (b^n)^m = b^{nm} = (b^m)^n$, da cui $b^m = \sqrt[n]{a^m}$. Possiamo quindi anche scrivere

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

Scrivendo

$$1 = \exp_a(0) = \exp_a(x - x) = \exp_a(x)\exp_a(-x)\,,$$

vediamo che vale inoltre la formula

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}\,.$$

Enunciamo infine le seguenti tre proprietà dell'esponenziale:

$$(ab)^x = a^x b^x\,, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}\,, \quad (a^y)^x = a^{yx}\,.$$

La prima segue dal fatto che la funzione $f(x) = a^x b^x$ verifica la proprietà (i) e $f(1) = ab$, per cui $f = \exp_{ab}$. La seconda è analoga, prendendo $f(x) = \frac{1}{a^x}$; per la terza, si prenda $f(x) = a^{yx}$.

Concludiamo con due utili proprietà del logaritmo:

$$\log_a(x^y) = y\log_a(x)\,, \quad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}\,.$$

Verifichiamo la prima: poniamo $u = \log_a(x^y)$ e $v = \log_a(x)$. Allora $a^u = x^y$ e $a^v = x$, da cui $a^u = (a^v)^y = a^{vy}$. Ne segue che $u = vy$, che è quanto volevasi dimostrare. Un procedimento analogo permette di verificare anche la seconda.

1.1 La costruzione - primo passo

Ci proponiamo di costruire la funzione f avente le proprietà dell'enunciato. Innanzitutto, viene fissato un numero reale $a > 0$, che sarà la "base" della funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ che vogliamo costruire. Se $a = 1$, la costruzione è immediata: basta prendere la funzione costante $f(x) = 1$. Supporremo quindi $a \neq 1$.

Iniziamo definendo la funzione sull'insieme

$$F = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

che è denso in $\mathbb{R}$. Nel caso in cui $m = 1$ e $n \in \mathbb{N}$, possiamo definire

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

per induzione. Se $n = 0$, poniamo $f(1) = a$. Supponendo di averla definita per un certo $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{f\left(\frac{1}{2^n}\right)}\,.$$

Si noti l'uguaglianza

$$\left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{2^n} = a\,,$$

verificabile per induzione. Poniamo ora

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^m,$$

con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo che è una buona definizione. Siano m, n e m', n' tali che $\dfrac{m}{2^n} = \dfrac{m'}{2^{n'}}$: se, per esempio, $n' \geq n$, si vede che

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^{n'}}\right)^{2^{n'-n}},$$

e perciò

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^n}\right)^m = \left(f\left(\frac{1}{2^{n'}}\right)^{2^{n'-n}}\right)^m = f\left(\frac{1}{2^{n'}}\right)^{m2^{n'-n}} = f\left(\frac{1}{2^{n'}}\right)^{m'} = f\left(\frac{m'}{2^{n'}}\right).$$

Quindi, f è ben definita su F, a valori positivi. Ne evidenzieremo alcune proprietà.

Proprietà 1. Si ha

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)\,, \quad \text{per ogni } x_1\,, x_2 \in F\,.$$

Infatti, dati $x_1 = \dfrac{m}{2^n}$ e $x_2 = \dfrac{m'}{2^n}$ (li possiamo prendere con lo stesso denominatore), si ha

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{m}{2^n} + \frac{m'}{2^n}\Big) &= f\Big(\frac{m+m'}{2^n}\Big) = \Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^{m+m'} \\ &= \Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^{m}\Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^{m'} = f\Big(\frac{m}{2^n}\Big) f\Big(\frac{m'}{2^n}\Big) . \end{aligned}$$

Proprietà 2. Se $a > 1$, allora f è strettamente crescente.

In questo caso, infatti, si ha che $f(x) > 1$ per ogni $x \in F$ positivo. Ne segue che

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1) f(x_2 - x_1) > f(x_1) .$$

In modo analogo si vede che, se $a < 1$, allora f è strettamente decrescente.

