Analisi Matematica I

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2020/2021

I numeri naturali e il principio di induzione

Nel 1898 il matematico torinese Giuseppe Peano (1858–1932), nel suo articolo fondamentale *Arithmetices principia: nova methodo exposita* enunciò i seguenti assiomi per l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

a) Esiste un elemento, chiamato "zero", indicato con 0.

b) Ogni elemento n ha un "successivo" n'.

c) 0 non è il successivo di alcun elemento.

d) Elementi diversi hanno successivi diversi.

e) (**Principio di induzione**) Se S è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che
  i) $0 \in S$,
  ii) $n \in S \Rightarrow n' \in S$,
allora $S = \mathbb{N}$.

È sottinteso che la condizione *ii*) deve valere per $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi. Possiamo quindi leggerla in questo modo:

  ii) se per un certo n si ha che $n \in S$, ne consegue che anche $n' \in S$.

Si introducono i simboli $0' = 1$, $1' = 2$, $2' = 3$, ecc.

Da questi pochi assiomi, facendo uso della teoria degli insiemi, Peano ha mostrato come si possono ricavare tutte le proprietà dei numeri naturali. In particolare, si possono definire le operazioni di addizione e di moltiplicazione, ricavando l'uguaglianza

$$n' = n + 1\,.$$

Inoltre, scrivendo $m \leq n$ qualora esista un $p \in \mathbb{N}$ tale che $m + p = n$, si ottiene una relazione d'ordine. Supporremo qui ben note tutte le proprietà delle operazioni di addizione, moltiplicazione e della relazione d'ordine definite su $\mathbb{N}$.

Il principio di induzione può essere usato per definire una successione di oggetti

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$$

Si procede in questo modo (**definizione per ricorrenza**):

$j)$ si definisce A_0 ;

$jj)$ supponendo di aver definito A_n per un certo n, si definisce A_{n+1} .

In tal modo, se indichiamo con S l'insieme degli n per cui A_n è definita, si ha che S verifica $i)$ e $ii)$. Quindi S coincide con $\mathbb{N}$, ossia tutti gli A_n sono definiti.

Ad esempio, possiamo definire le "potenze" a^n ponendo, per $a \neq 0$,

$j)$ $a^0 = 1$,

$jj)$ $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Si vede in questo modo che $a^1 = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a$, $\quad a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a$, e così via. Se $a = 0$, si pone $0^n = 0$ per ogni $n \geq 1$, mentre di solito resta non definito 0^0. (Da ora in poi supporremo ben note le proprietà elementari delle potenze.)

Inoltre, definiamo il "fattoriale" $n!$ ponendo

$j)$ $0! = 1$,

$jj)$ $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Definiamo infine la somma (o sommatoria) di $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ utilizzando il simbolo

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, .$$

Si pone $\sum_{k=0}^{0} \alpha_k = \alpha_0$ e, una volta definito $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$, per un certo n, il successivo è

$$\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k + \alpha_{n+1} \, .$$

Il principio di induzione può inoltre essere usato per dimostrare una successione di proposizioni

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ \ldots$$

Si procede in questo modo (**dimostrazione per induzione**):

$j)$ si verifica P_0 ;

$jj)$ supponendo vera P_n per un certo n, si verifica P_{n+1} .

Se indichiamo con S l'insieme degli n per cui P_n è dimostrata, si ha che S verifica $i)$ e $ii)$. Quindi S coincide con $\mathbb{N}$, ossia tutte le P_n sono dimostrate.

Esempio 1. Dimostriamo la seguente uguaglianza: se $a \neq 1$,[1]

$$P_n : \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \, .$$

Vediamo P_0:

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = \frac{a^1 - 1}{a - 1} \, ;$$

[1] Si supporrà qui che sia $a^0 = 1$ anche qualora $a = 0$. Questa formula vale non solo per $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, ma per ogni numero reale o complesso $a \neq 1$.

essa equivale all'identità $a^0 = 1$ e pertanto è vera. Supponiamo ora che P_n sia vera, per un certo $n \in \mathbb{N}$; allora

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} a^k &= \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+2}-1}{a-1}\,,\end{aligned}$$

per cui anche P_{n+1} è vera. Abbiamo quindi dimostrato che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La formula dimostrata nell'Esempio 1 si può generalizzare nella seguente:[2]

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\Big(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\Big)\,.$$

La dimostrazione è si può fare anche qui per induzione.[3] In particolare, si ha:

$$\begin{aligned}&a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\,,\\ &a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)\,,\\ &a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\,,\\ &a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\,,\\ &\dots\end{aligned}$$

Esempio 2. Vogliamo dimostrare che, presi due numeri naturali a e n, si ha la seguente **disuguaglianza di Bernoulli**:

$$P_n: \qquad (1+a)^n \geq 1 + na\,.$$

Vediamo che vale P_0, essendo sicuramente $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a$. Supponiamo ora vera P_n per un certo n e verifichiamo P_{n+1}:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a\,,$$

per cui anche P_{n+1} è vera. Quindi, P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

---

[2] Analogamente a quanto detto nella nota precedente, anche qui si supporrà che $a^0 = 1$, $b^0 = 1$ anche nei casi in cui risultino del tipo 0^0.

[3] Anche qui a e b possono essere numeri reali o complessi. Riportiamo allora un'altra dimostrazione, più diretta, in cui non si fa solo uso di numeri naturali. Si verifica facilmente che la formula è vera se $b = 0$ o se $a = b$. Se invece $b \neq 0$ e $a \neq b$, allora, usando la formula già dimostrata in precedenza,

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^k \frac{b^n}{b^k} = b^n \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{a}{b}\Big)^k = b^n \frac{(\frac{a}{b})^{n+1}-1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\,.$$

In alcuni casi potrebbe essere comodo iniziare la successione delle proposizioni, ad esempio, da P_1 invece che da P_0, o da una qualsiasi altra di esse. Il principio di dimostrazione resta naturalmente lo stesso: se ne verifica la prima e si dimostra che da una qualsiasi di esse segue la successiva.

Altri esempi ed esercizi. Si possono dimostrare per induzione le seguenti formule:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\,, \\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,. \end{aligned}$$

Si noti l'uguaglianza

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2\,.$$

Definiamo ora, per ogni coppia di numeri naturali n,k tali che $k \le n$, i "coefficienti binomiali"

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Verifichiamo che, per $1 \le k \le n$, vale la formula

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}\,;$$

abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}\,. \end{aligned}$$

Dimostreremo ora che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la seguente **formula del binomio (di Newton)**:[4]

$$P_n: \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\,.$$

Iniziamo con il verificare che la formula vale per $n = 0$:

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0\,.$$

[4] Anche in questa formula si supporrà che $a^0 = 1$, $b^0 = 1$ e $(a+b)^0 = 1$ anche nei casi in cui risultino del tipo 0^0.

Per $n \geq 1$, procediamo per induzione. Vediamo che vale per $n = 1$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 .$$

Ora, supponendo vera P_n, per un certo $n \geq 1$, vediamo che vale anche P_{n+1} :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \\
&= a \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) + b \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{(k-1)+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k .
\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ricordiamo che risulta talvolta utile rappresentare i coefficienti binomiali nel cosiddetto "triangolo di Tartaglia (o di Pascal)"

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & &
\end{array}$$

che possiamo scrivere esplicitamente così:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & &
\end{array}
$$

Come casi particolari della formula del binomio, abbiamo quindi:

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,, \\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,, \\
&(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\,, \\
&(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\,, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

I numeri reali

Non ci soffermeremo sulle ragioni di carattere algebrico che portano, a partire dall'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}\,,$$

alla costruzione dell'insieme dei numeri interi relativi

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}\,,$$

e dell'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}\,.$$

Ci interessa però far notare che l'insieme dei numeri razionali non è sufficiente a trattare questioni geometriche elementari, quali ad esempio la misurazione della diagonale di un quadrato di lato 1.

Teorema. *Non esiste alcun numero razionale x tale che $x^2 = 2$.*

Dimostrazione. [5] Per assurdo, supponiamo che esistano $m, n \in \mathbb{N}$ non nulli tali che

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2\,,$$

ossia $m^2 = 2n^2$. Allora m deve essere pari, per cui esiste un $m_1 \in \mathbb{N}$ non nullo tale che $m = 2m_1$. Ne segue che $4m_1^2 = 2n^2$, ossia $2m_1^2 = n^2$. Pertanto anche n deve essere pari, per cui esiste un $n_1 \in \mathbb{N}$ non nullo tale che $2n_1 = n$. Quindi

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2 = 2\,.$$

[5] Dimostrazione vista durante il Corso Propedeutico.

Possiamo ora ripetere lo stesso ragionamento quante volte vogliamo, continuando a dividere per 2 numeratore e denominatore:

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3} = \ldots = \frac{m_k}{n_k} = \ldots$$

dove m_k e n_k sono numeri naturali non nulli tali che $m = 2^k m_k$, $n = 2^k n_k$. Quindi, essendo $n_k \geq 1$, si ha che $n \geq 2^k$, per ogni numero naturale $k \geq 1$. In particolare, $n \geq 2^n$. Ma la disuguaglianza di Bernoulli ci dice che $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n$, e ne consegue che $n \geq 1 + n$, il che è palesemente falso. ■

Si rende pertanto necessario estendere ulteriormente l'insieme dei numeri razionali.

È possibile costruire l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ a partire dai razionali. Essendo però tale costruzione piuttosto laboriosa, ci limiteremo qui ad enunciare le principali proprietà di $\mathbb{R}$.

1) È definita una "relazione d'ordine" $\leq$ con le seguenti proprietà:
per ogni scelta di x, y, z in $\mathbb{R}$,
a) $x \leq x$,
b) $[x \leq y \text{ e } y \leq x] \Rightarrow x = y$,
c) $[x \leq y \text{ e } y \leq z] \Rightarrow x \leq z$;
inoltre, tale relazione d'ordine è "totale":
d) $x \leq y \ \text{ o } \ y \leq x$.
Se $x \leq y$, scriveremo anche $y \geq x$. Se $x \leq y$ e $y \neq x$, scriveremo $x < y$ oppure $y > x$.

2) È definita un'operazione di addizione $+$ con le seguenti proprietà:
per ogni scelta di x, y, z in $\mathbb{R}$,
a) (associativa) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
b) esiste un "elemento neutro" 0: si ha $x + 0 = x = 0 + x$;
c) l'elemento x ha un "opposto" $-x$: si ha $x + (-x) = 0 = (-x) + x$;
d) (commutativa) $x + y = y + x$;
e) se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z$.

3) È definita un'operazione di moltiplicazione $\cdot$ con le seguenti proprietà:
per ogni scelta di x, y, z in $\mathbb{R}$,
a) (associativa) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
b) esiste un "elemento neutro" 1: si ha $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$;
c) se $x \neq 0$, l'elemento x ha un "reciproco" x^{-1}: si ha $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$;
d) (commutativa) $x \cdot y = y \cdot x$;
e) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$;

e una proprietà che coivolge entrambe le operazioni:

f) (distributiva) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;

4) (**Proprietà di separazione**) Dati due sottoinsiemi non vuoti A, B tali che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b\,,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b\,.$$

Dalle proprietà elencate qui sopra si possono ricavare tutte le proprietà algebriche dei numeri reali, che supporremo già note.

Ritroviamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali come sottoinsieme di $\mathbb{R}$: 0 e 1 sono gli elementi neutri di addizione e moltiplicazione, dopodiché si ha $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ e così via, per ricorrenza.

Nel seguito, ometteremo quasi sempre il $\cdot$ nella moltiplicazione. Scriveremo, come è noto, $z = y - x$ se $z + x = y$, e $z = \frac{y}{x}$ se $zx = y$, con $x \neq 0$. In particolare, $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Le potenze a^n si definiscono come nella Sezione 1 per ogni $a \in \mathbb{R}$ e, se $a \neq 1$, continua a valere la formula per la somma delle potenze ivi dimostrata (Esempio 1 e sua generalizzazione). La disuguaglianza di Bernoulli risulta valida per ogni $a > -1$ e la formula del binomio di Newton continua a valere se a, b sono numeri reali qualsiasi.

Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ si dice "limitato superiormente" se esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in E$, si ha $x \leq \alpha$; un tale α è allora una "limitazione superiore" di E. Se in più si ha che $\alpha \in E$, si dirà che α è il "massimo" di E e si scriverà $\alpha = \max E$.

Analogamente, E si dice "limitato inferiormente" se esiste un $\beta \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in E$, si ha $x \geq \beta$; un tale β è allora una "limitazione inferiore" di E. Se in più si ha che $\beta \in E$, si dirà che β è il "minimo" di E e si scriverà $\beta = \min E$.

Diremo che E è "limitato" se è sia limitato superiormente che limitato inferiormente.

Teorema. *Se E è un sottoinisieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato superiormente, l'insieme delle limitazioni superiori di E ha sempre un minimo.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia B l'insieme delle limitazioni superiori di E. Allora

$$\forall a \in E \quad \forall b \in B \quad a \leq b\,,$$

e per la proprietà di separazione esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in E \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b\,.$$

Ciò significa che c è una limitazione superiore di E, e quindi $c \in B$, ed è anche una limitazione inferiore di B. Pertanto, $c = \min B$. ∎

Se E è limitato superiormente, la minima limitazione superiore di E si chiama "estremo superiore" di E: è un numero reale $s \in \mathbb{R}$ e si scrive $s = \sup E$. Esso è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

i) $\forall x \in E \quad x \leq s\,,$

ii) $\forall s' < s \quad \exists x \in E : \quad x > s'\,.$

Se l'estremo superiore s appartiene ad E, si ha che $s = \max E$; succede spesso, però, che E, pur essendo limitato superiormente, non abbia un massimo. Talvolta le due proprietà si scrivono nella forma equivalente

i) $\forall x \in E \quad x \leq s\,,$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : \quad x > s - \varepsilon\,.$

Nella seconda, si capisce che il numero $\varepsilon > 0$ può essere preso arbitrariamente piccolo.

Analogamente a quanto sopra, si può dimostrare il seguente

Teorema. *Se E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente, l'insieme delle limitazioni inferiori di E ha sempre un massimo.*

Se E è limitato inferiormente, la massima limitazione inferiore di E si chiama "estremo inferiore" di E: è un numero reale $i \in \mathbb{R}$ e si scrive $i = \inf E$. Esso è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

j) $\forall x \in E \quad x \geq i\,,$

jj) $\forall i' > i \quad \exists x \in E : \quad x < i'\,.$

Se l'estremo inferiore i appartiene ad E, si ha che $i = \min E$; non è detto, però, che E, pur essendo limitato inferiormente, abbia un minimo. Le due proprietà si possono scrivere equivalentemente come

j) $\forall x \in E \quad x \geq i\,,$

jj) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : \quad x < i + \varepsilon\,.$

Si noti che, definendo l'imsieme

$$E^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in E\}\,,$$

si ha che

$$E \text{ è limitato superiormente } \Leftrightarrow E^- \text{ è limitato inferiormente,}$$

e in tal caso si ha che

$$\sup E = -\inf E^-,$$

mentre

$$E \text{ è limitato inferiormente } \Leftrightarrow E^- \text{ è limitato superiormente,}$$

e in tal caso si ha che

$$\inf E = -\sup E^-.$$

Nel caso in cui E *non* sia limitato superiormente, useremo la scrittura

$$\sup E = +\infty\,.$$

Teorema. $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathbb{N}$ sia limitato superiormente, e sia $s = \sup \mathbb{N}$. Per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > s - \frac{1}{2}$. Ma allora $n + 1 \in \mathbb{N}$ e

$$n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 > s\,,$$

in contraddizione col fatto che s è una limitazione superiore per $\mathbb{N}$. ■

Nel caso in cui E *non* sia limitato inferiormente, useremo la scrittura

$$\inf E = -\infty\,.$$

Ad esempio, si ha che $\inf \mathbb{Z} = -\infty$.

Ci sarà utile, anche in seguito, la seguente proprietà dei numeri reali.

Lemma. *Se* $0 \leq \alpha < \beta$, *allora* $\alpha^2 < \beta^2$.

Dimostrazione. Se $0 \leq \alpha < \beta$, si ha $\alpha^2 = \alpha\alpha \leq \alpha\beta < \beta\beta = \beta^2$. ■

Dimostreremo ora che esiste un numero reale $c > 0$ tale che $c^2 = 2$.

Definiamo gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2 < 2\}\,,$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2 > 2\}\,.$$

Si può vedere che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b\,;$$

(altrimenti avremmo $0 \leq b < a$, quindi, per il Lemma, $b^2 < a^2$, mentre è $a^2 < 2$ e $b^2 > 2$, impossibile). Usando la proprietà di separazione, esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b\,.$$

Si noti che, essendo $1 \in A$, sicuramente $c \geq 1$. Vogliamo ora mostrare che si ha proprio $c^2 = 2$.

Per assurdo, se $c^2 > 2$, allora, per $n \geq 1$,

$$\left(c - \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 - \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \geq c^2 - \frac{2c}{n}\,;$$

quindi, se $n > 2c/(c^2 - 2)$, essendo $c \geq 1$ e $n \geq 1$ si ha che

$$c - \frac{1}{n} \geq 0 \quad \text{e} \quad \left(c - \frac{1}{n}\right)^2 > 2\,,$$

per cui $c - \frac{1}{n} \in B$. Ma allora deve essere $c \leq c - \frac{1}{n}$, il che è impossibile.

Supponiamo ora, sempre per assurdo, che $c^2 < 2$. Allora, se $n \geq 1$,

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n} = c^2 + \frac{2c+1}{n}\,;$$

quindi, se $n > (2c+1)/(2-c^2)$, si ha che $(c + \frac{1}{n})^2 < 2$, e pertanto $c + \frac{1}{n} \in A$. Ma allora deve essere $c + \frac{1}{n} \leq c$, il che è impossibile.

Non potendo essere né $c^2 > 2$ né $c^2 < 2$, deve quindi essere $c^2 = 2$.

Il Lemma ci assicura inoltre che non ci possono essere altre soluzioni positive dell'equazione

$$x^2 = 2\,,$$

la quale pertanto ha esattamente due soluzioni, c e $-c$.