Proprietà 3. La funzione $f : F \to]0, +\infty[$ è continua. Più precisamente:

> *per ogni* $N \geq 1$ *e ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che,*
> *presi* $x_1, x_2 \in F \cap [-N, N]$, $\quad d(x_1, x_2) \leq \delta \ \Rightarrow\ d(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$.

Per dimostrare questa affermazione, supponiamo $a > 1$ e vediamo dapprima che è

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 .$$

Fissiamo un $\epsilon > 0$; sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \geq (a-1)/\epsilon$. Allora, per ogni $n \geq \bar{n}$,

$$\Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^{2^n} = a \leq 1 + n\epsilon \leq 1 + 2^n\epsilon \leq (1+\epsilon)^{2^n} ,$$

per cui

$$1 < f\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \leq 1 + \epsilon .$$

Ne segue l'affermazione, essendo f crescente.

Dimostriamo ora la Proprietà 3, sempre per $a > 1$. Fissiamo un intero $N \geq 1$ e un $\varepsilon > 0$. Per quanto visto sopra, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad 1 < f(x) < 1 + \frac{\varepsilon}{f(N)} .$$

Allora, presi $x_1, x_2 \in F \cap [-N, N]$ tali che $x_1 < x_2$ e $x_2 - x_1 \leq \delta$, si ha

$$0 < f(x_2) - f(x_1) = f(x_1)(f(x_2 - x_1) - 1) < f(N) \frac{\varepsilon}{f(N)} = \varepsilon .$$

Se $a < 1$, la dimostrazione è analoga.

1.2 Funzioni uniformemente continue

Siano E ed E' due spazi metrici qualunque. Una funzione $f : E \to E'$ si dice *uniformemente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \,.$$

Enunciamo un importante teorema di estensione.

Teorema. *Sia F un sottoinsieme denso in E, e sia E' completo. Se $f : F \to E'$ è uniformemente continua, allora esiste un unica funzione continua $\tilde{f} : E \to E'$ la cui restrizione a F coincide con f.*

Dimostrazione. Prendendo $x \in E$, esiste una successione $(x_n)_n$ in F tale che $x_n \to x$. Siccome f è uniformemente continua e $(x_n)_n$ è una successione di Cauchy, si vede che anche $(f(x_n))_n$ è di Cauchy. Essendo E' completo, esiste un $y \in E'$ tale che $f(x_n) \to y$. Definiamo $\tilde{f}(x) = y$.

Verifichiamo che questa è una buona definizione. Se $(\tilde{x}_n)_n$ è un'altra successione in F tale che $\tilde{x}_n \to x$, allora $d(x_n, \tilde{x}_n) \to 0$, e siccome f è uniformemente continua, si ha che $d(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) \to 0$. Ne segue che $(f(\tilde{x}_n))_n$ ha lo stesso limite di $(f(x_n))_n$, e la definizione di $\tilde{f}$ è consistente.

Chiaramente, la funzione $\tilde{f}$ così definita estende f, siccome, se $x \in U$, possiamo prendere la successione $(x_n)_n$ costantemente uguale a x. Dimostriamo che $\tilde{f}$ è (uniformemente) continua. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che, prendendo $u, v \in F$,

$$d(u, v) \leq 2\delta \quad \Rightarrow \quad d(f(u), f(v)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \,.$$

Se x, y sono due punti in E tali che $d(x, y) \leq \delta$, possiamo prendere due successioni $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ in F tali che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Allora, per n sufficientemente grande,

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) &\leq d(\tilde{f}(x), f(x_n)) + d(f(x_n), f(y_n)) + d(f(y_n), \tilde{f}(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,, \end{aligned}$$

il che dimostra che $\tilde{f}$ è uniformemente continua.

Per concludere, sia $\hat{f} : E \to E'$ una qualsiasi funzione continua che estende f. Allora, per ogni $x \in E$, prendendo una successione $(x_n)_n$ in F tale che $x_n \to x$,

$$\hat{f}(x) = \lim_n \hat{f}(x_n) = \lim_n f(x_n) = \tilde{f}(x) \,.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\tilde{f}$ è l'unica possibile estensione continua di f a E. ∎

1.3 Secondo passo: estensione a tutto $\mathbb{R}$

Supponiamo $a > 1$ e modifichiamo la funzione $f : F \to]0, +\infty[$ definendo, per ogni intero $N \geq 1$, la funzione $f_N : F \cap [-N, N] \to [f(-N), f(N)]$, tale che $f_N(x) = f(x)$ per ogni $x \in F \cap [-N, N]$. L'insieme $F \cap [-N, N]$ è denso in $[-N, N]$ e, per la Proprietà 3, la funzione f_N è uniformemente continua. Inoltre, ha valori in un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$, pertanto in uno spazio metrico completo. Essa si può pertanto estendere, in un unico modo, a una funzione continua $\tilde{f}_N : [-N, N] \to [f(-N), f(N)]$.

Possiamo allora definire $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ in questo modo: dato $x \in \mathbb{R}$, si prende un intero N per cui $x \in [-N, N]$ e si pone $f(x) = \tilde{f}_N(x)$. Per l'unicità delle estensioni, questa risulta essere una buona definizione, ed è una funzione continua.

La Proprietà 1 (di omomorfismo) continua a essere soddisfatta. Infatti, presi due numeri reali x_1, x_2, posso scegliere un intero $N \geq 1$ tale che x_1, x_2 e $x_1 + x_2$ stanno in $[-N, N]$. Prendendo due successioni[1] $(x_1^n)_n$ e $(x_2^n)_n$ in $F \cap [-N, N]$ tali che $\lim_n x_1^n = x_1$ e $\lim_n x_2^n = x_2$, si ha:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= \tilde{f}_N(x_1 + x_2) \\ &= \lim_n f_N(x_1^n + x_2^n) = \lim_n (f_N(x_1^n) f_N(x_2^n)) = \lim_n f_N(x_1^n) \lim_n f_N(x_2^n) \\ &= \tilde{f}_N(x_1) \tilde{f}_N(x_2) = f(x_1) f(x_2)\,. \end{aligned}$$

Dalla Proprietà 2 dedurremo ora che, se $a > 1$, anche f è strettamente crescente. Infatti, presi due numeri reali $x_1 < x_2$, posso sempre individuare un intero $N \geq 1$ e due numeri $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ in $F \cap [-N, N]$ tali che

$$-N \leq x_1 < \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < x_2 \leq N\,.$$

Essendo f_N strettamente crescente, con semplici passaggi al limite si vede che $\tilde{f}_N$ è crescente, per cui

$$f(x_1) = \tilde{f}_N(x_1) \leq \tilde{f}_N(\tilde{x}_1) = f_N(\tilde{x}_1) < f_N(\tilde{x}_2) = \tilde{f}_N(\tilde{x}_2) \leq \tilde{f}_N(x_2) = f(x_2)\,.$$

Dimostriamo ora che, se $a > 1$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

I due limiti sicuramente esistono, siccome f è crescente. Osservando che, se $m \in \mathbb{Z}$, si ha $f(m) = a^m$, e che

$$\lim_{m \to -\infty} a^m = 0\,, \qquad \lim_{m \to +\infty} a^m = +\infty\,,$$

si giunge alla conclusione. A questo punto, possiamo anche affermare che, se $a > 1$, la funzione $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è biiettiva: essendo continua, l'immagine deve essere un intervallo, e da quanto sopra questo intervallo deve essere proprio $]0, +\infty[$.

Se $a < 1$, considerazioni analoghe portano a dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è biiettiva e strettamente decrescente.

[1] Qui scriviamo gli indici in apice per non avere doppi indici in basso.