Lo stesso tipo di procedimento può essere usato per dimostrare che, qualunque sia il numero reale positivo r, esiste un unico numero reale positivo c tale che $c^2 = r$. Questo si chiama "radice quadrata" di r e si scrive $c = \sqrt{r}$. Si noti che l'equazione $x^2 = r$ ha due soluzioni: $x = \sqrt{r}$ e $x = -\sqrt{r}$. Si pone inoltre $\sqrt{0} = 0$, mentre la radice quadrata di un numero negativo resta non definita.

Studieremo ora la "densità" degli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Teorema. *Dati due numeri reali α, β, con $\alpha < \beta$, esiste un numero razionale tra essi compreso.*

Dimostrazione. Consideriamo tre casi distinti.

Primo caso: $0 \leq \alpha < \beta$. Scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \frac{1}{\beta - \alpha}\,,$$

e sia $m \in \mathbb{N}$ il più grande numero naturale tale che

$$m < n\beta\,.$$

Quindi $\frac{m}{n} < \beta$, e resta da vedere che $\frac{m}{n} > \alpha$. Per assurdo, sia $\frac{m}{n} \leq \alpha$; allora

$$\frac{m+1}{n} \leq \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + (\beta - \alpha) = \beta\,,$$

ossia $m + 1 < n\beta$, in contraddizione col fatto che m è il più grande numero naturale minore di $n\beta$.

Secondo caso: $\alpha < 0 < \beta$. Basta scegliere il numero 0, che è razionale.

Terzo caso: $\alpha < \beta \leq 0$. Ci si può ricondurre al primo caso cambiando i segni: $0 \leq -\beta < -\alpha$, per cui esiste un razionale $\frac{m}{n}$ tale che $-\beta < \frac{m}{n} < -\alpha$. Allora $\alpha < -\frac{m}{n} < \beta$. ■

Teorema. *Dati due numeri reali α, β, con $\alpha < \beta$, esiste un numero irrazionale tra essi compreso.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che

$$\alpha + \sqrt{2} < \frac{m}{n} < \beta + \sqrt{2}\,.$$

Ne segue che

$$\alpha < \frac{m}{n} - \sqrt{2} < \beta\,,$$

con $\frac{m}{n} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

Scopriremo ora una sostanziale differenza tra gli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Consideriamo la seguente successione di numeri razionali non negativi:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{1}{5} & \frac{2}{4} & \frac{3}{3} & \frac{4}{2} & \frac{5}{1} & \dots
\end{array}$$

Come si vede, essa è costruita elencando i numeri razionali in cui la somma tra numeratore e denominatore è 1, poi 2, poi 3 e così via. Essa è sicuramente suriettiva, in quanto tutti i numeri razionali non negativi compaiono prima o poi nella lista. Possiamo ora modificarla per trovarne una biiettiva, eliminando i numeri che compaiono già in precedenza:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{1}{5} & \frac{5}{1} & \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & \frac{3}{4} & \frac{4}{3} & \frac{5}{2} & \frac{6}{1} & \dots
\end{array}$$

A questo punto, è facile modificarla ancora per ottenere tutti i numeri razionali:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{3}{1} & -\frac{3}{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \dots
\end{array}$$

In questo modo, abbiamo costruito una funzione $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ biiettiva. Diremo quindi che $\mathbb{Q}$ è un insieme "numerabile".

Vediamo ora che $\mathbb{R}$ non è un insieme numerabile, ossia che non esiste una funzione $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biiettiva. Infatti, se per assurdo esistesse una tale funzione, potrei elencare i numeri reali in una successione e, scrivendoli in forma decimale, avrei

$$\begin{aligned}
&0 \to \alpha_0 = \alpha_{0,0}\,, \alpha_{0,1}\alpha_{0,2}\alpha_{0,3}\alpha_{0,4}\dots \\
&1 \to \alpha_1 = \alpha_{1,0}\,, \alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\dots \\
&2 \to \alpha_2 = \alpha_{2,0}\,, \alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\dots \\
&3 \to \alpha_3 = \alpha_{3,0}\,, \alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\dots \\
&4 \to \alpha_4 = \alpha_{4,0}\,, \alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}\dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

(qui tutti gli $\alpha_{i,j}$ sono numeri naturali e, se $j \geq 1$, sono cifre comprese tra 0 e 9). Posso ora costruire un numero reale diverso da tutti gli α_i della lista. Basta prendere gli elementi della diagonale $\alpha_{0,0}\,,\ \alpha_{1,1}\,,\ \alpha_{2,2}\,,\ \alpha_{3,3}\,,\ \alpha_{4,4}\,,\ \dots$ e modificarli uno a uno: scelgo un numero naturale β_0, tra 1 e 9, diverso da $\alpha_{0,0}$, poi un β_1, tra 1 e 9, diverso da $\alpha_{1,1}$, poi ancora un β_2, sempre tra 1 e 9, diverso da $\alpha_{2,2}$, e così via, con l'accortezza di non prenderli tutti uguali a 9, da un certo punto in poi. A questo punto, il numero reale β avente forma decimale

$$\beta = \beta_0\,,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\dots$$

non può essere uguale ad alcuno dei numeri α_i. La funzione φ non può pertanto essere suriettiva.

Avendo visto che $\mathbb{Q}$ è numerabile e che $\mathbb{R}$ non lo è, possiamo dedurne che nemmeno $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ può essere numerabile.

I numeri complessi

Consideriamo l'insieme

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}\,,$$

che spesso si indica con $\mathbb{R}^2$. Definiamo un'operazione di "addizione":

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')\,.$$

Si verificano le seguenti proprietà:

a) (associativa) $(a,b) + ((a',b') + (a'',b'')) = ((a,b) + (a',b')) + (a'',b'')\,;$
b) esiste un "elemento neutro" $(0,0)$: si ha $(a,b) + (0,0) = (a,b)\,;$
c) ogni elemento (a,b) ha un "opposto" $-(a,b) = (-a,-b)$: si ha

$$(a,b) + (-a,-b) = (0,0)\,;$$

d) (commutativa) $(a,b) + (a',b') = (a',b') + (a,b)\,;$

Definiamo un'operazione di "moltiplicazione":

$$(a,b) \cdot (a',b') = (aa' - bb', ab' + ba')\,.$$

Si può verificare che valgono le seguenti proprietà:

a) (associativa) $(a,b) \cdot ((a',b') \cdot (a'',b'')) = ((a,b) \cdot (a',b')) \cdot (a'',b'')\,;$
b) esiste un "elemento neutro" $(1,0)$: si ha $(a,b) \cdot (1,0) = (a,b)\,;$
c) ogni elemento $(a,b) \neq (0,0)$ ha un "reciproco" $(a,b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}\,,\,\frac{-b}{a^2+b^2})$: si ha

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}\,,\,\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)\,;$$

d) (commutativa) $(a,b) \cdot (a',b') = (a',b') \cdot (a,b)\,;$
e) (distributiva) $(a,b) \cdot ((a',b') + (a'',b'')) = ((a,b) \cdot (a',b')) + ((a,b) \cdot (a'',b''))\,.$

(Nel seguito, ometteremo spesso di scrivere il " $\cdot$ "). In questo modo, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\,)$ risulta essere un campo, che verrà indicato con $\mathbb{C}$ e si dirà il "campo complesso". I suoi elementi si chiameranno "numeri complessi".

Si può pensare $\mathbb{C}$ come un'estensione di $\mathbb{R}$ in questo modo: si identificano tutti gli elementi della forma $(a, 0)$ con il corrispondente numero reale a. Le operazioni di somma e moltiplicazione indotte su $\mathbb{R}$ sono effettivamente quelle preesistenti:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)\,,$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)\,.$$

Notiamo che vale la seguente uguaglianza:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)\,.$$

È allora conveniente introdurre un nuovo simbolo per indicare l'elemento $(0, 1)$. Scriveremo

$$(0, 1) = i\,.$$

In questo modo, avendo identificato $(a, 0)$ con a e $(b, 0)$ con b, possiamo scrivere

$$(a, b) = a + ib\,.$$

Posto $z = a + ib$, il numero a si dice "parte reale" di z e si scrive $a = Re(z)$. Il numero b si dice "parte immaginaria" di z e si scrive $b = Im(z)$.

Osserviamo ora che si ha

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1\,.$$

Usando questa semplice informazione, possiamo verificare che valgono le usuali proprietà simboliche formali: ad esempio,

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')\,.$$

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')\,.$$

Sia $z = a + ib$ un numero complesso fissato. Cerchiamo le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$u^2 = z\,.$$

Queste vengono talvolta dette "radici quadrate" del numero complesso z (attenzione però a non confonderle con la radice quadrata di un numero reale non negativo). Se $b = 0$, ho

$$u = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & \text{se } a \geq 0\,, \\ \pm i\sqrt{-a} & \text{se } a < 0\,. \end{cases}$$

Se invece $b \neq 0$, scriviamo $u = x + iy$. Allora

$$x^2 - y^2 = a\,, \qquad 2xy = b\,.$$

Essendo $b \neq 0$, si ha $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Posso quindi scrivere $y = \frac{b}{2x}$, e ottengo

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0\,,$$

da cui

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\,.$$

Determinati così x e y, abbiamo due soluzioni della nostra equazione:

$$u = \pm \left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{\sqrt{2\,(a + \sqrt{a^2 + b^2}\,)}} \right].$$

Possiamo ora considerare un'equazione del secondo grado

$$Au^2 + Bu + C = 0\,,$$

dove A, B, C sono numeri complessi fissati, con $A \neq 0$. Come facilmente si vede, l'equazione è equivalente a

$$\left(u + \frac{B}{2A} \right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}\,.$$

Ponendo $v = u + \frac{B}{2A}$ e $z = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}$, ci si riconduce al problema delle radici quadrate che abbiamo già risolto.

Per concludere, consideriamo l'equazione polinomiale più generale

$$A_n u^n + A_{n-1} u^{n-1} + ... + A_1 u + A_0 = 0\,,$$

dove $A_0, A_1, ..., A_n$ sono numeri complessi fissati, con $A_n \neq 0$. In altri termini, vogliamo trovare le radici di un polinomio a coefficienti complessi. Il seguente teorema, che enunciamo senza dimostrazione, è noto come **teorema fondamentale dell'algebra**.

Teorema. *Ogni equazione polinomiale ha, nel campo complesso, almeno una soluzione.*

Il problema di trovare una formula generale che fornisca le soluzioni è però tutt'altro che facile. Lo abbiamo affrontato nel caso $n = 2$ e si può risolvere anche se $n = 3$ o 4. Se $n \geq 5$, però, è stato dimostrato che non esiste alcuna formula algebrica generale che fornisca una radice del polinomio.

Introduciamo ora alcune nozioni associate ai numeri complessi. Se $z = a + ib$, si definisce il "modulo" di z:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,,$$

Si noti che, se $z = a \in \mathbb{R}$, ritroviamo il "valore assoluto"

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0\,, \\ -a & \text{se } a < 0\,. \end{cases}$$

Dati due numeri complessi z_1 e z_2, verifichiamo che

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,.$$

Infatti, se $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$, si ha

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 b_1 a_2 + b_1^2 a_2^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2\,. \end{aligned}$$

In particolare, se i due numeri coincidono, si ha

$$|z^2| = |z|^2\,.$$

Ne segue per induzione che, per $n \in \mathbb{N}$,

$$|z^n| = |z|^n\,.$$

Inoltre, se $z \neq 0$, essendo $|z^{-1} z| = 1$, si ha

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}\,.$$

Ecco allora che, preso un intero positivo n,

$$|z^{-n}| = |(z^{-1})^n| = |z^{-1}|^n = (|z|^{-1})^n = |z|^{-n}.$$

Pertanto, l'uguaglianza $|z^n| = |z|^n$ vale per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Dato un numero complesso $z = a + ib$, si introduce il numero $z^* = a - ib$, detto il "complesso coniugato" di z. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{gathered} (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*\,; \\ (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*\,; \\ z^{**} = z\,; \\ |z^*| = |z|\,; \\ z z^* = |z|^2\,; \\ Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)\,, \qquad Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)\,; \end{gathered}$$

$$|Re(z)| \leq |z|\,, \qquad |Im(z)| \leq |z|\,.$$

Se $z \neq 0$, è

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}\,.$$

Dimostriamo ora che vale la seguente "disuguaglianza triangolare":

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$$

Infatti, si ha che

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \\
&= (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) \\
&= z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + z_2 z_2^* \\
&= |z_1|^2 + z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2Re(z_1 z_2^*) + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1 z_2^*| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2^*| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2,
\end{aligned}$$

e la disuguaglianza cercata segue dal Lemma di pagina 10.

Risulta utile definire una "distanza" tra due numeri complessi z_1 e z_2, in questo modo:

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|\,.$$

Se $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$, si vede che

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}\,.$$

Abbiamo quindi la ben nota "distanza euclidea" tra due punti nel piano.

Evidenziamo le seguenti proprietà della distanza:

a) $d(z_1, z_2) \geq 0\,;$
b) $d(z_1, z_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2\,;$
c) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)\,;$
d) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)\,.$

Quest'ultima viene chiamata "disuguaglianza triangolare"; la dimostriamo:

$$\begin{aligned}
d(z_1, z_3) &= |z_3 - z_1| \\
&= |(z_3 - z_2) + (z_2 - z_1)| \\
&\leq |z_3 - z_2| + |z_2 - z_1| \\
&= d(z_2, z_3) + d(z_1, z_2)\,.
\end{aligned}$$

Lo spazio $\mathbb{R}^N$

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^N$, costituito dalle $N-$uple $(x_1, x_2, \dots, x_N)$, dove $x_1, x_2, \dots, x_N$ sono numeri reali. Indicheremo i suoi elementi con i simboli

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \dots$$

Cominciamo con l'introdurre un'operazione di addizione in $\mathbb{R}^N$: dati due elementi $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$, si definisce $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'$ in questo modo:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_N + x'_N) .$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) (associativa) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') + \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'')$;
b) esiste un "elemento neutro" $\boldsymbol{0} = (0, 0, \dots, 0)$: si ha $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x}$;
c) ogni elemento $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ha un "opposto"
$(-\boldsymbol{x}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_N)$: si ha $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}$;
d) (commutativa) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}$.

Pertanto, $(\mathbb{R}^N, +)$ è un "gruppo abeliano". Normalmente, si usa scrivere $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ per indicare $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}')$.

Definiamo ora la moltiplicazione di un elemento di $\mathbb{R}^N$ per un numero reale: considerati $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisce $\alpha\boldsymbol{x}$ in questo modo:

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_N) .$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$;
b) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = (\alpha\boldsymbol{x}) + (\beta\boldsymbol{x})$;
c) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = (\alpha\boldsymbol{x}) + (\alpha\boldsymbol{x}')$;
d) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Pertanto, con le operazioni introdotte, $\mathbb{R}^N$ è uno "spazio vettoriale". Chiameremo i suoi elementi "vettori"; i numeri reali, in questo ambito, verranno chiamati "scalari".

È utile introdurre il "prodotto scalare" tra due vettori: dati $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$, si definisce il numero reale $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}'$ in questo modo:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' = \sum_{k=1}^{N} x_k x'_k .$$

Il prodotto scalare è spesso indicato con simboli diversi, quali ad esempio

$$\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}' \rangle , \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle , \quad (\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}') , \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') .$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$;
b) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
c) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') \cdot \boldsymbol{x}'' = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}'') + (\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{x}'')$;
d) $(\alpha\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}' = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}')$;
e) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{x}$;

A partire dal prodotto scalare, possiamo definire la "norma" di un vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$;
b) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
c) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\, \|\boldsymbol{x}\|$;
d) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}'\|$.

Per dimostrare la d), abbiamo bisogno della seguente **disuguaglianza di Schwarz**.

Teorema. *Presi due vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$, si ha*

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}'| \leq \|\boldsymbol{x}\|\, \|\boldsymbol{x}'\|\,.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza è sicuramente verificata se $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$, essendo in tal caso $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' = 0$ e $\|\boldsymbol{x}'\| = 0$. Supponiamo quindi $\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{0}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$0 \leq \|\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x}'\|^2 = (\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x}') \cdot (\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x}') = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\alpha\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' + \alpha^2\|\boldsymbol{x}'\|^2\,.$$

Prendendo $\alpha = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2}\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}'$, si ottiene

$$0 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}')^2 + \frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^4}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}')^2\|\boldsymbol{x}'\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}')^2\,,$$

da cui la tesi. ■

Dimostriamo ora la proprietà d) della norma, usando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'\|^2 &= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' + \|\boldsymbol{x}'\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\, \|\boldsymbol{x}'\| + \|\boldsymbol{x}'\|^2 \\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}'\|)^2\,, \end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza cercata.

Notiamo ancora la seguente **identità del parallelogramma**, di semplice verifica:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{x}'\|^2)\,.$$

Definiamo ora, a partire dalla norma, la "distanza euclidea" tra due vettori $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_N')$:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x_k - x_k')^2}\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \geq 0\,;$

b) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\,;$

c) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})\,;$

d) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'') \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') + d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')\,.$

Quest'ultima viene spesso chiamata "disuguaglianza triangolare"; la dimostriamo:

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'') &= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}''\| \\ &= \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'')\| \\ &\leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| + \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''\| \\ &= d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') + d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')\,. \end{aligned}$$

Spazi metrici

Dato un insieme non vuoto E, una funzione $d : E \times E \to \mathbb{R}$ si chiama "distanza" (su E) se soddisfa alle seguenti proprietà:

a) $d(x, x') \geq 0\,;$

b) $d(x, x') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x'\,;$

c) $d(x, x') = d(x', x)\,;$

d) $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$

(la disuguaglianza triangolare). L'insieme E, dotato della distanza d, si dice "spazio metrico". I suoi elementi verranno spesso chiamati "punti".

Abbiamo visto che $\mathbb{R}^N$, dotato della distanza euclidea, è uno spazio metrico (nel seguito, parlando dello spazio metrico $\mathbb{R}^N$, se non altrimenti specificato sottintenderemo che la distanza sia sempre quella euclidea). Nel caso $N = 1$, abbiamo la distanza usuale su $\mathbb{R}$: $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$.