2 La funzione circolare

Dato $T > 0$, una funzione $F : \mathbb{R} \to \Omega$ (qui Ω è un insieme qualsiasi) si dice "periodica di periodo T" se

$$F(x + T) = F(x)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Chiaramente, se T è un periodo per la funzione F, anche $2T, 3T, \ldots$ lo sono. Diremo che T è il "periodo minimo" se non ci sono periodi più piccoli. Introduciamo l'insieme

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}\,.$$

Si tratta della circonferenza centrata nell'origine, di raggio 1, pensata come sottoinsieme del campo complesso. In analogia con il procedimento seguito per introdurre la funzione esponenziale, vogliamo dimostrare il seguente enunciato.

Teorema. *Dato $T > 0$, esiste un'unica funzione $h_T : \mathbb{R} \to S^1$, continua e periodica di periodo minimo T, tale che, per ogni x_1, x_2,*
(j) $h_T(x_1 + x_2) = h_T(x_1)h_T(x_2)\,,$
(jj) $h_T\left(\frac{T}{4}\right) = i\,.$

Costruiremo ora una tale funzione, in modo del tutto simile a quello seguito per la funzione esponenziale. Premettiamo anche qui alcune considerazioni, supponendo che il teorema sia stato verificato.

La funzione h_T si chiama "funzione circolare di base T". Pensando al codominio S^1 come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, la funzione h_T ha due componenti, che denotiamo con $\cos_T$ e $\sin_T$: sono il "coseno di base T" e il "seno di base T", rispettivamente. Scriveremo quindi

$$h_T(x) = (\cos_T(x), \sin_T(x))\,, \qquad \text{oppure} \qquad h_T(x) = \cos_T(x) + i\, \sin_T(x)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tali funzioni sono continue e periodiche di periodo T, e dalle proprietà della funzione circolare ricaviamo le seguenti:

(*a*) $(\cos_T(x))^2 + (\sin_T(x))^2 = 1\,,$
(*b*) $\cos_T(x_1 + x_2) = \cos_T(x_1)\cos_T(x_2) - \sin_T(x_1)\sin_T(x_2)\,,$
(*c*) $\sin_T(x_1 + x_2) = \sin_T(x_1)\cos_T(x_2) + \cos_T(x_1)\sin_T(x_2)\,,$
(*d*) $\cos_T\left(\frac{T}{4}\right) = 0\,, \quad \sin_T(\left(\frac{T}{4}\right) = 1\,.$

Concentriamo ora l'attenzione sull'intervallo $[0, T[$. Scrivendo

$$i = h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = h_T\left(0 + \tfrac{T}{4}\right) = h_T(0)h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = h_T(0)i\,,$$

ne ricaviamo che $h_T(0) = 1$. Inoltre,

$$h_T\left(\tfrac{T}{2}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{4} + \tfrac{T}{4}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{4}\right)h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = i^2 = -1\,,$$

mentre

$$h_T\left(\tfrac{3T}{4}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{2} + \tfrac{T}{4}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{2}\right)h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = (-1)i = -i\,,$$

Riassumendo:

$$\begin{array}{ll} \cos_T(0) = 1\,, & \sin_T(0) = 0\,, \\ \cos_T\left(\frac{T}{4}\right) = 0\,, & \sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1\,, \\ \cos_T\left(\frac{T}{2}\right) = -1\,, & \sin_T\left(\frac{T}{2}\right) = 0\,, \\ \cos_T\left(\frac{3T}{4}\right) = 0\,, & \sin_T\left(\frac{3T}{4}\right) = -1\,. \end{array}$$

Osserviamo ora che, dalla

$$1 = h_T(0) = h_T(x-x) = h_T(x)h_T(-x)\,,$$

abbiamo che $h_T(-x) = h_T(x)^{-1} = h_T(x)^*$, essendo $|h_T(x)| = 1$. Quindi,

$$\cos_T(-x) = \cos_T(x)\,, \quad \sin_T(-x) = -\sin_T(x)\,,$$

ossia la funzione $\cos_T$ è pari, mentre $\sin_T$ è dispari.

Dimostreremo ora che $\tilde{h}_T : [0,T[\, \to S^1$, la restrizione della funzione circolare h_T all'intervallo $[0,T[$, è biiettiva. Vediamo dapprima l'iniettività. Siano $\alpha < \beta$ in $[0,T[$. Se per assurdo fosse $h_T(\alpha) = h_T(\beta)$, si avrebbe che

$$h_T(\beta-\alpha) = h_T(\beta)h_T(-\alpha) = \frac{h_T(\beta)}{h_T(\alpha)} = 1\,.$$

Ma allora

$$h_T(x+(\beta-\alpha)) = h_T(x)h_T(\beta-\alpha) = h_T(x)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui $\beta-\alpha$ sarebbe un periodo di h_T minore di T, mentre sappiamo che T è il periodo minimo.

Vediamo ora che

$$\cos_T(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{4} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{4} < x < \frac{3T}{4} \\ > 0 & \text{se } \frac{3T}{4} < x < T \end{cases}, \qquad \sin_T(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{2} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{2} < x < T \end{cases}.$$

Ad esempio, per $x \in]0, \frac{T}{2}[$, non si può certamente avere $\sin_T(x) = 0$, perchè altrimenti i valori in x di $\cos_T$, $\sin_T$ coinciderebbero con i valori in 0 o in $\frac{T}{2}$, mentre abbiamo visto che, se per $\alpha, \beta \in [0,T[$ si ha $\cos_T(\alpha) = \cos_T(\beta)$ e $\sin_T(\alpha) = \sin_T(\beta)$, allora $\alpha = \beta$. Pertanto, per la continuità, $\sin_T$ dovrà essere sempre positiva o sempre negativa in $]0, \frac{T}{2}[$ (teorema degli zeri). Essendo $\sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1$, deve essere sempre positiva.

Per concludere, dimostriamo che $\tilde{h}_T$ è suriettiva (abbiamo già dimostrato prima che è iniettiva). Prendiamo un punto $P = (X_1, X_2) \in S^1$. Si ha che $X_1 \in [-1,1]$. I due casi in cui $X_1 = -1$ o $X_1 = 1$ si trattano immediatamente, essendo $h_T(\frac{T}{2}) = (-1,0)$ e $h_T(0) = (1,0)$. Supponiamo quindi che sia $X_1 \in]-1,1[$. Sappiamo che $\cos_T(\frac{T}{2}) = -1$, $\cos_T(0) = 1$ e che $\cos_T$ è una funzione continua e $T-$periodica. Per il corollario al teorema degli zeri, esiste un $\bar{x} \in]0, \frac{T}{2}[$ tale che $\cos_T(\bar{x}) = X_1$. Allora

$$|\sin_T(\bar{x})| = \sqrt{1-(\cos_T(\bar{x}))^2} = \sqrt{1-X_1^2} = |X_2|\,.$$

Abbiamo due possibilità: o $\sin_T(\bar{x}) = X_2$, per cui $h_T(\bar{x}) = P$, oppure $\sin_T(\bar{x}) = -X_2$, nel qual caso

$$h_T(T - \bar{x}) = h_T(-\bar{x}) = h_T(\bar{x})^* = (X_1, X_2) = P\,.$$

Essendo $T - \bar{x} \in \,]\frac{T}{2}, T[$, ciò mostra che $\tilde{h}_T$ è suriettiva.

2.1 La costruzione - primo passo

Definiamo la successione $(\sigma_n)_n$, con $\sigma_n = x_n + iy_n \in S^1$:

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = i,$$

e, per $n \geq 3$,

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2}}{2}} + i\frac{y_{n-1}}{\sqrt{2\,(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2}\,)}}\,,$$

così che $\sigma_n^2 = \sigma_{n-1}$, (vedi la formula per le radici quadrate di un numero complesso) e $0 < x_n < 1$, $0 < y_n < 1$.