È però possibile considerare diverse distanze su uno stesso insieme. Ad esempio, presi due vettori $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_N')$, la funzione

$$d_*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{k=1}^{N} |x_k - x_k'|$$

rappresenta anch'essa una distanza in $\mathbb{R}^N$. Lo stesso dicasi per la funzione

$$d_{**}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \max\{|x_k - x_k'| : k = 1, 2, \ldots, N\}\,.$$

Oppure, si può definire la seguente:

$$\hat{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \begin{cases} 0 & \text{se } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}', \\ 1 & \text{se } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'. \end{cases}$$

Anche questa è una distanza, per quanto strana possa sembrare.

Dati $x_0 \in E$ e un numero $\rho > 0$, definiamo la palla aperta di centro x_0 e raggio ρ:

$$B(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) < \rho\} ;$$

analogamente definiamo la palla chiusa

$$\overline{B}(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq \rho\}$$

e la sfera

$$S(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) = \rho\} .$$

In $\mathbb{R}$, ogni intervallo aperto e limitato è una palla aperta e ogni intervallo chiuso e limitato è una palla chiusa: si ha

$$]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right), \quad [a, b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Una sfera in $\mathbb{R}$ è quindi costituita da due soli punti.

In $\mathbb{R}^2$, con la distanza euclidea, una palla è un cerchio: la palla aperta non comprende i punti della circonferenza esterna, la palla chiusa si. Una sfera è semplicemente una circonferenza.

Se in $\mathbb{R}^2$ consideriamo la distanza d_* definita in precedenza, una palla sarà un quadrato, con i lati inclinati di 45 gradi, avente x_0 come punto centrale. Una sfera sarà il perimetro di tale quadrato. Se invece consideriamo la distanza d_{**}, la palla sarà ancora un quadrato, ma con i lati paralleli agli assi cartesiani.

Se invece prendiamo la distanza $\hat{d}$, su un qualsiasi insieme E, allora

$$B(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho \leq 1, \\ E & \text{se } \rho > 1, \end{cases} \qquad \overline{B}(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho < 1, \\ E & \text{se } \rho \geq 1, \end{cases}$$

per cui

$$S(x_0, \rho) = \begin{cases} E \setminus \{x_0\} & \text{se } \rho = 1, \\ \emptyset & \text{se } \rho \neq 1. \end{cases}$$

Un insieme $U \subseteq E$ si dice “intorno” di un punto x_0 se esiste un $\rho > 0$ tale che $B(x_0, \rho) \subseteq U$; in tal caso, il punto x_0 si dice “interno” ad U. L’insieme dei punti interni ad U si chiama “l’interno” di U e si denota con $\mathring{U}$. Chiaramente, si ha sempre $\mathring{U} \subseteq U$. Si dice che U è un “insieme aperto” se coincide con il suo interno, ossia se $\mathring{U} = U$.

Teorema. *Una palla aperta è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Sia $B(x_0, \rho)$ la palla in questione; prendiamo un $x_1 \in B(x_0, \rho)$. Scelto $r > 0$ tale che $r \leq \rho - d(x_0, x_1)$, si ha che $B(x_1, r) \subseteq B(x_0, \rho)$; infatti, se $x \in B(x_1, r)$, allora

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < r + d(x_1, x_0) \leq \rho \,,$$

per cui $x \in B(x_0, \rho)$. Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto x_1 di $B(x_0, \rho)$ è interno a $B(x_0, \rho)$. ■

Consideriamo ora tre esempi particolari: nel primo, l'insieme U coincide con E; nel secondo, U è l'insieme vuoto; nel terzo, esso è costituito da un unico punto.

Ogni punto di E è interno all'insieme E stesso, in quanto ogni palla è per definizione contenuta in E. Quindi, l'interno di E coincide con tutto E, ossia $\mathring{E} = E$. Questo significa che E è un insieme aperto.

L'insieme vuoto non può avere punti interni. Quindi, l'interno di $\emptyset$, non avendo elementi, è vuoto. In altri termini, $\mathring{\emptyset} = \emptyset$, il che significa che $\emptyset$ è anch'esso un insieme aperto.

L'insieme $U = \{x_0\}$, costituito da un unico punto, in generale non è un insieme aperto (ad esempio in $\mathbb{R}^N$ con la distanza euclidea), ma può esserlo in casi particolari (ad esempio, se si considera la distanza $\hat{d}$, ossia quando x_0 è un punto isolato di E).

Si può dimostrare la seguente implicazione:

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \mathring{U}_1 \subseteq \mathring{U}_2 \,.$$

Da essa segue che $\mathring{U}$ è il più grande insieme aperto contenuto in U: se A è un aperto e $A \subseteq U$, allora $A \subseteq \mathring{U}$.

Teorema. *L'interno di un insieme è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Se $\mathring{U}$ è vuoto, la tesi è sicuramente vera. Supponiamo allora che $\mathring{U}$ sia non vuoto. Sia $x_1 \in \mathring{U}$. Allora esiste un $\rho > 0$ tale che $B(x_1, \rho) \subseteq U$. Sia $V = B(x_1, \rho)$, per cui $V \subseteq U$. Ne segue che $\mathring{V} \subseteq \mathring{U}$, quindi, essendo V un insieme aperto, $V \subseteq \mathring{U}$, ossia $B(x_1, \rho) \subseteq \mathring{U}$. Pertanto ogni punto x_1 di $\mathring{U}$ è interno a $\mathring{U}$. ■

Diremo che il punto x_0 è "aderente" all'insieme U se per ogni $\rho > 0$ si ha che $B(x_0, \rho) \cap U \neq \emptyset$. L'insieme dei punti aderenti ad U si chiama "la chiusura" di U e si denota con $\overline{U}$. Chiaramente, si ha sempre $U \subseteq \overline{U}$. Si dice che U è un "insieme chiuso" se coincide con la sua chiusura, ossia se $U = \overline{U}$.

Teorema. *Una palla chiusa è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia $U = \overline{B}(x_0, \rho)$ la palla in questione; voglio dimostrare che $\overline{U} \subseteq U$. A tal fine vedremo che $\mathcal{C}U \subseteq \mathcal{C}\overline{U}$.[6] Prendiamo un $x_1 \in \mathcal{C}U$, ossia $x_1 \notin \overline{B}(x_0, \rho)$. Scelto $r > 0$ tale che $r \leq d(x_0, x_1) - \rho$, si ha che $B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho) = \emptyset$; infatti, se per assurdo esistesse un $x \in B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho)$, allora si avrebbe

$$d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x) + d(x, x_1) < r + \rho \,,$$

in contrasto con la scelta fatta per r. Quindi, $x_1 \notin \overline{U}$, ossia $x_1 \in \mathcal{C}\overline{U}$. ∎

Essendo E il l'insieme universo, ogni punto aderente ad E deve comunque appartenere ad E stesso. Quindi, la chiusura di E coincide con E, ossia $\overline{E} = E$. Questo significa che E è un insieme chiuso.

Notiamo che non esiste alcun punto aderente all'insieme $\emptyset$. Infatti, qualsiasi sia il punto x_0, per ogni $\rho > 0$ si ha che $B(x_0, \rho) \cap \emptyset = \emptyset$. Quindi, la chiusura di $\emptyset$, non avendo elementi, è vuota. In altri termini, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, il che significa che $\emptyset$ è un insieme chiuso.

L'insieme $U = \{x_0\}$, costituito da un unico punto, è sempre un insieme chiuso. Infatti, preso un $x_1 \notin U$, scegliendo $\rho > 0$ tale che $\rho < d(x_0, x_1)$ si ha che $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$, per cui x_1 non è aderente ad U.

Si può dimostrare che

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_2 \,.$$

Da questa implicazione segue che $\overline{U}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene U: se C è un chiuso e $C \supseteq U$, allora $C \supseteq \overline{U}$.

Cercheremo ora di capire le analogie incontrate tra le nozioni di interno e chiusura di un insieme, e quelle di insieme aperto e chiuso.

Teorema. *Valgono le seguenti relazioni:*

$$\overline{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\mathring{U} \,, \qquad (\mathcal{C}U)^{\circ} = \mathcal{C}\overline{U} \,.$$

Dimostrazione. Vediamo la prima uguaglianza. Se $U = E$, allora $\mathcal{C}U = \emptyset$, per cui $\overline{\mathcal{C}U} = \emptyset$; d'altra parte, $\mathring{U} = E$, per cui $\mathcal{C}\mathring{U} = \emptyset$. L'uguaglianza è così verificata in questo caso. Supponiamo ora che sia $U \neq E$, per cui $\mathcal{C}U \neq \emptyset$. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in \overline{\mathcal{C}U} \quad & \Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad B(x, \rho) \cap \mathcal{C}U \neq \emptyset \\ & \Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad B(x, \rho) \not\subseteq U \\ & \Leftrightarrow \quad x \notin \mathring{U} \\ & \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{C}\mathring{U}. \end{aligned}$$

Questo dimostra la prima uguaglianza. Possiamo ora usarla per dedurne la seguente:

$$\mathcal{C}((\mathcal{C}U)^{\circ}) = \overline{\mathcal{C}(\mathcal{C}U)} = \overline{U} \,.$$

Passando ai complementari, si ottiene la seconda uguaglianza. ∎

[6]Denotiamo con $\mathcal{C}U$ il complementare di U in E, ossia l'insieme $E \setminus U$.

Abbiamo quindi che

$$\overline{U} = \mathcal{C}(\mathcal{C}\overline{U}) = \mathcal{C}(\mathcal{C}\mathring{U}), \quad \mathring{U} = \mathcal{C}(\mathcal{C}\mathring{U}) = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{C}U})\,.$$

Come immediati corollari, abbiamo i seguenti.

Corollario. *Un insieme è aperto [chiuso] se e solo se il suo complementare è chiuso [aperto].*

Corollario. *La chiusura di un insieme è un insieme chiuso.*

Funzioni continue

Intuitivamente, una funzione f è "continua" se $f(x)$ varia gradualmente al variare di x nel dominio, cioè quando non si verificano variazioni brusche nei valori della funzione. Per rendere rigorosa questa idea intuitiva, sarà conveniente focalizzare la nostra attenzione fissando un x_0 nel dominio e provando a precisare cosa intendiamo per

$$f \text{ è "continua" in } x_0\,.$$

Procederemo per gradi.

Primo tentativo. *Diremo che f è "continua" in x_0 quando si verifica la cosa seguente:*

se x è vicino a x_0, allora $f(x)$ è vicino a $f(x_0)$.

Osserviamo subito che, sebbene l'idea di continuità vi sia già abbastanza ben formulata, la proposizione precedente non è una definizione accettabile, perché la parola "vicino", che vi compare due volte, non ha un significato preciso. Innanzitutto, per poter misurare quanto vicino sia x a x_0 e quanto vicino sia $f(x)$ a $f(x_0)$, abbiamo bisogno di introdurre delle distanze. Più precisamente, dovremo supporre che il dominio e il codominio della funzione siano due spazi metrici.

Siano quindi E ed F due spazi metrici, con le loro distanze d_E e d_F, rispettivamente. Sia x_0 un punto di E e $f : E \to F$ una funzione. Possiamo riformulare il tentativo di definizione precedente come segue.

Secondo tentativo. *Diremo che f è "continua" in x_0 quando si verifica la cosa seguente:*

se la distanza $d_E(x, x_0)$ è piccola, allora la distanza $d_F(f(x), f(x_0))$ è piccola.

Ci rendiamo subito conto che il problema riscontrato nel primo tentativo non è stato affatto risolto con questo secondo tentativo, in quanto vi compare ora per due volte la parola "piccola", che non ha un significato preciso. Ci chiediamo allora: *quanto piccola* vogliamo che sia la distanza $d_F(f(x), f(x_0))$? L'idea che abbiamo in mente è che questa distanza possa essere resa piccola quanto si voglia (purché la distanza $d(x, x_0)$ sia sufficientemente piccola, s'intende). Per poterla misurare, introdurremo quindi un numero reale positivo, che chiameremo ε, e chiederemo che sia $d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, qualora $d(x, x_0)$ sia sufficientemente piccola. L'arbitrarietà di tale ε ci permetterà di prenderlo piccolo quanto si voglia.

Terzo tentativo. *Diremo che f è "continua" in x_0 quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$,*

se la distanza $d_E(x, x_0)$ è piccola, allora $d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Adesso la parola "piccola" compare una sola volta, mentre la distanza $d_F(f(x), f(x_0))$ viene semplicemente controllata dal numero ε. Quindi, almeno la seconda parte della proposizione ha ora un significato ben preciso. Potremmo allora cercare di fare altrettanto con la distanza $d(x, x_0)$, introducendo un nuovo numero reale positivo, che chiameremo δ, che la controlli.

Quarto tentativo (quello buono!). *Diremo che f è "continua" in x_0 quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un numero $\delta > 0$ per cui,*

se $d_E(x, x_0) < \delta$, allora $d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Quest'ultima proposizione, a differenza delle precedenti, non presenta alcun termine impreciso. Le distanze $d_E(x, x_0)$ e $d_F(f(x), f(x_0))$ sono semplicemente controllate da due numeri positivi δ e ε, rispettivamente. Riscriviamola quindi in modo formale.

Definizione. *Diremo che f è "continua" in x_0 se, comunque preso un numero positivo ε, è possibile trovare un numero positivo δ tale che, se x è un qualsiasi elemento del dominio E che disti da x_0 per meno di δ, allora $f(x)$ dista da $f(x_0)$ per meno di ε. In simboli:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \quad d_E(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \,.$$

In questa formulazione, spesso la scrittura "$\forall x \in E$" verrà sottintesa.

Si può osservare che una o entrambe le disuguaglianze $d_E(x, x_0) < \delta$ e $d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ possono essere sostituite rispettivamente da $d_E(x, x_0) \leq \delta$ e $d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$, ottenendo definizioni che sono tutte tra loro equivalenti. Questo è dovuto al fatto, da un lato, che ε è un *qualunque* numero positivo e, dall'altro lato, che se l'implicazione della definizione vale per un certo numero positivo δ, essa vale a maggior ragione prendendo al posto di quel δ un qualsiasi numero positivo più piccolo.

Una rilettura della definizione di continuità ci mostra che f è continua in x_0 se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \,.$$

Inoltre, è del tutto equivalente considerare una palla chiusa al posto di una palla aperta; risulta inoltre utile la seguente formulazione equivalente, per cui f è continua in x_0 se e solo se:

per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$.

Nel caso in cui la funzione f sia continua in ogni punto x_0 del dominio E, diremo che "f è continua su E", o semplicemente "f è continua".

Vediamo ora alcuni esempi.

1) La funzione costante: per un certo $\bar{c} \in F$, si ha che $f(x) = \bar{c}$, per ogni $x \in E$. Essendo $d_F(f(x), f(x_0)) = d_F(\bar{c}, \bar{c}) = 0$ per ogni $x \in E$, tale funzione è chiaramente continua (ogni scelta di $\delta > 0$ va bene).

2) Supponiamo che x_0 sia un "punto isolato" di E: esiste cioè un $\rho > 0$ per cui non ci sono punti di E che distino da x_0 per meno di ρ, tranne x_0 stesso. Vediamo che, in questo caso, qualsiasi funzione $f : E \to F$ risulta continua in x_0. Infatti, dato $\varepsilon > 0$ qualsiasi, prendendo $\delta = \rho$, avremo che $B(x_0, \delta) = \{x_0\}$, per cui $f(B(x_0, \delta)) = \{f(x_0)\} \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.

3) Siano $E = \mathbb{R}^N$ e $F = \mathbb{R}^N$.[7] Fissato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definita da $f(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$. Vediamo che è continua. Infatti, se $\alpha = 0$, si tratta della funzione costante con valore $\mathbf{0}$, e sappiamo che tale funzione è continua. Sia ora $\alpha \neq 0$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, essendo

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| = \|\alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x}_0\| = \|\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \,,$$

basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ per avere l'implicazione

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon \,.$$

4) Siano $E = \mathbb{R}^N$ e $F = \mathbb{R}$. Vediamo che la funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ è continua su $\mathbb{R}^N$. Questo seguirà facilmente dalla disuguaglianza

$$\Big| \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}'\| \Big| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \,,$$

che ora dimostriamo. Si ha:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\| &= \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') + \boldsymbol{x}'\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| + \|\boldsymbol{x}'\| \,, \\ \|\boldsymbol{x}'\| &= \|(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}\| \,. \end{aligned}$$

Essendo $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| = \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|$, si ha che

$$\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}'\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \qquad \text{e} \qquad \|\boldsymbol{x}'\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \,,$$

da cui la disuguaglianza cercata. A questo punto, considerato un $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e fissato un $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta = \varepsilon$ per avere che

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \Big| \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}_0\| \Big| < \varepsilon \,.$$

5) Siano $E = \mathbb{R}$ e $F = \mathbb{R}$, e consideriamo la "funzione segno" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \text{-1} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \,. \end{cases}$$

[7] Da ora in poi, se non specificato altrimenti, consideremo sempre su $\mathbb{R}^N$ la distanza euclidea. In particolare, su $\mathbb{R}$ avremo la distanza usuale.

Si può vedere che questa funzione è continua in tutti i punti tranne che in $x_0 = 0$. Infatti, se $x_0 \neq 0$, basterà prendere $\delta < |x_0|$ per avere che f è costante sull'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, quindi continua in x_0. Per vedere che f non è continua in 0, fissiamo un $\varepsilon \in]0,1[$; per ogni scelta di $\delta > 0$, è possibile trovare un $x \in]-\delta, \delta[$ tale che $|f(x)| = 1$, per cui $|f(x) - f(0)| > \varepsilon$.

6) La "funzione di Dirichlet" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Questa funzione non è continua, in alcun punto x_0. Infatti, fissato un $\varepsilon \in]0,1[$, siccome sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$, per ogni x_0 e ogni scelta di $\delta > 0$ ci saranno sicuramente un razionale x' e un irrazionale x'' in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$; quindi, a seconda che x_0 sia razionale o irrazionale, si avrà che $|f(x'') - f(x_0)| > \varepsilon$ o $|f(x') - f(x_0)| > \varepsilon$.

Enunciamo ora alcune proprietà delle funzioni continue aventi come codominio $F = \mathbb{R}$.

Teorema. *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0, anche $f + g$ lo è.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la continuità di f e g esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,, \\ d(x, x_0) < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Quindi, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si ha

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon\,.$$

Data l'arbitrarietà di ε, ciò dimostra che $f + g$ è continua in x_0. ■

Teorema. *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0, anche $f \cdot g$ lo è.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Non è restrittivo supporre $\varepsilon \leq 1$, in quanto possiamo sempre porre $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, 1\}$ e procedere con ε' al posto di ε. Per la continuità di f e g esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,, \\ d(x, x_0) < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Notiamo che, essendo $\varepsilon \leq 1$, da $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ segue che $|f(x)| < |f(x_0)| + 1$. Quindi, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si ha

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; & |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| = \\ & = |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \\ & \leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ & \leq (|f(x_0)| + 1) \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ & < (|f(x_0)| + |g(x_0)| + 1)\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Data l'arbitrarietà di ε, ciò dimostra che $f \cdot g$ è continua in x_0. ■

Teorema. *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0, anche $f - g$ lo è.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dai due teoremi precedenti e dal fatto che ogni funzione costante è continua, in quanto $f - g = f + (-1) \cdot g$. ■

Teorema (della permanenza del segno). *Se $g : E \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 e $g(x_0) > 0$, allora esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > 0\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon = g(x_0)$. Per la continuità, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon \;\Rightarrow\; 0 < g(x) < 2g(x_0)\,.$$

■

Naturalmente, un analogo enunciato vale se $g(x_0) < 0$.

Teorema. *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Si noti che, per la proprietà di permanenza del segno, esiste un $\rho > 0$ tale che il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è definito almeno per tutti gli x di E che distano da x_0 per meno di ρ. Essendo $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, basterà dimostrare che $\frac{1}{g}$ è continua in x_0. Fissiamo $\varepsilon > 0$; possiamo supporre senza perdita di generalità che $\varepsilon < \frac{|g(x_0)|}{2}$. Per la continuità di g, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Ma allora, essendo $\varepsilon < \frac{|g(x_0)|}{2}$, anche

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |g(x)| > |g(x_0)| - \varepsilon > \frac{|g(x_0)|}{2}\,.$$

Ne segue che

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)\right| = \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)g(x_0)|} < \frac{2}{|g(x_0)|^2}\varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà de ε, questo dimostra che $\frac{1}{g}$ è continua in x_0. ■

Sappiamo da quanto sopra che le funzioni costanti sono continue, così come la funzione $f(x) = x$. Usando i teoremi precedenti, abbiamo quindi che tutte le funzioni polinomiali sono continue, così come le funzioni razionali, definite dal rapporto di due polinomi. Più precisamente, esse sono continue sul loro dominio, ossia sull'insieme dei punti in cui il denominatore non si annulla.

Vediamo ora come si comporta una funzione composta di due funzioni continue.

Teorema. *Siano $f : E \to F$ continua in x_0 e $g : F \to G$ continua in $f(x_0)$; allora $g \circ f$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Fissato un intorno W di $[g \circ f](x_0) = g(f(x_0))$, per la continuità di g in $f(x_0)$ esiste un intorno V di $f(x_0)$ tale che $g(V) \subseteq W$. Allora, per la continuità di f in x_0, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$. Ne segue che $[g \circ f](U) \subseteq W$. ■

Consideriamo ora, per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$, la funzione "k−esima proiezione" $p_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_N) = x_k \,.$$

Teorema. *Le funzioni p_k sono continue.*

Dimostrazione. Consideriamo un punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0) \in \mathbb{R}^N$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Notiamo che, per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, si ha

$$|x_k - x_k^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (x_j - x_j^0)^2} = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \,,$$

per cui, prendendo $\delta = \varepsilon$, si ha:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \;\Rightarrow\; |p_k(\boldsymbol{x}) - p_k(\boldsymbol{x}_0)| = |x_k - x_k^0| < \varepsilon \,.$$

■

Supponiamo ora $f : E \to \mathbb{R}^M$. Consideriamo le "componenti" della funzione f definite da $f_k = p_k \circ f : E \to \mathbb{R}$, con $k = 1, 2, \ldots, M$, per cui si ha

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_M(x)) \,.$$

Teorema. *La funzione f è continua in x_0 se e solo se lo sono tutte le sue componenti.*

Dimostrazione. Se f è continua in x_0, lo sono anche le f_k in quanto composte di funzioni continue. Viceversa, supponiamo che le componenti di f siano tutte continue in x_0. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k = 1, 2, \ldots, M$ esiste un $\delta_k > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta_k \;\Rightarrow\; |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon \,.$$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_M\}$, si ha

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^{M} (f_j(x) - f_j(x_0))^2} < \sqrt{M}\varepsilon \,,$$

il che, per l'arbitrarietà di ε, completa la dimostrazione. ■

Intervalli e continuità

Chiamiamo "intervallo" un sottoinsieme non vuoto I di $\mathbb{R}$ con la seguente proprietà: comunque presi due suoi elementi α, β, l'insieme I contiene anche tutti i numeri tra essi compresi.

Si può dimostrare che gli intervalli sono di uno dei seguenti tipi, con relativa notazione:

$$
\begin{array}{ll}
[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\} & \text{(chiuso e limitato)}\,, \\
]a,b[= \{x : a < x < b\} & \text{(aperto e limitato)}\,, \\
[a,b[= \{x : a \leq x < b\} & \text{(né aperto né chiuso, limitato)}\,, \\
]a,b] = \{x : a < x \leq b\} & \text{(né aperto né chiuso, limitato)}\,, \\
[a,+\infty[= \{x : x \geq a\} & \text{(chiuso, non limitato superiormente)}\,, \\
]a,+\infty[= \{x : x > a\} & \text{(aperto, non limitato superiormente)}\,, \\
]-\infty,b] = \{x : x \leq b\} & \text{(chiuso, non limitato inferiormente)}\,, \\
]-\infty,b[= \{x : x < b\} & \text{(aperto, non limitato inferiormente)}\,, \\
\mathbb{R}\,, \quad \text{talvolta denotato con }]-\infty,+\infty[\,. &
\end{array}
$$

Nella lista si possono anche includere gli insiemi costituiti da un unico punto, cioè del tipo $[a,a]$. In tal caso, si tratta di un intervallo degenere.

Teorema (di Cantor). *Data una successione di intervalli chiusi e limitati $I_n = [a_n, b_n]$, con $a_n \leq b_n$, tali che*

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots\,,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ che appartiene a tutti gli I_n.

<u>Dimostrazione</u>. Definiamo gli insiemi

$$
\begin{aligned}
A &= \{a_n : n \in \mathbb{N}\}\,, \\
B &= \{b_n : n \in \mathbb{N}\}\,.
\end{aligned}
$$

Preso un elemento a_n di A e un elemento b_m di B (non necessariamente con lo stesso indice), vediamo che $a_n \leq b_m$. Infatti, se $n \leq m$, allora $I_n \supseteq I_m$, per cui $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$. Se invece $n \geq m$, si ha $I_m \supseteq I_n$, per cui $a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$. In ogni caso, $a_n \leq b_m$. Possiamo quindi usare la proprietà di separazione, e troviamo un $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b\,.$$

In particolare, $a_n \leq c \leq b_n$, cioè $c \in I_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

È molto importante la seguente proprietà delle funzioni continue definite su un intervallo.

Teorema (degli zeri). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che*

$$f(a) < 0 < f(b) \quad \textit{oppure} \quad f(a) > 0 > f(b)\,,$$

allora esiste un $c \in]a,b[$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Considereremo il caso $f(a) < 0 < f(b)$, essendo l'altro del tutto analogo. Scriviamo $I_0 = [a,b]$ e consideriamo il punto medio $\frac{a+b}{2}$ dell'intervallo I_0. Se f si annulla in esso, abbiamo trovato il punto c cercato. Altrimenti, $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ o $f(\frac{a+b}{2}) > 0$. Se $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, chiamiamo I_1 l'intervallo $[\frac{a+b}{2}, b]$; se $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, chiamiamo invece I_1 l'intervallo $[a, \frac{a+b}{2}]$. Prendendo ora il punto medio di I_1 e ripetendo il ragionamento, possiamo definire un intervallo I_2 e, per ricorrenza, una successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ tali che

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

e, per ogni n, $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. Per il teorema di Cantor, esiste un $c \in \mathbb{R}$ appartenente a tutti gli intervalli. Dimostriamo che $f(c) = 0$. Per assurdo, se $f(c) < 0$, per la permanenza del segno esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in]c - \delta, c + \delta[$. Ma siccome $b_n - c \le b_n - a_n$ e, per $n \ge 1$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n}$, prendendo $n > \frac{b-a}{\delta}$ si ha che $b_n \in]c - \delta, c + \delta[$. Ma allora dovrebbe essere $f(b_n) < 0$, in contraddizione con quanto sopra. Un ragionamento analogo porta a una contraddizione supponendo $f(c) > 0$. ∎

Come conseguenza del teorema degli zeri, abbiamo che una funzione continua "manda intervalli in intervalli":

Corollario. *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $I \subseteq E$ è un intervallo, allora anche $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Escludendo i casi banali in cui I o $f(I)$ consistono di un unico punto, prendiamo $\alpha, \beta \in f(I)$, con $\alpha < \beta$ e sia γ tale che $\alpha < \gamma < \beta$. Vogliamo vedere che $\gamma \in f(I)$. Consideriamo la funzione $g : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(x) - \gamma\,.$$

Siano a, b in I tali che $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$. Essendo I un intervallo, la funzione g è definita su $[a,b]$ (o $[b,a]$, nel caso in cui $b < a$) ed è ivi continua. Inoltre, $g(a) < 0 < g(b)$ e quindi, per il teorema degli zeri, esiste un $c \in]a,b[$ tale che $g(c) = 0$, ossia $f(c) = \gamma$. ∎

Funzioni monotone

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diremo che una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è:

"crescente" se [$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \le f(x_2)$];

"decrescente" se [$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \ge f(x_2)$];

"strettamente crescente" se [$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$];

"strettamente decrescente" se [$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)$].

Diremo che è "monotona" se è crescente o decrescente; "strettamente monotona" se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Esempio. La funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è strettamente crescente. Il caso $n = 2$ è stato stabilito nel Lemma a pagina 10. Il caso generale si vede per induzione.

Vediamo ora un teorema sulla continuità delle funzioni invertibili.

Teorema. *Siano I e J due intervalli e $f : I \to J$ una funzione invertibile. Allora*

$$f \text{ è continua} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è strettamente monotona} \,.$$

In tal caso, anche $f^{-1} : J \to I$ è strettamente monotona e continua.

Dimostrazione. Supponiamo f continua e, per assurdo, non strettamente monotona. Allora esistono $x_1 < x_2 < x_3$ in I tali che

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) > f(x_3) \,,$$

oppure

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) < f(x_3) \,.$$

(Le uguaglianze non possono valere, essendo la funzione f iniettiva.) Consideriamo il primo caso, l'altro essendo analogo. Scegliendo $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$ e $f(x_2) > \gamma > f(x_3)$, per il corollario al teorema degli zeri si trova che esistono $a \in]x_1, x_2[$ e $b \in]x_2, x_3[$ tali che $f(a) = \gamma = f(b)$, in contraddizione con l'iniettività di f.

Supponiamo ora f strettamente monotona, ad esempio crescente: l'altro caso è del tutto analogo. Preso $x_0 \in I$, vogliamo dimostrare che f è continua in x_0. Considereremo due casi distinti.

Supponiamo dapprima che x_0 non sia un estremo di I, e pertanto $y_0 = f(x_0)$ non sia un estremo di J. Fissiamo $\varepsilon > 0$; possiamo supporre senza perdita di generalità che $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subseteq J$. Poniamo $x_1 = f^{-1}(y_0 - \varepsilon)$ e $x_2 = f^{-1}(y_0 + \varepsilon)$, per cui $x_1 < x_0 < x_2$. Essendo $f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon$ e $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$, prendendo $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$, si ha

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; x_1 < x < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x) < f(x_2) \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \,,$$

per cui f è continua in x_0.

Consideriamo ora l'eventualità che $x_0 = \min I$ e quindi $y_0 = \min J$. Fissiamo $\varepsilon > 0$; possiamo supporre senza perdita di generalità che $[y_0, y_0 + \varepsilon] \subseteq J$. Poniamo come sopra $x_2 = f^{-1}(y_0 + \varepsilon)$. Essendo $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$, prendendo $\delta = x_2 - x_0$, si ha (per ogni $x \in I$)

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; x_0 < x < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_0) < f(x) < f(x_2) \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \,,$$

per cui f è continua in x_0. Il caso eventuale in cui $x_0 = \max I$ si tratta in modo analogo.

Infine, si può vedere che

$$\begin{array}{rcl} f \;\; \text{strettamente crescente} & \Rightarrow & f^{-1} \;\; \text{strettamente crescente}\,, \\ f \;\; \text{strettamente decrescente} & \Rightarrow & f^{-1} \;\; \text{strettamente decrescente}\,. \end{array}$$

Quindi, se f è strettamente monotona, anche f^{-1} lo è, e pertanto è anche continua. ■

La funzione esponenziale

Indichiamo con $\mathbb{R}_P$ l'insieme dei numeri reali positivi:

$$\mathbb{R}_P =]0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} .$$

Enunciamo senza dimostrare il seguente risultato.

Teorema. *Dato $a > 0$, esiste un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_P$ tale che*
(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, *per ogni* x_1, x_2 *in* $\mathbb{R}$,
(ii) $f(1) = a$.
Se inoltre $a \neq 1$, tale funzione è invertibile.

La funzione f si chiama "esponenziale di base a" e si denota con $\exp_a$. Se $a \neq 1$, la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_P \to \mathbb{R}$ si chiama "logaritmo di base a" e si denota con $\log_a$. Per quanto visto sopra, è una funzione continua. Si ha quindi, per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_P$,

$$\exp_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y) .$$

Dalle proprietà dell'esponenziale
(i) $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \exp_a(x_2)$,
(ii) $\exp_a(1) = a$,
seguono le corrispondenti proprietà del logaritmo
(i') $\log_a(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)$,
(ii') $\log_a(a) = 1$.

Siccome la funzione costante $f(x) = 1$ verifica (i) e (ii) con $a = 1$, si ha che $f = \exp_1$; in altri termini, $\exp_1(x) = 1$ per ogni x.

Vediamo ora alcune proprietà della funzione esponenziale. Osserviamo innanzitutto che, siccome $\exp_a(1) = \exp_a(1 + 0) = \exp_a(1) \exp_a(0)$, si ha che

$$\exp_a(0) = 1 .$$

Dimostriamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n .$$

Procediamo per induzione. Se $n = 0$, vediamo che

$$\exp_a(0x) = 1 , \quad (\exp_a(x))^0 = 1 ,$$

per cui l'uguaglianza è sicuramente verificata. Supponiamo ora che la formula valga per un certo $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned} \exp_a((n+1)x) &= \exp_a(nx + x) = \exp_a(nx) \exp_a(x) \\ &= (\exp_a(x))^n \exp_a(x) = (\exp_a(x))^{n+1} , \end{aligned}$$

per cui essa vela anche per $n + 1$. La dimostrazione è così completa.

Prendendo $x = 1$, vediamo che

$$\exp_a(n) = a^n ,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per queste analogie con le potenze, spesso si scrive a^x invece di $\exp_a(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se prendiamo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e scriviamo

$$a = \exp_a(1) = \exp_a\left(n\,\frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n ,$$

vediamo che $\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)$ è quel numero $u \in \mathbb{R}_P$ che risolve l'equazione $u^n = a$. Tale u è la "radice n-esima di a" e si scrive $u = \sqrt[n]{a}$: si ha quindi

$$\exp_a\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}\,.$$

Da qui, se $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \exp_a\left(m\frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

Dimostriamo ora che, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, si ha[8]

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

Infatti, se $b = \sqrt[n]{a}$, si ha $a^m = (b^n)^m = b^{nm} = (b^m)^n$, da cui $b^m = \sqrt[n]{a^m}$.

D'altra parte, scrivendo

$$1 = \exp_a(0) = \exp_a(x - x) = \exp_a(x)\exp_a(-x)\,,$$

vediamo che vale la formula

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}\,.$$

In particolare, se $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\exp_a\left(\frac{-m}{n}\right) = \frac{1}{\exp_a\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} = (\sqrt[n]{a})^{-m} = \sqrt[n]{a^{-m}}\,.$$

Possiamo così concludere che

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}\,, \qquad \text{per ogni } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\,.$$

Se $a \neq 1$, la funzione esponenziale $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_P$, è continua e invertibile, quindi strettamente monotona. Siccome $\exp_a(0) = 1$ e $\exp_a(1) = a$, avremo che

$$\exp_a \text{ è}: \begin{cases} \text{strettamente crescente} & \text{se } a > 1; \\ \text{strettamente decrescente} & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Lo stesso dicasi per il logaritmo $\log_a$.

[8] Qui usiamo la ben nota convenzione $x^{-m} = (x^{-1})^m$, per ogni $x \neq 0$. Supponiamo note le proprietà delle potenze intere.

Enunciamo infine le seguenti tre proprietà dell'esponenziale:

$$(ab)^x = a^x b^x \,, \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \,, \qquad (a^y)^x = a^{yx} \,.$$

La prima segue dal fatto che la funzione $f(x) = a^x b^x$ verifica la proprietà (i) e $f(1) = ab$, per cui $f = \exp_{ab}$. La seconda è analoga, prendendo $f(x) = \frac{1}{a^x}$; per la terza, si prenda $f(x) = a^{yx}$.

Concludiamo con due utili proprietà del logaritmo:

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \,, \quad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \,.$$

Verifichiamo la prima: poniamo $u = \log_a(x^y)$ e $v = \log_a(x)$. Allora $a^u = x^y$ e $a^v = x$, da cui $a^u = (a^v)^y = a^{vy}$. Ne segue che $u = vy$, che è quanto volevasi dimostrare. Un procedimento analogo permette di verificare anche la seconda.

Le funzioni trigonometriche

Vogliamo ora introdurre le funzioni trigonometriche, in un modo analogo a quanto fatto per la funzione esponenziale.