Ci interessano ora le potenze di σ_n, quando $n \geq 2$. Sicuramente σ_n^m sta in S^1, per ogni n e m. Vediamo inoltre che la distanza tra una potenza e la successiva è sempre costante:

$$|\sigma_n^{m+1} - \sigma_n^m| = |\sigma_n^m|\,|\sigma_n - 1| = |\sigma_n|^m\,|\sigma_n - 1| = |\sigma_n - 1|.$$

Infine, si vede per induzione che

$$\sigma_n^{2^n} = 1\,.$$

Queste considerazioni ci permettono di interpretare geometricamente i punti σ_n^m : fissato $n \geq 2$, i punti

$$1, \sigma_n,\ \sigma_n^2,\ \ldots\ , \sigma_n^{2^{n-1}}$$

sono i vertici di un poligono regolare di 2^n lati inscritto in S^1.

Vogliamo definire la funzione $h_T : \mathbb{R} \to S^1$, di periodo minimo T. Per cominciare, definiamola sull'insieme

$$\widehat{F} = \left\{\frac{mT}{2^n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\right\},$$

in questo modo:

$$h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) = \sigma_n^m.$$

Verifichiamo che è ben definita: siano m, n e m', n' tali che $\dfrac{mT}{2^n} = \dfrac{m'T}{2^{n'}}$; se, per esempio, $n' \geq n$, si vede che $\sigma_n = \sigma_{n'}^{2^{n'-n}}$, e perciò

$$\sigma_n^m = (\sigma_{n'}^{2^{n'-n}})^m = \sigma_{n'}^{m2^{n'-n}} = \sigma_{n'}^{m'}.$$

Quindi, h_T è ben definita su $\widehat{F}$, a valori in S^1. Ne studieremo alcune proprietà.

Proprietà 1. Si ha

$$h_T(x_1 + x_2) = h_T(x_1)h_T(x_2)\,, \quad \text{per ogni } x_1\,, x_2 \in \widehat{F}\,.$$

Infatti, dati $x_1 = \dfrac{kT}{2^n}$ e $x_2 = \dfrac{mT}{2^n}$ (possiamo prenderli aventi lo stesso denominatore), abbiamo

$$\begin{aligned} h_T\left(\frac{kT}{2^n} + \frac{mT}{2^n}\right) &= h_T\left(\frac{(k+m)T}{2^n}\right) = \sigma_n^{k+m} \\ &= \sigma_n^k \sigma_n^m = h_T\left(\frac{kT}{2^n}\right) h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Proprietà 2. La funzione h_T è periodica, di periodo T.

Infatti, essendo $h_T(T) = 1$, si ha che

$$h_T(x + T) = h_T(x)h_T(T) = h_T(x)\,,$$

per ogni $x \in \widehat{F}$.

Proprietà 3. La funzione $h_T : \widehat{F} \to S^1$ è uniformemente continua. Più precisamente, per ogni x_1, x_2 in $\widehat{F}$ si ha

$$|h_T(x_2) - h_T(x_1)| \leq \frac{2\pi}{T}|x_2 - x_1|\,.$$

Infatti, prendiamo due elementi distinti di $\widehat{F}$, siano essi $x_1 = \dfrac{kT}{2^n}$ e $x_2 = \dfrac{mT}{2^n}$, con $k < m$. Allora

$$\begin{aligned} h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - h_T\left(\frac{kT}{2^n}\right) &= \sigma_n^m - \sigma_n^k = \sigma_n^k(\sigma_n^{m-k} - 1) \\ &= \sigma_n^k(\sigma_n - 1)(1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + ... + \sigma_n^{m-k-1}), \end{aligned}$$

e quindi, essendo $2^n|\sigma_n - 1| < 2\pi$ (visto a lezione), si ha

$$\left| h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - h_T\left(\frac{kT}{2^n}\right) \right| \leq |\sigma_n - 1|(m-k) \leq \frac{2\pi}{T}\left|\frac{mT}{2^n} - \frac{kT}{2^n}\right|.$$

2.2 Secondo passo: estensione a tutto $\mathbb{R}$

È facile vedere che $\widehat{F}$ è denso in $\mathbb{R}$. D'altra parte, S^1 è chiuso in $\mathbb{R}^2$, che è completo. Quindi la funzione $h_T : \widehat{F} \to S^1$ essendo uniformemente continua, a valori in uno spazio metrico completo, può essere estesa, in un unico modo, a una funzione continua $h_T : \mathbb{R} \to S^1$.

La Proprietà 1 (di omomorfismo) si estende con semplici passaggi al limite, come visto per la funzione esponenziale. Lo stesso dicasi per la periodicità.

Dimostriamo ora che T è il *periodo minimo* di h_T. Consideriamo dapprima l'insieme

$$K = \{t \in \mathbb{R} : h_T(t) = 1\}\,,$$

cioè il *nucleo*, $K = \ker h_T$. È un insieme chiuso che contiene sicuramente T e tutti i suoi multipli interi. Poniamo $a = \inf\{x \in K : x > 0\}$. Deve essere $a > 0$, altrimenti K conterrebbe numeri arbitrariamente piccoli, e con questi tutti i loro multipli; ne verrebbe che K sarebbe denso in $\mathbb{R}$, e perciò coinciderebbe con esso, il che è chiaramente assurdo. Essendo K chiuso, è $a \in K$. Inoltre, a deve essere un sottomultiplo di T. Infatti, se così non fosse, potrei prendere $\bar{n}$, il più grande intero per cui $\bar{n}a < T$. Allora si avrebbe che $0 < T - \bar{n}a < a$ e $h_T(T - \bar{n}a) = 1$, ossia $T - \bar{n}a \in K$, una contraddizione con il fatto che a è il minimo elemento positivo di K.

Notiamo che $h_T(\frac{a}{2}) = -1$. Infatti,

$$h_T\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_T\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = h_T(a) = 1\,,$$

e $h_T(\frac{a}{2}) \neq 1$, essendo $\frac{a}{2} \notin K$.

Sia $N \geq 1$ tale che $T = Na$: dimostriamo che deve essere $N = 1$. Se per assurdo fosse $N \geq 2$, avrei che

$$\frac{a}{2} = \frac{T}{2N} \leq \frac{T}{4}\,.$$

Facendo vedere che nessun punto dell'intervallo $\left[0, \frac{T}{4}\right]$ può venir mandato in -1, avremo la contraddizione cercata. Cominciamo prendendo un numero di $\widehat{F} \cap \left[0, \frac{T}{4}\right]$: sia esso $\dfrac{mT}{2^n}$. Allora, per la Proprietà 1,

$$\left|h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - 1\right| = \left|h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - h_T(0)\right| \leq \frac{2\pi}{T}\frac{mT}{2^n} \leq \frac{\pi}{2} < 2.$$

Ne segue per continuità che nessun punto di $[0, \frac{T}{4}]$ può avere immagine in -1.

Abbiamo quindi dimostrato che $a = T$. Supponiamo per assurdo che ci sia un periodo $\tau > 0$ minore di T. Ne seguirebbe che

$$h_T(\tau) = h_T(0 + \tau) = h_T(0) = 1\,,$$

quindi $\tau \in K$, e ciò è in contraddizione con il fatto che il nucleo di h_T è costituito da tutti e soli i multipli interi di T.

Concludiamo con il seguente

Teorema. *Si ha:*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|h_T(x) - 1|}{x} = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Dimostrazione. Cominciamo con il considerare il limite al variare di x in $\widehat{F}$. Sia quindi $x = \frac{mT}{2^n} > 0$. Allora,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{|h_T(x) - 1|}{x} - \frac{2\pi}{T} \right| &= \left| \frac{|\sigma_n^m - 1|}{\frac{mT}{2^n}} - \frac{2\pi}{T} \right| \\
&= \left| \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} \frac{|1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \ldots + \sigma_n^{m-1}|}{m} - \frac{2\pi}{T} \right| \\
&\leq \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} \left| \frac{|1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \ldots + \sigma_n^{m-1}|}{m} - 1 \right| + \left| \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right| \\
&\leq \frac{2\pi}{T} \left| \frac{1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \ldots + \sigma_n^{m-1}}{m} - 1 \right| + \left| \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right| \\
&\leq \frac{2\pi}{T} \frac{|\sigma_n - 1| + |\sigma_n^2 - 1| + \ldots + |\sigma_n^{m-1} - 1|}{m} + \left| \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right| .
\end{aligned}$$