Dato $T > 0$, una funzione $F : \mathbb{R} \to \Omega$ (qui Ω è un insieme qualsiasi) si dice "periodica di periodo T" se

$$F(x + T) = F(x) \,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Chiaramente, se T è un periodo per la funzione F, anche $2T, 3T, \ldots$ lo sono. Diremo che T è il "periodo minimo" se non ci sono periodi più piccoli. Introduciamo l'insieme

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \,.$$

Si tratta della circonferenza centrata nell'origine, di raggio 1, pensata come sottoinsieme del campo complesso. Enunciamo senza dimostrare il seguente risultato.

Teorema. *Dato $T > 0$, esiste un'unica funzione $h_T : \mathbb{R} \to S^1$, continua e periodica di periodo minimo T, tale che*
(j) $h_T(x_1 + x_2) = h_T(x_1) h_T(x_2)$, per ogni x_1, x_2 in $\mathbb{R}$,
(jj) $h_T\left(\frac{T}{4}\right) = i$.

La funzione h_T si chiama "funzione circolare di base T". Pensando al codominio S^1 come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, la funzione h_T ha due componenti, che denotiamo con $\cos_T$ e $\sin_T$: sono il "coseno di base T" e il "seno di base T", rispettivamente. Scriveremo quindi

$$h_T(x) = (\cos_T(x), \sin_T(x)) \,, \qquad \text{oppure} \qquad h_T(x) = \cos_T(x) + i \, \sin_T(x) \,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tali funzioni sono continue e periodiche di periodo T, e dalle proprietà della funzione circolare ricaviamo le seguenti:

(a) $(\cos_T(x))^2 + (\sin_T(x))^2 = 1\,,$
(b) $\cos_T(x_1 + x_2) = \cos_T(x_1)\cos_T(x_2) - \sin_T(x_1)\sin_T(x_2)\,,$
(c) $\sin_T(x_1 + x_2) = \sin_T(x_1)\cos_T(x_2) + \cos_T(x_1)\sin_T(x_2)\,,$
(d) $\cos_T\left(\frac{T}{4}\right) = 0\,, \quad \sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1\,.$

Concentriamo ora l'attenzione sull'intervallo $[0, T[$. Scrivendo

$$i = h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = h_T\left(0 + \tfrac{T}{4}\right) = h_T(0)h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = h_T(0)i\,,$$

ne ricaviamo che $h_T(0) = 1$. Inoltre,

$$h_T\left(\tfrac{T}{2}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{4} + \tfrac{T}{4}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{4}\right)h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = i^2 = -1\,,$$

mentre

$$h_T\left(\tfrac{3T}{4}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{2} + \tfrac{T}{4}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{2}\right)h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = (-1)i = -i\,,$$

Riassumendo:

$$\begin{array}{ll} \cos_T(0) = 1\,, & \sin_T(0) = 0\,, \\ \cos_T\left(\frac{T}{4}\right) = 0\,, & \sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1\,, \\ \cos_T\left(\frac{T}{2}\right) = -1\,, & \sin_T\left(\frac{T}{2}\right) = 0\,, \\ \cos_T\left(\frac{3T}{4}\right) = 0\,, & \sin_T\left(\frac{3T}{4}\right) = -1\,. \end{array}$$

Osserviamo ora che, dalla

$$1 = h_T(0) = h_T(x - x) = h_T(x)h_T(-x)\,,$$

abbiamo che $h_T(-x) = h_T(x)^{-1} = h_T(x)^*$, essendo $|h_T(x)| = 1$. Quindi,

$$\cos_T(-x) = \cos_T(x)\,, \quad \sin_T(-x) = -\sin_T(x)\,,$$

ossia la funzione $\cos_T$ è pari, mentre $\sin_T$ è dispari.

Dimostreremo ora che $\widetilde{h}_T : [0, T[\to S^1$, la restrizione della funzione circolare h_T all'intervallo $[0, T[$, è biiettiva. Vediamo dapprima l'iniettività. Siano $\alpha < \beta$ in $[0, T[$. Se per assurdo fosse $h_T(\alpha) = h_T(\beta)$, si avrebbe che

$$h_T(\beta - \alpha) = h_T(\beta)h_T(-\alpha) = \frac{h_T(\beta)}{h_T(\alpha)} = 1\,.$$

Ma allora

$$h_T(x + (\beta - \alpha)) = h_T(x)h_T(\beta - \alpha) = h_T(x)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui $\beta - \alpha$ sarebbe un periodo di h_T minore di T, mentre sappiamo che T è il periodo minimo.

Vediamo ora che

$$\cos_T(x)\begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{4} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{4} < x < \frac{3T}{4} \\ > 0 & \text{se } \frac{3T}{4} < x < T \end{cases}, \qquad \sin_T(x)\begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{2} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{2} < x < T \end{cases}.$$

Ad esempio, per $x \in]0, \frac{T}{2}[$, non si può certamente avere $\sin_T(x) = 0$, perchè altrimenti i valori in x di $\cos_T$, $\sin_T$ coinciderebbero con i valori in 0 o in $\frac{T}{2}$, mentre abbiamo visto che, se per $\alpha, \beta \in [0, T[$ si ha $\cos_T(\alpha) = \cos_T(\beta)$ e $\sin_T(\alpha) = \sin_T(\beta)$, allora $\alpha = \beta$. Pertanto, per la continuità, $\sin_T$ dovrà essere sempre positiva o sempre negativa in $]0, \frac{T}{2}[$ (teorema degli zeri). Essendo $\sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1$, deve essere sempre positiva.

Per concludere, dimostriamo che $\tilde{h}_T$ è suriettiva (abbiamo già dimostrato prima che è iniettiva). Prendiamo un punto $P = (X_1, X_2) \in S^1$. Si ha che $X_1 \in [-1, 1]$. I due casi in cui $X_1 = -1$ o $X_1 = 1$ si trattano immediatamente, essendo $h_T(\frac{T}{2}) = (-1, 0)$ e $h_T(0) = (1, 0)$. Supponiamo quindi che sia $X_1 \in]-1, 1[$. Sappiamo che $\cos_T(\frac{T}{2}) = -1$, $\cos_T(0) = 1$ e che $\cos_T$ è una funzione continua e $T-$periodica. Per il corollario al teorema degli zeri, esiste un $\bar{x} \in]0, \frac{T}{2}[$ tale che $\cos_T(\bar{x}) = X_1$. Allora

$$| \sin_T(\bar{x})| = \sqrt{1 - (\cos_T(\bar{x}))^2} = \sqrt{1 - X_1^2} = |X_2| \, .$$

Abbiamo due possibilità: o $\sin_T(\bar{x}) = X_2$, per cui $h_T(\bar{x}) = P$, oppure $\sin_T(\bar{x}) = -X_2$, nel qual caso

$$h_T(T - \bar{x}) = h_T(-\bar{x}) = h_T(\bar{x})^* = (X_1, X_2) = P \, .$$

Essendo $T - \bar{x} \in]\frac{T}{2}, T[$, ciò mostra che $\tilde{h}_T$ è suriettiva.

Altri esempi di funzioni continue

Definiamo la funzione "tangente di base T":

$$\tan_T(x) = \frac{\sin_T(x)}{\cos_T(x)} \, .$$

Il suo dominio naturale è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{T}{4} + k\frac{T}{2} \, , \, k \in \mathbb{Z}\}$. Essendo seno e coseno funzioni continue, anche la tangente lo è (sul suo dominio). Inoltre, essa è periodica: il suo periodo minimo è $\frac{T}{2}$.

Sono interessanti le "funzioni iperboliche":

$$\cosh_a(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \, , \qquad \sinh_a(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} \, ,$$

con $a > 0$ fissato. Esse soddisfano le seguenti proprietà, di facile verifica:

(a) $(\cosh_a(x))^2 - (\sinh_a(x))^2 = 1$,
(b) $\cosh_a(x_1 + x_2) = \cosh_a(x_1)\cosh_a(x_2) + \sinh_a(x_1)\sinh_a(x_2)$,
(c) $\sinh_a(x_1 + x_2) = \sinh_a(x_1)\cosh_a(x_2) + \cosh_a(x_1)\sinh_a(x_2)$.

Ricordiamo qui le analoghe proprietà delle funzioni trigonometriche:

(a) $(\cos_T(x))^2 + (\sin_T(x))^2 = 1$,
(b) $\cos_T(x_1 + x_2) = \cos_T(x_1)\cos_T(x_2) - \sin_T(x_1)\sin_T(x_2)$,
(c) $\sin_T(x_1 + x_2) = \sin_T(x_1)\cos_T(x_2) + \cos_T(x_1)\sin_T(x_2)$.

Queste analogie non sono affatto casuali, essendo le funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche imparentate rispettivamente con la funzione circolare, un omomorfismo tra $(\mathbb{R},+)$ e $(S^1,\cdot)$, e la funzione esponenziale, un omomorfismo tra $(\mathbb{R},+)$ e $(\mathbb{R}_P,\cdot)$.

Analogamente a quanto visto sopra, si definisce la funzione "tangente iperbolica":

$$\tanh_a(x)=\frac{\sinh_a(x)}{\cosh_a(x)}\,.$$

Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$, ed è ivi continua.

La nozione di limite

Consideriamo due spazi metrici E,F, un punto x_0 di E e una funzione

$$f:E\to F\,,\qquad \text{oppure}\qquad f:E\setminus\{x_0\}\to F\,,$$

non necessariamente definita in x_0.

Definizione. *Se esiste un $l\in F$ tale che la funzione $\tilde f:E\to F$, definita da*

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq x_0\,,\\ l & \text{se } x=x_0\,,\end{cases}$$

risulti continua in x_0, si dice che l è il "limite di f in x_0", o anche "limite di $f(x)$ per x che tende a x_0" e si scrive

$$l=\lim_{x\to x_0}f(x)\,.$$

In altri termini, si ha che l è il limite di f in x_0 se

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\ \forall x\in E\quad 0<d(x,x_0)<\delta\ \Rightarrow\ d(f(x),l)<\varepsilon\,,$$

o equivalentemente,

$$\forall V,\ \text{intorno di } l\qquad \exists U,\ \text{intorno di } x_0:\quad f(U\setminus\{x_0\})\subseteq V.$$

Talvolta si scrive anche $f(x)\to l$ per $x\to x_0$.

Sappiamo che, se x_0 è un punto isolato, ogni funzione risulterà continua in x_0. Il problema non presenta pertanto alcun interesse in questo caso. Supporremo quindi che x_0 non sia un punto isolato, ossia che x_0 sia un "punto di accumulazione" di E: ogni intorno di x_0 contiene punti di E distinti da x_0 stesso.[9] Nel seguito, supporremo sempre che x_0 sia un punto di accumulazione di E.

Per cominciare, verifichiamo l'unicità del limite.

[9]Un semplice ragionamento mostra che, in questo caso, ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E. Trovatone uno, x_1, si prende un intorno di x_0 che non lo contenga, nel quale se ne può trovare un secondo, x_2, e così via...

Teorema. *Se esiste, il limite di f in x_0 è unico.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo per assurdo che ce ne siano due diversi, l e l'. Prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}d(l,l')$. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x,x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d(f(x),l) < \varepsilon\,,$$

ed esiste un $\delta' > 0$ tale che

$$0 < d(x,x_0) < \delta' \ \Rightarrow\ d(f(x),l') < \varepsilon\,.$$

Sia $x \neq x_0$ tale che $d(x,x_0) < \delta$ e $d(x,x_0) < \delta'$ (tale x esiste perché x_0 è di accumulazione). Allora

$$d(l',l) \leq d(l,f(x)) + d(f(x),l') < 2\varepsilon = d(l',l)\,,$$

una contraddizione. ■

Il seguente teorema è una riformulazione del legame stretto che intercorre tra i concetti di limite e di continuità.

Teorema. *Considerata la funzione $f : E \to F$, si ha che*

$$f \text{ è continua in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. In questo caso, si ha che la funzione $\tilde{f}$ coincide con f. ■

Esempi. 1. Cominciamo con la funzione $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \sin_T\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Se $x_0 = 0$, il limite di f non esiste, perchè in ogni intorno di 0 ci sono valori di x per cui $f(x) = 1$ e valori di x per cui $f(x) = -1$.

2. Dimostriamo invece che

$$\lim_{x\to 0} x\sin_T\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,.$$

Per far questo, è utile osservare che

$$\left|x\sin_T\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|\,, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Ecco allora che, fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta = \varepsilon$ per avere che

$$0 < |x-0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-0| < \varepsilon\,.$$

Un'ultima osservazione generale, che potrebbe essere utile in seguito: si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} d(f(x),l) = 0\,.$$

Alcune proprietà

Iniziamo a vedere le proprietà dei limiti che vengono direttamente ereditate dalle funzioni continue. Nei due teoremi seguenti, con relativo corollario, le funzioni f e g sono definite su E o su $E \setminus \{x_0\}$, indifferentemente, e hanno valori in $F = \mathbb{R}$.

Teorema (della permanenza del segno). *Se*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) > 0\,,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > 0\,.$$

Analogamente, se

$$\lim_{x \to x_0} g(x) < 0\,,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) < 0\,.$$

Corollario. *Se $g(x) \leq 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora, qualora il limite esista, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \leq 0\,.$$

Analogamente, se $g(x) \geq 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora, qualora il limite esista, si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \geq 0\,.$$

Naturalmente, si hanno enunciati analoghi qualora g sia di segno opposto.

Teorema. *Se*

$$l_1 = \lim_{x \to x_0} f(x)\,, \quad l_2 = \lim_{x \to x_0} g(x)\,,$$

allora

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2\,,\\
&\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2\,,\\
&\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = l_1 l_2\,;
\end{aligned}$$

se $l_2 \neq 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}\,.$$

Consideriamo ora una funzione composta $g \circ f$. Abbiamo due possibili situazioni.

Teorema 1. *Sia $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,.$$

Se $g : F \to G$ è continua in l, allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l)\,.$$

In altri termini,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))\,.$$

Dimostrazione. Riguardando la definizione di limite, si ha che $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ ivi definita è continua in x_0 e g è continua in $l = \tilde{f}(x_0)$. Pertanto, $g \circ \tilde{f}$ è continua in x_0, da cui

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(x_0)) = g(l)\,.$$

■

Teorema 2. *Sia $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,.$$

Supponiamo che l sia un punto di accumulazione di F e che la funzione

$$g : F \to G\,, \quad \textit{oppure} \quad g : F \setminus \{l\} \to G\,,$$

non necessariamente definita in l, sia tale che

$$\lim_{y \to l} g(y) = L\,.$$

Se $f(x) \neq l$ per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo nuovamente la funzione $\tilde{f} : E \to F$, continua in x_0 con $\tilde{f}(x_0) = l$. Analogamente, consideriamo la funzione $\tilde{g} : F \to G$ così definita:

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} g(y) & \text{se } y \neq l\,, \\ L & \text{se } y = l\,. \end{cases}$$

Essa è continua in l con $\tilde{g}(l) = L$. Consideriamo la funzione composta $\tilde{g} \circ \tilde{f}$, che per quanto sopra è continua in x_0 con $\tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = \tilde{g}(l) = L$. Essendo $f(x) \neq l$ per ogni x, si ha che, per $x \in E \setminus \{x_0\}$,

$$g(f(x)) = \tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))\,,$$

e pertanto,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{x \to x_0} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = L\,.$$

■

Alcune considerazioni sull'ultimo teorema dimostrato. Si noti che la sua conclusione si riassume con la formula

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to \lim\limits_{x\to x_0} f(x)} g(y)\,.$$

Spesso si dice che si è operato il "cambio di variabile $y = f(x)$". Riguardando inoltre le ipotesi dello stesso teorema, si vede subito che è sufficiente richiedere che sia $f(x) \neq l$ per gli x tali che $0 < d(x, x_0) < \delta$. Ciò è dovuto al fatto che la nozione di limite è, in un certo senso, di tipo "locale". Questa osservazione vale in generale e verrà spesso usata in seguito.

Esempi. 1. Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0} \cos\Big(x \sin\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = 1\,.$$

In effetti, se $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x \sin(1/x)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $g(y) = \cos(y)$, sappiamo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, e che g è continua. Per il Teorema 1,

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = g\Big(\lim_{x\to 0} f(x)\Big) = g(0) = 1\,.$$

2. Sia ora f come nell'esempio precedente, e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0\,, \\ 2 & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

Si può vedere che, in ogni intorno di $x_0 = 0$, la funzione $g(f(x))$ assume infinite volte il valore 1 e infinite volte il valore 2. Pertanto, in questo caso,

$$\textit{il limite } \lim_{x\to 0} g(f(x)) \textit{ non esiste.}$$

3. Sia ora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $g(z) = z \sin(1/z)$. Il Teorema 2 qui può essere applicato per concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x, y)) = \lim_{z\to \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)} g(z) = \lim_{z\to 0} g(z) = 0\,.$$

Ancora sul limite

Finora abbiamo considerato due spazi metrici E, F, un punto x_0 di accumulazione per E e una funzione $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$. Siccome l'eventuale valore di f in x_0 è ininfluente ai fini dell'esistenza o meno del limite, nonchè del suo effettivo valore, da ora in poi per semplicità considereremo solo il caso $f : E \setminus \{x_0\} \to F$.

Si può verificare che tutte le considerazioni fatte continuano a valere per una funzione $f : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \to F$, con $\widehat{E} \subseteq E$, purché x_0 sia di accumulazione per $\widehat{E}$: ogni intorno di x_0 deve contenere infiniti punti di $\widehat{E}$.

Sia ora $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, e sia $\widehat{E} \subseteq E$. Possiamo considerare la restrizione di f a $\widehat{E} \setminus \{x_0\}$: è la funzione $\hat{f} : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \to F$ i cui valori coincidono con quelli di f: si ha $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in \widehat{E} \setminus \{x_0\}$. Talvolta si scrive $\hat{f} = f|_{\widehat{E}}$.

Teorema. *Se esiste il limite di f in x_0 e x_0 è di accumulazione anche per $\widehat{E}$, allora esiste anche il limite di $\hat{f}$ in x_0 e ha lo stesso valore:*

$$\lim_{x \to x_0} \hat{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) .$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di $\hat{f}$. ■

Il teorema precedente viene spesso usato per stabilire la non esistenza del limite per la funzione f: a tal scopo, è sufficiente trovare due diverse restrizioni lungo le quali i valori del limite differiscono.

Esempi. 1. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} ,$$

non ha limite per $(x,y) \to (0,0)$, come si vede considerando le restrizioni alle due rette $\{(x,y) : x = 0\}$ e $\{(x,y) : x = y\}$.

2. Più sorprendente è la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} ,$$

per la quale le restrizioni a tutte le rette passanti per $(0,0)$ hanno limite 0, ma la restrizione alla parabola $\{(x,y) : y = x^2\}$ vale costantemente $\frac{1}{2}$.

3. Dimostriamo invece che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0 .$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Dopo aver verificato che

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2) ,$$

risulta naturale prendere $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, per avere che

$$d((x,y),(0,0)) < \delta \;\Rightarrow\; \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon .$$

Sia ora $E \subseteq \mathbb{R}$. Possiamo considerare le due restrizioni $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2$ agli insiemi $\widehat{E}_1 = E \cap]-\infty, x_0]$ e $\widehat{E}_2 = E \cap [x_0 + \infty[$. Se x_0 è di accumulazione per $\widehat{E}_1$, chiameremo “limite sinistro” di f, quando esiste, il limite di $\hat{f}_1(x)$ per x che tende a x_0; lo denoteremo con

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) .$$

Analogamente, se x_0 è di accumulazione per $\widehat{E}_2$, chiameremo “limite destro” di f, quando esiste, il limite di $\hat{f}_2(x)$ per x che tende a x_0; lo denoteremo con

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) .$$

Teorema. *Se x_0 è di accumulazione per $\widehat{E}_1$ e per $\widehat{E}_2$, il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 esiste se e solo se esistono sia il limite sinistro che il limite destro e hanno lo stesso valore.*

Dimostrazione. Sappiamo già che, se esiste il limite, tutte le restrizioni devono avere lo stesso limite. Viceversa, supponiamo che esistano e coincidano i limiti sinistro e destro, e sia ℓ il loro valore. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Allora esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che, se $x \in E$,

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad d(f(x), \ell) < \varepsilon ,$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta_2 \quad \Rightarrow \quad d(f(x), \ell) < \varepsilon .$$

Preso $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, abbiamo quindi che, se $x \neq x_0$,

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), \ell) < \varepsilon ,$$

per cui il limite di f in x_0 esiste ed è uguale a ℓ. ∎

Esempio. La funzione “segno”, ossia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{-1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

non ha limite in $x_0 = 0$, essendo che $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

Consideriamo ora il caso in cui E è uno spazio metrico qualunque ed $F = \mathbb{R}$. Risulterà talvolta utile il seguente “teorema dei due carabinieri”.

Teorema. *Supponiamo di avere due funzioni f_1, f_2 per cui*

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = l .$$

Se $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ è tale che, per ogni x,

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) ,$$

allora
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l\,.$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$0 < d(x,x_0) < \delta_1 \;\Rightarrow\; l-\varepsilon < f_1(x) < l+\varepsilon\,,$$
$$0 < d(x,x_0) < \delta_2 \;\Rightarrow\; l-\varepsilon < f_2(x) < l+\varepsilon\,.$$

Se $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, allora

$$0 < d(x,x_0) < \delta \;\Rightarrow\; l-\varepsilon < f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) < l+\varepsilon\,,$$

il che dimostra la tesi. ■

Corollario. *Se*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\,,$$
ed esiste un $C > 0$ tale che $|g(x)| \le C$ per ogni x, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$-C|f(x)| \le f(x)g(x) \le C|f(x)|\,,$$

e il risultato segue dal teorema precedente, tenuto conto che si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0\,,$$

prendendo $f_1(x) = -C|f(x)|$ e $f_2(x) = C|f(x)|$. ■

Siamo infine interessati a studiare il limite di una funzione $f : E\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}^M$, dove x_0 è un punto di accumulazione di uno spazio metrico E. Consideriamo le sue componenti $f_k : E\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ di f, con $k = 1,2,\dots,M$, per cui si ha:
$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x))\,.$$

Teorema. *Il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = \boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^M$ esiste se e solo se esistono i limiti $\lim_{x\to x_0} f_k(x) = l_k \in \mathbb{R}$, per ogni $k = 1,2,\dots,M$. In tal caso, si ha $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \dots, l_M)$. Vale quindi la formula*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = (\lim_{x\to x_0} f_1(x), \lim_{x\to x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x\to x_0} f_M(x))\,.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema sulla continuità delle componenti di una funzione continua. ■

La retta ampliata

Consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to]-1,1[$, definita da

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Si tratta di una funzione invertibile, con inversa $\varphi^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$, definita da

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Possiamo allora definire una nuova distanza su $\mathbb{R}$:

$$\tilde{d}(x,x') = |\varphi(x) - \varphi(x')|.$$

Per la nuova distanza, la palla aperta di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio ρ è data da

$$\widetilde{B}(x_0,\rho) = \{x : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho\}.$$

È importante notare che gli intorni di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ rimangono gli stessi di quelli definiti dalla distanza usuale in $\mathbb{R}$. Infatti, essendo φ continua in x_0, per ogni $\rho_1 > 0$ esiste un $\rho_2 > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho_1,$$

ossia

$$]x_0 - \delta_2, x_0 + \rho_2[\subseteq \widetilde{B}(x_0,\rho_1).$$

Viceversa, essendo φ^{-1} continua in $y_0 = \varphi(x_0) \in]-1,1[$, per ogni $\rho_1 > 0$ esiste un $\rho_2 > 0$ tale che

$$|y - y_0| < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad y \in]-1,1[\quad \text{e} \quad |\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y_0)| < \rho_1;$$

In particolare, prendendo $y = \varphi(x)$,

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \in]-1,1[\quad \text{e} \quad |x - x_0| < \rho_1,$$

ossia

$$\widetilde{B}(x_0,\rho_2) \subseteq]x_0 - \rho_1, x_0 + \rho_1[.$$

Da quanto visto, si deduce che ogni intorno per la nuova distanza è anche intorno per la vecchia distanza, e viceversa.

Introduciamo ora il nuovo insieme $\widetilde{\mathbb{R}}$, definito come unione di $\mathbb{R}$ e di due nuovi elementi, che indicheremo con $-\infty$ e $+\infty$:

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

L'insieme $\widetilde{\mathbb{R}}$ risulta totalmente ordinato se si mantiene l'ordine esistente tra coppie di numeri reali e si pone inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x < +\infty.$$

Consideriamo la funzione $\tilde{\varphi} : \widetilde{\mathbb{R}} \to [-1,1]$, definita da

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = -\infty\,, \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}\,, \\ 1 & \text{se } x = +\infty\,. \end{cases}$$

Essa è invertibile, con inversa $\tilde{\varphi}^{-1} : [-1,1] \to \widetilde{\mathbb{R}}$ definita da

$$\tilde{\varphi}^{-1}(y) = \begin{cases} -\infty & \text{se } y = -1\,, \\ \varphi^{-1}(y) & \text{se } y \in]-1,1[\,, \\ +\infty & \text{se } y = 1\,. \end{cases}$$

Definiamo, per $x, x' \in \widetilde{\mathbb{R}}$,

$$\tilde{d}(x,x') = |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x')|\,;$$

si verifica facilmente che $\tilde{d}$ è una distanza su $\widetilde{\mathbb{R}}$. In questo modo, $\widetilde{\mathbb{R}}$ risulta uno spazio metrico. Vediamo ad esempio cos'è una palla aperta centrata in $+\infty$:

$$B(+\infty,\rho) = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : |\tilde{\varphi}(x) - 1| < \rho\} = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : \tilde{\varphi}(x) > 1 - \rho\}\,,$$

e quindi

$$B(+\infty,\rho) = \begin{cases} \widetilde{\mathbb{R}} & \text{se } \rho > 2\,, \\ ]-\infty,+\infty] & \text{se } \rho = 2\,, \\ ]\varphi^{-1}(1-\rho),+\infty] & \text{se } \rho < 2\,, \end{cases}$$

dove abbiamo usato le notazioni

$$]a,+\infty] = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : x > a\} =]a,+\infty[\cup \{+\infty\}\,.$$

Possiamo quindi affermare che un intorno di $+\infty$ è un insieme che contiene, oltre al punto $+\infty$, un intervallo del tipo $]\alpha,+\infty[$, per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Analogamente, un intorno di $-\infty$ è un insieme che contiene, oltre a $-\infty$, un intervallo del tipo $]-\infty,\beta[$, per un certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora come si traduce la definizione di limite in alcuni casi in cui compaiono gli elementi $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio, sia $E \subseteq \mathbb{R}$, F uno spazio metrico e $f : E \to F$ una funzione. Considerando E come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$, si ha che $+\infty$ è punto di accumulazione per E se e solo se E non è limitato superiormente. In tal caso, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } l \ \ \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &\qquad\qquad f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \ \Rightarrow \ d(f(x),l) < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Analogamente, se E non è limitato inferiormente, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \quad x < \beta \ \Rightarrow \ d(f(x),l) < \varepsilon\,.$$

Si noti che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(-x) = l\,.$$

Vediamo ora il caso in cui E sia uno spazio metrico ed $F = \mathbb{R}$, considerato come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$. Supponiamo che x_0 sia di accumulazione per E e consideriamo una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, o $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \;\; \exists U \text{ intorno di } x_0 : \\
&\qquad f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha\,;
\end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < \beta\,.$$

Si noti che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (-f(x)) = -\infty\,.$$

Le situazioni considerate in precedenza possono talvolta presentarsi assieme. Ad esempio, se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente ed $F = \mathbb{R}$, si avrà

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \;\; \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\
&\qquad f(U \cap E) \subseteq V \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha' \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha' \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha\,;
\end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \;\Rightarrow\; f(x) < \beta\,.$$

Se invece $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato inferiormente ed $F = \mathbb{R}$, si avrà

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \quad x < \beta \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha\,;$$

analogamente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \beta' \in \mathbb{R} : \quad x < \beta' \;\Rightarrow\; f(x) < \beta\,.$$

Vediamo ad esempio il caso di una successione $(a_n)_n$ in uno spazio metrico F. Abbiamo quindi una funzione $f : \mathbb{N} \to F$ definita da $f(n) = a_n$. Considerando $\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$, si vede che l'unico punto di accumulazione è $+\infty$. Adattando la definizione di limite a questo caso, possiamo scrivere:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_n, l) < \varepsilon\,.$$

Pertanto, spesso il limite di una successione si denota semplicemente con $\lim_n a_n$, sottintendendo che $n \to +\infty$.

Operazioni con i limiti $+\infty$ e $-\infty$

Qualora i limiti siano $+\infty$ o $-\infty$, non si possono usare i teoremi sulle operazioni con i limiti. A titolo illustrativo, enunciamo alcuni teoremi validi in questi casi. Nel seguito, tutte le funzioni saranno definite in uno spazio metrico E, oppure in $E \setminus \{x_0\}$, con x_0 di accumulazione. Iniziamo con l'addizione:

Teorema. *Se*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$
ed esiste un $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni x in un intorno di x_0,
$$g(x) \geq \gamma \,,$$
allora
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty \,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$. Considerato $\alpha' = \alpha - \gamma$, esiste un $\delta > 0$ tale che
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha' \,.$$
Quindi,
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) + g(x) > \alpha' + \gamma = \alpha \,.$$
■

Corollario. *Se*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R} \;\; (\; o \; +\infty) \,,$$
allora
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty \,.$$

Dimostrazione. Se il limite di g è $l \in \mathbb{R}$, esiste un $\delta > 0$ tale che
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > l - 1 \,.$$
Se invece il limite è $+\infty$, esiste un $\delta > 0$ tale che
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > 0 \,.$$
In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere. ■

Come regola mnemonica, scriveremo brevemente
$$(+\infty) + l = +\infty \,, \text{ se } l \text{ è un numero reale} \,;$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \,.$$

In modo del tutto analogo, si possono enunciare un teorema e il relativo corollario nel caso in cui il limite di f sia $-\infty$. Come regola mnemonica, scriveremo allora
$$(-\infty) + l = -\infty \,, \text{ se } l \text{ è un numero reale} \,;$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty \,.$$

Similmente per quanto riguarda il prodotto:

Teorema. *Se*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$
ed esiste un $\gamma > 0$ tale che, per ogni x in un intorno di x_0,
$$g(x) \geq \gamma\,,$$
allora
$$\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$. Possiamo supporre che sia $\alpha > 0$. Posto $\alpha' = \frac{\alpha}{\gamma}$, esiste un $\delta > 0$ tale che
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha'\,.$$
Quindi,
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x)g(x) > \alpha'\gamma = \alpha\,.$$
■

Corollario. *Se*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l > 0 \;\; (\;o\; +\infty)\,,$$
allora
$$\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Se il limite di g è un numero reale $l > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > \frac{l}{2}\,.$$
Se invece il limite è $+\infty$, esiste un $\delta > 0$ tale che
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > 1\,.$$
In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere. ■

Come sopra, scriveremo brevemente
$$(+\infty)\cdot l = +\infty\,,\ \text{se } l > 0 \text{ è un numero reale};$$
$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,,$$
con tutte le varianti del caso:
$$(+\infty)\cdot l = -\infty\,,\ \text{se } l < 0 \text{ è un numero reale};$$
$$(-\infty)\cdot l = -\infty\,,\ \text{se } l > 0 \text{ è un numero reale};$$
$$(-\infty)\cdot l = +\infty\,,\ \text{se } l < 0 \text{ è un numero reale};$$
$$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty\,;$$
$$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty\,.$$

Passiamo ora a un altro tipo di risultati.

Teorema. *Se*
$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty\,,$$
allora
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Posto $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$, esiste un $\delta > 0$ tale che
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| > \alpha\,.$$
Quindi,
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{\alpha} = \varepsilon\,.$$
■

Teorema. *Se*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$
e $f(x) > 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty\,.$$
Se invece $f(x) < 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty\,.$$

Dimostrazione. Vediamo solo il primo caso, essendo il secondo analogo. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$; possiamo supporre $\alpha > 0$. Posto $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$, esiste un $\delta > 0$ tale che
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; 0 < f(x) < \varepsilon\,.$$
Allora,
$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon} = \alpha\,.$$
■

Presentiamo due varianti del teorema dei due carabinieri: nel caso in cui il limite vale $+\infty$, si ha il seguente

Teorema. *Sia f_1 tale che*
$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = +\infty\,.$$
Se f è tale che, per ogni x in un intorno di x_0,
$$f_1(x) \le f(x)\,,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \,.$$

Dimostrazione. Ponendo $g(x) = f(x) - f_1(x)$, si ha che $g(x) \geq 0$ per ogni x in un intorno di x_0 e $f(x) = f_1(x) + g(x)$. Il risultato segue quindi direttamente dal primo teorema visto a lezione. ■

Nel caso in cui il limite sia $-\infty$, si ha l'analogo

Teorema. *Sia f_2 tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = -\infty \,.$$

Se f è tale che, per ogni x in un intorno di x_0,

$$f(x) \leq f_2(x) \,,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \,.$$

Calcoleremo ora alcuni limiti elementari per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$. Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^n \,,$$

dove n è un numero intero. Si può verificare per induzione che, se $n \geq 1$,

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x^n \geq x \,.$$

Siccome chiaramente $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, ne segue che

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \geq 1 \,, \\ 1 & \text{se } n = 0 \,, \\ 0 & \text{se } n \leq -1 \,. \end{cases}$$

Tenendo poi conto che

$$(-x)^n = x^n \text{ se n è pari} \,, \qquad (-x)^n = -x^n \text{ se n è dispari} \,,$$

si vede che

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \geq 1 \text{ è pari} \,, \\ -\infty & \text{se } n \geq 1 \text{ è dispari} \,, \\ 1 & \text{se } n = 0 \,, \\ 0 & \text{se } n \leq -1 \,. \end{cases}$$

Consideriamo ora la funzione polinomiale

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \,,$$

dove $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Scrivendo

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

e usando il fatto che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n \,,$$

si vede che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0\,, \\ -\infty & \text{se } a_n < 0\,, \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } [n \text{ è pari e } a_n > 0], \text{ oppure } [n \text{ è dispari e } a_n < 0]\,, \\ -\infty & \text{se } [n \text{ è pari e } a_n < 0], \text{ oppure } [n \text{ è dispari e } a_n > 0]\,. \end{cases}$$

Consideriamo ora una funzione razionale

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}\,,$$

dove $n, m \geq 1$ e $a_n, b_m \neq 0$. Similmente a quanto sopra, scrivendo

$$f(x) = x^{n-m} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_2}{x^{m-2}} + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}}\,,$$

possiamo concludere che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n > m \text{ e } a_n, b_m \text{ hanno lo stesso segno}\,, \\ -\infty & \text{se } n > m \text{ e } a_n, b_m \text{ hanno segno opposto}\,, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m\,, \\ 0 & \text{se } n < m\,. \end{cases}$$

Può risultare utile osservare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}\,.$$

In modo analogo si vede che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}\,,$$

con tutta la casistica che ne consegue.

Limiti di funzioni monotone

Vedremo ora che la monotonia di una funzione f permette di stabilire l'esistenza del limite sinistro e del limite destro.

Siano E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per $E \cap]-\infty, x_0[$, e consideriamo una funzione monotona $f : E \cap]-\infty, x_0[\to \mathbb{R}$.

Teorema. *Se f è crescente, allora*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f(E \cap]-\infty, x_0[)\,.$$

Se invece f è decrescente, allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf f(E \cap]-\infty, x_0[)\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima affermazione (la dimostrazione della seconda è analoga). Sia $s = \sup f(E \cap]-\infty, x_0[)$. Se $s \in \mathbb{R}$, fissiamo $\varepsilon > 0$. Per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un $\bar{y} \in f(E \cap]-\infty, x_0[)$ tale che $\bar{y} > s - \varepsilon$. Quindi, preso $\bar{x} \in E \cap]-\infty, x_0[$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y}$, per la crescenza di f abbiamo

$$\bar{x} < x < x_0 \;\Rightarrow\; s - \varepsilon < f(x) \leq s\,,$$

il che completa la dimostrazione in questo caso.