Pertanto, essendo $2^n|\sigma_n - 1| < 2\pi$ (visto a lezione), si ha

$$|\sigma_n^2 - 1| \leq |\sigma_n^2 - \sigma_n| + |\sigma_n - 1| = 2|\sigma_n - 1| \leq 2\,\frac{2\pi}{2^n}\,,$$

e così via, fino a $|\sigma_n^{m-1} - 1| \leq (m-1)\frac{2\pi}{2^n}$. Usando la formula

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1) = \frac{(m-1)m}{2}\,,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{|\sigma_n - 1| + |\sigma_n^2 - 1| + \ldots + |\sigma_n^{m-1} - 1|}{m} &\leq \frac{1}{m}\left[\frac{2\pi}{2^n} + 2\,\frac{2\pi}{2^n} + \ldots + (m-1)\frac{2\pi}{2^n}\right] \\
&= \frac{1}{m}\,\frac{(m-1)m}{2}\,\frac{2\pi}{2^n} = \frac{(m-1)\pi}{2^n} < \frac{\pi}{T}\,\frac{mT}{2^n}.
\end{aligned}$$

In conclusione, se $x = \frac{mT}{2^n} > 0$, si ha:

$$\left| \frac{|h_T(x) - 1|}{x} - \frac{2\pi}{T} \right| \leq \frac{2\pi}{T}\,\frac{\pi}{T}\,\frac{mT}{2^n} + \left| \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right|.$$

Al tendere di $x = \frac{mT}{2^n}$ a 0, si ha che necessariamente n tende a $+\infty$, e il risultato segue dal fatto che $2^n|\sigma_n - 1|$ tende a 2π (visto a lezione).

Consideriamo ora il limite per $x \to 0^+$ senza ulteriori restrizioni su x e, per assurdo, supponiamo che non esista o non sia uguale a 1. Allora esiste un $\varepsilon > 0$ e una successione $(x_n)_n$ tale che $x_n \to 0^+$ tale che, per ogni n,

$$\frac{|h_T(x_n) - 1|}{t_n} \notin \left[\frac{2\pi}{T} - \varepsilon, \frac{2\pi}{T} + \varepsilon\right].$$

Per la continuità della funzione $\frac{|h_T(x)-1|}{x}$ e la densità di $\widehat{F}$ in $\mathbb{R}$, per ogni n sufficientemente grande si può trovare un $x_n' \in \widehat{F}$ positivo in modo che

$$|x_n - x_n'| \leq \frac{1}{n}\,, \qquad \text{e} \qquad \frac{|h_T(x_n') - 1|}{x_n'} \notin \left[\frac{2\pi}{T} - \varepsilon, \frac{2\pi}{T} + \varepsilon\right],$$

in contraddizione con quanto visto nella prima parte della dimostrazione. ∎

Abbiamo definito a lezione le funzioni

$$\cos_T t = Re(h_T(t)), \qquad \sin_T t = Im(h_T(t))\,,$$

per cui

$$h_T(t) = \cos_T t + i \sin_T t.$$

Dal teorema sopra dimostrato si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos_T(x) - 1)^2 + (\sin_T(x))^2}{x^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

da cui, essendo $\cos_T$ una funzione pari,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos_T(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin_T(x))^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + \cos_T x)(1 - \cos_T x)}{x^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

e tenendo conto delle proprietà di segno di $\sin_T$, concludiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin_T x}{x} = \frac{2\pi}{T}\,.$$