Se invece $s = +\infty$, fissiamo un $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora esiste un $\bar{x} \in E \cap]-\infty, x_0[$ tale che $f(\bar{x}) > \alpha$. Per la crescenza di f,

$$\bar{x} < x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha\,,$$

per cui $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$. ■

Si osservi che il teorema precedente include anche il caso in cui $x_0 = +\infty$. Si può enunciare un teorema analogo nel caso in cui x_0 è un punto di accumulazione per $E \cap]x_0, +\infty[$ e $f : E \cap]x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è monotona (qui potrebbe anche essere $x_0 = -\infty$).

Teorema. *Se f è crescente, allora*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf f(E \cap]x_0, +\infty[)\,.$$

Se invece f è decrescente, allora

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup f(E \cap]x_0, +\infty[)\,.$$

Per quanto riguarda le successioni di numeri reali, possiamo enunciare il seguente

Corollario. *Ogni successione monotona di numeri reali ha limite.*

Dimostrazione. Se $(a_n)_n$ è crescente, allora

$$\lim_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}\,,$$

e questo limite può essere un numero reale o $+\infty$. Similmente, se $(a_n)_n$ è decrescente, il limite sarà un numero reale o $-\infty$. ■

Consideriamo ad esempio la successione $(a_n)_n$, così definita per $n \geq 1$:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Vediamo che è crescente:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} \\
&= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} \\
&= \left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}\,,
\end{aligned}$$

quindi, per la disuguaglianza di Bernoulli,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 + (n+1)\frac{-1}{(n+1)^2}\right) \frac{n+1}{n} = 1\,.$$

Analogamente, consideriamo la successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Si ha che $a_n < b_n$, per ogni $n \geq 1$. Vediamo che $(b_n)_n$ è decrescente:

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \\
&= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \\
&= \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right)^{n+2} \\
&= \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \\
&\geq \frac{n}{n+1} \left(1 + (n+2)\frac{1}{n^2+2n}\right) \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ hanno entrambe limite finito. Essendo

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1\,,$$

possiamo concludere che le due successioni hanno lo stesso limite, un numero reale. Esso si chiama "numero di Nepero" e si denota con e. Scriveremo

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Si può dimostrare che è un numero irrazionale:

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595\ldots\ldots$$

Limiti notevoli per l'esponenziale e il logaritmo

Dimostriamo ora che, al variare di x in $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Consideriamo, per $x \geq 0$, il numero naturale $n(x)$ tale che

$$n(x) \leq x < n(x) + 1$$

(detto "parte intera di x"). Allora, per $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)} &< \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n(x)} \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \\ &< \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n(x)+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1}\,.\end{aligned}$$

Notiamo che $\lim_{x\to+\infty} n(x) = +\infty$, quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1} &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= e \cdot 1 = e\,.\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)} &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= e \cdot 1 = e\end{aligned}$$

Per il "teorema dei due carabinieri", si ha che anche il limite cercato vale e.

Dimostriamo ora che si ha anche

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Infatti, usando la formula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x \\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right) = e\cdot 1 = e\,.\end{aligned}$$

Possiamo ora enunciare il seguente importante

Teorema. *Si ha*

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e)\,,\qquad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \frac{1}{\log_a(e)}\,.$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} y\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \log_a(e)\,,$$

e lo stesso vale per il limite sinistro. Inoltre,

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a(e)}\,.$$

■

Si noti che la scelta della base $a=e$ semplifica le espressioni: si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1\,,\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1\,.$$

È per questo motivo che, da ora in poi, sceglieremo come base dell'esponenziale e del logaritmo il numero di Nepero e, che viene anche chiamato la "base naturale". Scriveremo $\exp(x)$ (o anche $\exp x$) invece di $\exp_e(x)$ e $\ln(x)$ (o anche $\ln x$) invece di $\log_e(x)$. Potrebbero essere utili le formule seguenti:

$$a^x = e^{x\ln(a)}\,,\qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}\,.$$

Anche le funzioni iperboliche verrà sempre scelta la base e, e scriveremo $\cosh(x)$ (o anche $\cosh x$) invece di $\cosh_e(x)$ e $\sinh(x)$ (o anche $\sinh x$) invece di $\sinh_e(x)$.

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x} = 1\,.$$

Dimostriamo ad esempio la prima:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} &= \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{-y}\Big) = \frac{1}{2}(1-(-1)) = 1\,. \end{aligned}$$

Vediamo ora come si comportano l'esponenziale e il logaritmo a $+\infty$. Usando le proprietà di monotonia e suriettività di $\exp_a : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, vediamo che

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1\,, \\ 1 & \text{se } a = 1\,, \\ 0 & \text{se } a < 1\,, \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1\,, \\ -\infty & \text{se } a < 1\,. \end{cases}$$

Scrivendo $x^\alpha = \exp(\ln x^\alpha) = \exp(\alpha \ln x)$, si vede che

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0\,, \\ 1 & \text{se } \alpha = 0\,, \\ 0 & \text{se } \alpha < 0\,. \end{cases}$$

Teorema. *Per ogni $\alpha > 0$, si ha*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Cominciamo con il dimostrare che, se $a > 1$,

$$\lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty\,.$$

Infatti, scrivendo $a = 1 + b$, con $b > 0$, si ha che

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}\,b^2 + \ldots + b^n > \frac{n(n-1)}{2}\,b^2\,.$$

Quindi,

$$\frac{a^n}{n} > \frac{n-1}{2}\,b^2\,,$$

da cui segue il risultato. Vediamo ora che, per ogni numero intero $k \geq 1$, si ha che

$$\lim_n \frac{a^n}{n^k} = +\infty\,.$$

Infatti, scrivendo

$$\frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{a^{n/k}}{n}\right)^k = \left(\frac{(\sqrt[k]{a})^n}{n}\right)^k,$$

si può usare il fatto che $\lim_n \frac{(\sqrt[k]{a})^n}{n} = +\infty$ e concludere.

Siccome siamo interessati a calcolare un limite per $x \to +\infty$, supporremo ora $x \geq 1$. Siano $n(x)$ e $n(\alpha)$ i numeri naturali tali che

$$n(x) \leq x < n(x) + 1\,, \qquad n(\alpha) \leq \alpha < n(\alpha) + 1\,.$$

Ponendo $k = n(\alpha) + 1$, per $x \geq 1$ si ha

$$\frac{e^x}{x^\alpha} \geq \frac{e^x}{x^{n(\alpha)+1}} = \frac{e^x}{x^k} \geq \frac{e^{n(x)}}{(n(x)+1)^k}\,.$$

Inoltre,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{n(x)}}{(n(x)+1)^k} = \lim_n \frac{e^n}{(n+1)^k} = \frac{1}{e} \lim_n \frac{e^{n+1}}{(n+1)^k} = \frac{1}{e} \lim_m \frac{e^m}{m^k} = +\infty\,.$$

Ne segue la tesi per quanto riguarda il primo limite.

Passiamo ora al secondo limite. Con il cambio di variabile "$y = \ln x$", si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{(e^y)^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y^{1/\alpha}}{e^y} \right)^\alpha = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{e^y}{y^{1/\alpha}} \right)^{-\alpha} = 0\,,$$

che è quanto volevasi dimostrare. ■

Limiti notevoli per le funzioni trigonometriche

Definiamo la successione $(\ell_n)_n$ in questo modo:

$$l_1 = 2\,, \quad \ell_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}\,.$$

(Geometricamente, si può vedere che ℓ_n corrisponde alla lunghezza del lato di un poligono regolare di 2^n lati inscritto ad una circonferenza di lato 1.) Si ha:

$$\begin{aligned}
&\ell_2 = \sqrt{2} \\
&\ell_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\
&\ell_4 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\
&\ell_5 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Poniamo

$$a_n = 2^{n-1} \ell_n\,.$$

(Geometricamente, a_n corrisponde al semiperimetro di tale poligono.) In modo analogo, definiamo, per $n \geq 2$,

$$b_n = 2^n \frac{\ell_n}{\sqrt{4 - \ell_n^2}}\,.$$

(Geometricamente, si può vedere che b_n corrisponde al semiperimetro di un poligono regolare di 2^n lati circoscritto alla circonferenza di lato 1.) Si ha che $a_n < b_n$ per ogni $n \geq 2$. Ecco come si sviluppano le due successioni:

$$
\begin{aligned}
&a_2 = 2\sqrt{2} && b_2 = 4 \\
&a_3 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} && b_3 = 8\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
&a_4 = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} && b_4 = 16\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\
&a_5 = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} && b_5 = 32\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \\
&\dots && \dots
\end{aligned}
$$

Vediamo che la successione $(a_n)_n$ è strettamente crescente:

$$
\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 2\frac{\sqrt{2-\sqrt{4-\ell_n^2}}}{\ell_n} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4-\ell_n^2}}} > \frac{2}{\sqrt{2+2}} = 1\,.
$$

Inoltre, la successione $(b_n)_n$ è strettamente decrescente:

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{1}{2}\,\frac{\ell_n}{\sqrt{4-\ell_n^2}}\,\frac{\sqrt{4-\ell_{n+1}^2}}{\ell_{n+1}} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\ell_n}{\sqrt{4-\ell_n^2}}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-\ell_n^2}}}{\sqrt{2-\sqrt{4-\ell_n^2}}} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{2+\sqrt{4-\ell_n^2}}{\sqrt{4-\ell_n^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\ell_n^2}}+1\right) \\
&> \frac{1}{2}(1+1) = 1\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ hanno entrambe limite finito. Essendo quindi

$$
\lim_n \ell_n = \lim_n \frac{a_n}{2^{n-1}} = 0\,,
$$

si ha

$$
\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \lim_n \frac{2}{\sqrt{4-\ell_n^2}} = 1\,,
$$

per cui possiamo concludere che le due successioni hanno lo stesso limite, un numero reale, che chiameremo “pi greco” e denoteremo con π. Si può dimostrare che è un numero irrazionale:

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots\ldots$$

Si può dimostrare il seguente

Teorema. *Si ha*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin_T(x)}{x} = \frac{2\pi}{T}\,.$$

La sua dimostrazione risulta piuttosto complicata a questo livello e viene pertanto omessa. Si noti che la scelta della base $T = 2\pi$ semplifica le espressioni del limite. È per questo motivo che, da ora in poi, sceglieremo come base delle funzioni trigonometriche il numero 2π: scriveremo $\cos(x)$ (o anche $\cos x$) invece di $\cos_{2\pi}(x)$ e $\sin(x)$ (o anche $\sin x$) invece di $\sin_{2\pi}(x)$. Potranno essere utili le seguenti formule:

$$\cos_T(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\,, \quad \sin_T(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\,.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Spesso si forniscono delle dimostrazioni intuitive di questa formula, in cui si utilizza l'interpretazione geometrica della funzione “seno”. La “misura” dell'“angolo” x (in “radianti”) corrisponde alla “lunghezza” dell'arco di circonferenza unitaria che parte da $(1,0)$ e arriva in $(\cos x, \sin x)$. Rimane a livello intuitivo il fatto che si possa “misurare” un arco di curva di questo tipo. Una definizione precisa di tale misura utilizza, ad esempio, la teoria dell'integrale.

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\,.$$

Infatti, ricordando che che la funzione coseno è continua in 0, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}\,\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\cos x + 1}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{-1}{\cos(0) + 1}\cdot 1^2 = -\frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\,\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos(0)}\cdot 1 = 1\,.$$

Successioni e sottosuccessioni

Cominciamo con due esempi.

1. Vogliamo far vedere che

$$\lim_n \frac{e^n}{n!} = 0 \,.$$

A tal fine, dimostriamo per induzione che, per ogni $n \geq 3$, si ha

$$0 < \frac{e^n}{n!} \leq \frac{e^3}{2n} \,,$$

dopodichè il risultato segue dal "teorema dei due carabinieri". Se $n = 3$, abbiamo un'uguaglianza, per cui la proposizione è vera. Supponiamo ora la proposizione vera per un certo $n \geq 3$. Allora, essendo $e \in \,]2, 3[\,$,

$$\frac{e^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e}{n+1}\,\frac{e^n}{n!} \leq \frac{e}{n+1}\,\frac{e^3}{2n} = \frac{e}{n}\,\frac{e^3}{2(n+1)} \leq \frac{e^3}{2(n+1)} \,.$$

2. Vediamo ora che

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0 \,.$$

A tal scopo dimostriamo per induzione che, per ogni $n \geq 1$, si ha

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \,,$$

e il risultato seguirà di nuovo usando il "teorema dei due carabinieri". Se $n = 1$, la proposizione è sicuramente vera. Supponiamola ora vera per un certo $n \geq 1$. Allora

$$\begin{aligned} 0 < \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} &= \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n!}{n^n}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \\ &\leq \frac{1}{n}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{1}{n}\,\frac{n}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n-1} = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n-1} \leq \frac{1}{n+1} \,, \end{aligned}$$

per cui la proposizione risulta vera anche per $n + 1$.

Utilizzeremo ora le successioni e i loro limiti per caratterizzare alcuni concetti introdotti in precedenza. A tal fine, riscriviamo la definizione di limite per una successione in uno spazio metrico E in questo modo:

$$\lim_n a_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_n, \ell) < \varepsilon \,.$$

Consideriamo ora due spazi metrici E, F e una funzione $f : E \to F$. Vogliamo caratterizzare la continuità di f in un punto $x_0 \in E$, facendo uso delle successioni.

Teorema. *La funzione f è continua in x_0 se e solo se, presa una successione $(a_n)_n$ in E, si ha*

$$\lim_n a_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n f(a_n) = f(x_0)\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x_0, e sia $(a_n)_n$ una successione in E tale che $\lim_n a_n = x_0$. Per il Teorema 1 sul limite di una funzione composta,

$$\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n) = f(x_0)\,,$$

cosicchè una delle due implicazioni è dimostrata.

Ragioniamo ora per contrapposizione, e supponiamo che f non sia continua in x_0. Questo significa che esiste un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esiste almeno un $x \in E$ per cui $d(x, x_0) < \delta$ e $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Prendendo $\delta = \frac{1}{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste pertanto un a_n in E tale che $d(a_n, x_0) < \frac{1}{n+1}$ e $d(f(a_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Ne segue che $\lim_n a_n = x_0$, ma sicuramente non può essere che $\lim_n f(a_n) = f(x_0)$. ■

Sia ora U un sottoinsieme dello spazio metrico E. Possiamo caratterizzare la nozione di punto aderente a U facendo uso delle successioni.

Teorema. *Un punto $x \in E$ è aderente a U se e solo se esiste una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$.*

Dimostrazione. Se x è aderente a U, allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'intersezione $B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap U$ è non vuota, per cui posso sceglierne un elemento, che chiamo a_n. In questo modo, ho costruito una successione $(a_n)_n$ in U, ed è facile vedere che essa ha limite x. Una delle due implicazioni è così dimostrata.

Supponiamo ora che esista una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$. Allora, fissato $\rho > 0$, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_n, x) < \rho\,,$$

ossia $a_n \in B(x, \rho)$. Quindi, $B(x, \rho) \cap U$ è non vuoto, e questo dimostra che x è aderente a U. ■

La nozione di compattezza

Ricordiamo che x_0 è "di accumulazione" per l'insieme U se per ogni $\rho > 0$ si ha che la palla $B(x_0, \rho)$ contiene infiniti elementi di U. Enunciamo il "primo teorema di Bolzano–Weierstrass".

Teorema. *Sia $\mathcal{S}$ un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Se $\mathcal{S}$ ha infiniti elementi, allora esiste almeno un punto di accumulazione per $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Sia $I_0 = [a, b]$ un intervallo che contiene $\mathcal{S}$. Consideriamo il punto medio $\frac{a+b}{2}$ di I_0. Chiamiamo I_1 uno dei due intervalli $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$ che contenga infiniti punti di $\mathcal{S}$. Consideriamo ora il punto medio di I_1, procediamo in modo analogo per definire I_2, e così via, per ricorrenza. Abbiamo così una successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ tali che

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$$

e, per ogni n, l'intervallo I_n contiene infiniti punti di $\mathcal{S}$. Per il teorema di Cantor, esiste un $c \in \mathbb{R}$ appartenente a tutti gli intervalli. Dimostriamo che c è di accumulazione per $\mathcal{S}$. Fissiamo un $\rho > 0$. Siccome $b_n - c \leq b_n - a_n$ e, per $n \geq 1$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n}$, prendendo $n > \frac{b-a}{\rho}$ si ha che $b_n \in [c, c+\rho[\,$. Analogamente si vede che $a_n \in \,]c-\rho, c]$, per cui $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \,]c-\rho, c+\rho[\,$. Ne segue che ci sono infiniti punti di $\mathcal{S}$ in $]c-\rho, c+\rho[\,$. ■

Data che sia una successione $(a_n)_n$, una sua "sottosuccessione" si ottiene selezionando una successione strettamente crescente di indici $(n_k)_k$ e considerando la funzione composta

$$k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}\,.$$

Teorema. *Se una successione ha limite, allora tutte le sue sottosuccessioni hanno lo stesso limite.*

Dimostrazione. Essendo gli indici n_k in $\mathbb{N}$, dalla $n_{k+1} > n_k$ si deduce che $n_{k+1} \geq n_k + 1$ e, per induzione, che $n_k \geq k$, per ogni k. Ne segue che $\lim_k n_k = +\infty$. Pertanto,

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \lim_{n \to \lim\limits_{k\to+\infty} n_k} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$ ■

Enunciamo ora la seguente proprietà degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$, ossia il "secondo teorema di Bolzano–Weierstrass".

Teorema. *Ogni successione $(a_n)_n$ in $[a,b]$ possiede una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme immagine $\mathcal{S} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se $\mathcal{S}$ ha un numero finito di elementi, allora la successione $(a_n)_n$ assume uno stesso valore $\bar{x} \in \mathcal{S}$ infinite volte, e basta prendere la sottosuccessione costantemente uguale a $\bar{x}$. Se $\mathcal{S}$ ha infiniti elementi, essendo limitato, per il primo teorema di Bolzano–Weierstrass esiste almeno un punto di accumulazione per $\mathcal{S}$, che chiamiamo c. Allora c è aderente a $\mathcal{S}$, quindi anche ad $[a,b]$, che è un insieme chiuso. Pertanto, $c \in [a,b]$. Ora pongo $n_0 = 0$ e, per induzione, supponendo di aver scelto n_k, per un certo $k \in \mathbb{N}$, scelgo n_{k+1} in modo che $n_{k+1} > n_k$ e $a_{n_{k+1}} \in \left]c - \frac{1}{k+1}\,,\, c + \frac{1}{k+1}\right[$. Ciò è possibile in quanto, essendo c di accumulazione, per ogni k l'insieme $\left]c - \frac{1}{k+1}\,,\, c + \frac{1}{k+1}\right[$ contiene infiniti elementi di $\mathcal{S}$. Chiaramente, si ha che $\lim_k a_{n_k} = c$, e il teorema è dimostrato. ■

In uno spazio metrico E, diremo che un sottoinsieme U è "compatto" se ogni successione $(a_n)_n$ in U possiede una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in U. Il secondo teorema di Bolzano–Weierstrass afferma quindi che, se $E = \mathbb{R}$, gli intervalli del tipo $U = [a,b]$ sono compatti.

Nel seguito, diremo che una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è "limitata superiormente" (o "limitata inferiormente") se lo è la sua immagine $f(U)$. Diremo che f è "limitata" se è sia limitata superiormente che inferiormente. Diremo che "f ha massimo" (o "f ha minimo") se $f(U)$ ce l'ha. Nel caso in cui f abbia massimo, chiameremo "punto di massimo" ogni $\bar{x}$ per cui $f(\bar{x}) = \max f(U)$; analoga definizione per "punto di minimo".

Teorema (di Weierstrass). *Se U è un insieme compatto e $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia $s = \sup f(U)$. Dimostreremo che esiste un punto di massimo, ossia un $\bar{x} \in U$ tale che $f(\bar{x}) = s$.

Notiamo che è possibile trovare una successione $(y_n)_n$ in $f(U)$ tale che $\lim_n y_n = s$: se $s \in \mathbb{R}$, per ogni $n \geq 1$ possiamo trovare un $y_n \in f(U)$ per cui $s - \frac{1}{n} < y_n \leq s$; se invece $s = +\infty$, per ogni n esiste un $y_n \in f(U)$ tale che $y_n > n$.

In corrispondenza, possiamo trovare una successione $(x_n)_n$ in U tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che ha un limite $\bar{x} \in U$. Siccome $\lim_n y_n = s$ e $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, la sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ ha anch'essa limite s. Allora, per la continuità di f,

$$f(\bar{x}) = f(\lim_k x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = s\,.$$

Il teorema è così dimostrato, per quanto riguarda l'esistenza del massimo. Per il minimo, si procede in modo analogo (oppure, si considera la funzione continua $g = -f$ e si usa il fatto che g ha massimo). ■

Ricordo ora che una funzione $f : E \to F$ si dice "continua" se è continua in ogni punto $x_0 \in E$. In altri termini, se

$$\forall x_0 \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Si noti che, in generale, la scelta di δ dipende sia da ε che da x_0. Nel caso in cui tale δ non dipenda da x_0, diremo che la funzione è "uniformemente continua": In tal caso, si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x_0 \in E \quad \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Teorema (di Heine). *Se U è un insieme compatto e $f : U \to F$ è una funzione continua, allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che f non sia uniformemente continua. Allora

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \quad \exists x_0 \in E \quad \exists x \in E : \ d(x, x_0) < \delta \quad e \quad d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon\,.$$

Prendiamo un tale $\varepsilon > 0$ e scegliamo $\delta = \frac{1}{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}$. In corrispondenza, esistono[10] x_n^0 e x_n tali che

$$d(x_n, x_n^0) < \frac{1}{n+1} \quad \text{e} \quad d(f(x_n), f(x_n^0)) \geq \varepsilon\,.$$

Abbiamo così due successioni $(x_n)_n$ e $(x_n^0)_n$ in U. Essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che ha un limite $\bar{x} \in U$. Prendiamo ora la sottosuccessione $(x_{n_k}^0)_k$, con gli stessi indici n_k. Siccome $d(x_{n_k}, x_{n_k}^0)$ tende a zero, anche questa sottosuccessione ha lo stesso limite $\bar{x}$. Per la continuità di f, deve essere

$$\lim f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \lim f(x_{n_k}^0) = f(\bar{x})\,,$$

e pertanto

$$\lim_k d(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^0)) = 0\,,$$

in contraddizione con il fatto che $d(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^0)) \geq \varepsilon > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. ■

La nozione di completezza

Introduciamo ora il concetto di "completezza" per uno spazio metrico E. Diremo che $(a_n)_n$ è una "successione di Cauchy" in E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad [\, m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}\,] \;\Rightarrow\; d(a_m, a_n) < \varepsilon\,.$$

Lo spazio metrico E si dirà "completo" se ogni successione di Cauchy ha un limite in E.

Si vede facilmente che, se $(a_n)_n$ ha un limite $\ell \in E$, allora è di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per m e n grandi si avrà che

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, \ell) + d(\ell, a_n) < 2\varepsilon\,.$$

Il viceversa non è sempre vero (ad esempio, $\mathbb{Q}$ non è completo). Abbiamo però il seguente

Teorema. $\mathbb{R}$ *è completo.*

Dimostrazione. Sia $(a_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Prendendo nella definizione $\varepsilon = 1$, si ha che esiste un $\bar{n}_1$ tale che, scegliendo $m = \bar{n}_1$, per ogni $n \geq \bar{n}_1$ si ha

$$d(a_n, a_{\bar{n}_1}) < 1\,.$$

Se ne deduce che la successione $(a_n)_n$ è limitata (gli indici che precedono $\bar{n}_1$ sono in numero finito). Quindi $(a_n)_n$ è contenuta in un intervallo del tipo $[a, b]$. Per il secondo teorema di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha un limite $c \in [a, b]$. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_n a_n = c\,.$$

[10] Qui l'indice 0 viene spostato in apice per non avere una notazione con doppio indice.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo la successione $(a_n)_n$ di Cauchy,

$$\exists \bar{n} : \quad m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_m, a_n) < \varepsilon \,.$$

Inoltre, essendo $\lim_k a_{n_k} = c$ e $\lim_k n_k = +\infty$,

$$\exists \bar{k} : \quad k \geq \bar{k} \;\Rightarrow\; d(a_{n_k}, c) < \varepsilon \;\text{ e }\; n_k \geq \bar{n} \,.$$

Allora, per $n \geq \bar{n}$, si ha

$$d(a_n, c) \leq d(a_n, a_{n_{\bar{k}}}) + d(a_{n_{\bar{k}}}, c) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \,,$$

il che pone fine alla dimostrazione. ■

Teorema. $\mathbb{R}^N$ *è completo.*

Dimostrazione. Per semplicità, supponiamo $N = 2$. Sia $(a_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^2$. Scriviamo ogni vettore $a_n \in \mathbb{R}^2$ nelle sue coordinate

$$a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}) \,.$$

Denotando con $\| \cdot \|$ la norma euclidea, si vede che

$$|a_{m,1} - a_{n,1}| \leq \|a_n - a_m\| \,, \quad |a_{m,2} - a_{n,2}| \leq \|a_n - a_m\| \,,$$

da cui segue che le due successioni $(a_{n,1})_n$, $(a_{n,2})_n$ sono di Cauchy in $\mathbb{R}$. Quindi, essendo $\mathbb{R}$ completo, esistono i limiti

$$\lim_n a_{n,1} = \ell_1 \,, \quad \lim_n a_{n,2} = \ell_2 \,.$$

Allora

$$\lim_n a_n = (\lim_n a_{n,1} \,, \lim_n a_{n,2}) = (\ell_1, \ell_2) \,,$$

un elemento di $\mathbb{R}^2$. ■

La derivata

Introdurremo ora il concetto di "derivata" di una funzione definita su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}$.

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, dominio di una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E. Se x è un punto di E diverso da x_0, possiamo considerare il "rapporto incrementale"

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,;$$

si tratta del coefficiente angolare della retta nel piano passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

Definizione. *Qualora esso esista, chiameremo il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

"derivata" di f nel punto x_0, e lo denoteremo con uno dei seguenti simboli:

$$f'(x_0)\,, \quad Df(x_0)\,, \quad \frac{df}{dx}(x_0)\,.$$

Si dice invece che f è "derivabile" in x_0 qualora la derivata sia un numero reale (e non $+\infty$ o $-\infty$). In tal caso, la retta nel piano passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ con coefficiente angolare $f'(x_0)$, di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

si chiama "retta tangente" al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Si noti che, in alcuni casi, la derivata di f in x_0 potrebbe essere solo un limite destro o un limite sinistro. Questo si verifica tipicamente quando E è un intervallo e x_0 coincide con uno degli estremi.

Osserviamo inoltre che si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Esempi. 1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = mx + q$. Allora

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(mx + q) - (mx_0 + q)}{x - x_0} = m\,.$$

La retta tangente, in questo caso, coincide con il grafico della funzione. Il caso particolare in cui $m = 0$ ci mostra che la derivata di una funzione costante è sempre nulla.

2) Sia $f(x) = x^n$. Allora

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} \right) = n x_0^{n-1}\,.$$

Lo vediamo anche in un altro modo:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0^n \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} \right) \\ &= n x_0^{n-1}\,. \end{aligned}$$

3) Sia $f(x) = e^x$. Allora

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} .$$

4) Sia $f(x) = \cos x$. Allora

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h) - \cos(x_0)}{h} \\
&= -\cos(x_0) \lim_{h \to 0} h \frac{1 - \cos(h)}{h^2} - \sin(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin(x_0) .
\end{aligned}$$

5) Sia $g(x) = \sin x$. Allora

$$\begin{aligned}
g'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\
&= -\sin(x_0) \lim_{h \to 0} h \frac{1 - \cos(h)}{h^2} + \cos(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x_0) .
\end{aligned}$$

Il seguente teorema ci fornisce una caratterizzazione della derivabilità.

Teorema. *La funzione f è derivabile in x_0 se e solo se esiste un numero reale ℓ per cui si possa scrivere*

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + r(x) ,$$

dove r è una funzione tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0 .$$

In tal caso, si ha $\ell = f'(x_0)$.

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 .$$

Quindi, ponendo $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, essa verifica le proprietà richieste, con $\ell = f'(x_0)$.

Viceversa, supponiamo che $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + r(x)$, con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0 .$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)}{x - x_0} = 0\,,$$

da cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell\,.$$

■

Vediamo ora che la derivabilità implica la continuità.

Teorema. *Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.*

<u>Dimostrazione</u>. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right] \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)\,,\end{aligned}$$

il che è equivalente a dire che f è continua in x_0. ■

Alcune formule di derivazione

Vediamo ora alcune regole che si usano abitualmente.

Teorema. *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0, anche $f + g$ lo è, e si ha*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0)\,,\end{aligned}$$

per cui la formula è dimostrata. ■

Teorema. *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0, anche $f \cdot g$ lo è, e si ha*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,,\end{aligned}$$

e si conclude, ricordando che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, essendo f continua in x_0. ■

Il caso particolare in cui g è costante con valore $\alpha \in \mathbb{R}$ ci fornisce la formula seguente:

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)\,.$$

Inoltre, scrivendo $f - g = f + (-1)g$, si ha:

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)\,.$$

Teorema. *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, anche $\frac{f}{g}$ lo è, e si ha*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Si ha che $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, per cui dimostreremo dapprima che $\frac{1}{g}$ è derivabile in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.$$

Quindi,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g}(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,,$$

da cui la tesi. ■

Esempi. 1) Consideriamo la funzione “tangente”:

$$F(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Prendendo $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, si ha [11]

$$F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)}\,.$$

2) Calcoliamo la derivata delle funzioni iperboliche. Sia

$$F(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)\,,$$

allora

$$F'(x_0) = \frac{1}{2}\left(e^{x_0} - \frac{1}{e^{x_0}}\right) = \frac{e^{x_0} - e^{-x_0}}{2} = \sinh(x_0)\,.$$

Analogamente si vede che, se $F(x) = \sinh(x)$, allora $F'(x_0) = \cosh(x_0)$. Inoltre, se $F(x) = \tanh(x)$, allora, essendo $F(x) = f(x)/g(x)$, si ha

$$F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{\cosh^2(x_0) - \sinh^2(x_0)}{\cosh^2(x_0)} = \frac{1}{\cosh^2(x_0)}\,.$$

[11] Qui e nel seguito scriveremo $\cos^2(x)$ e $\sin^2(x)$ per indicare $(\cos(x))^2$ e $(\sin(x))^2$, rispettivamente. Anche in questo caso, si può scrivere $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$.

3) Sono derivabili tutte le funzioni polinomiali

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \,,$$

con derivata

$$F(x_0) = n a_n x_0^{n-1} + (n-1) a_{n-2} x_0^{n-1} + \ldots + 2 a_2 x_0 + a_1 \,.$$

Ne segue che sono derivabili anche tutte le funzioni razionali, del tipo

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \,,$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi, con l'accortezza di scegliere un punto x_0 in cui $q(x_0) \neq 0$.

Vediamo ora come si calcola la derivata di una funzione composta.

Teorema. *Se $f : E \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, e $g : E' \to \mathbb{R}$ è derivabile in $f(x_0)$, dove E' è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, contenente $f(E)$, per cui $f(x_0)$ è di accumulazione, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0, e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0) \,.$$

Dimostrazione. Ponendo $y_0 = f(x_0)$, sia $R : E' \to \mathbb{R}$ la funzione ausiliaria così definita:

$$R(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{se } y \neq y_0 \,, \\[2ex] g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \,. \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione R è continua in y_0 e

$$g(y) - g(y_0) = R(y)(y - y_0) \,, \qquad \text{per ogni } y \in E' \,.$$

Quindi, se $x \neq x_0$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = R(f(x)) \, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,.$$

Siccome f è continua in x_0 e R è continua in $y_0 = f(x_0)$, la funzione composta $R \circ f$ è continua in x_0 e pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} R(f(x)) \, \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= R(f(x_0)) f'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) \,, \end{aligned}$$

che è quanto volevasi dimostrare. ■

Esempi. 1) Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = \cos(e^x)$. Si ha che $h = g \circ f$, con $f(x) = e^x$ e $g(y) = \cos y$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha che $f'(x_0) = e^{x_0}$. Se $y_0 = f(x_0)$, abbiamo che $g'(y_0) = -\sin y_0$. Pertanto, la derivata di h in x_0 è

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = -\sin(e^{x_0})\, e^{x_0}\,.$$

2) Sia ora $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = e^{\cos x}$. Allora $h = g \circ f$, con $f(x) = \cos x$ e $g(y) = e^y$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha che $f'(x_0) = -\sin x_0$. Se $y_0 = f(x_0)$, abbiamo che $g'(y_0) = e^{y_0}$. Pertanto, la derivata di h in x_0 è

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = e^{\cos x_0}\,(-\sin x_0)\,.$$

Vedremo ora come calcolare la derivata dell'inversa di una funzione invertibile. Nel seguito considereremo solo intervalli non degeneri, ossia non ridotti ad un solo punto.

Teorema. *Siano I, J due intervalli e $f : I \to J$ una funzione continua invertibile. Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha che*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Osserviamo che, nelle ipotesi del teorema, la funzione $f : I \to J$ è sicuramente strettamente monotona, e la sua inversa $f^{-1} : J \to I$ è continua. Applicando il teorema del limite di una funzione composta, abbiamo

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to \lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}\,.$$

Essendo f^{-1} continua, si ha che $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$, da cui la tesi. ■

Esempio. Se $f(x) = e^x$, si ha che $f^{-1}(y) = \ln y$, per cui, essendo $y_0 = e^{x_0}$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}\,.$$

Sia ora α un numero reale e $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = x^\alpha$. Essendo

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}\,,$$

si ha che $h = g \circ f$, con $f(x) = \alpha \ln x$ e $g(y) = e^y$. Allora

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = e^{\alpha \ln x_0} \alpha \frac{1}{x_0} = x_0^\alpha \alpha \frac{1}{x_0} = \alpha x_0^{\alpha - 1}\,.$$

Quindi, la stessa formula trovata per un esponente n naturale continua a valere anche per un esponente α non intero.

La funzione derivata

Consideriamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Diremo che "f è derivabile" se lo è in ogni punto di I. In tal caso, ad ogni $x \in I$ resta associato il numero reale $f'(x)$, per cui è ben definita una funzione $f' : I \to \mathbb{R}$, detta "funzione derivata". Abbiamo la seguente tabella:

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\dots$	$\dots$

Ci si può ora chiedere se la funzione derivata sia a sua volta derivabile in qualche punto di I. Se f' è derivabile in un punto x_0, chiameremo la sua derivata $(f')'(x_0)$ "derivata seconda" di f in x_0 e la denoteremo con uno dei seguenti simboli:

$$f''(x_0)\,, \quad D^2 f(x_0)\,, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\,.$$

Si può procedere per induzione e definire, in generale, la derivata n-esima di f in x_0, che denoteremo con uno dei seguenti simboli:

$$f^{(n)}(x_0)\,, \quad D^n f(x_0)\,, \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\,;$$

si ha $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$.

Se una funzione f possiede derivata n-esima in un punto x_0 per ogni $n \geq 1$, si dice che essa è "derivabile infinite volte" in x_0. Ad esempio, la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ lo è, in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$. In questo caso, si ha

$$D^n e^x = e^x\,, \quad \text{per ogni } n \geq 1\,.$$

Proprietà notevoli della funzione derivata

Diremo che $x_0 \in I$ è un "punto di massimo locale" per la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se esiste un intormo U di x_0 per cui x_0 è punto di massimo della restrizione di f a $U \cap I$. Equivalentemente, se

$$\exists \rho > 0 : \ \forall x \in I \quad x_0 - \rho < x < x_0 + \rho \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(x_0) \, .$$

Analogamente per "punto di minimo locale".

Calcoliamo ora la derivata nei punti di massimo o di minimo locale, che siano *interni* ad I.

Teorema (di Fermat). *Sia x_0 un punto interno ad I, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0. Se inoltre x_0 è un punto di massimo o di minimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Se x_0 è punto di massimo locale, per x in un intorno di x_0 contenuto in I si ha che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x < x_0 \, , \\ \leq 0 & \text{se } x > x_0 \, . \end{cases}$$

Siccome f è derivabile in x_0, abbiamo che esiste il limite del rapporto incrementale e coincide con i limiti destro e sinistro:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, .$$

Da quanto sopra, per il corollario al teorema della permanenza del segno,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \leq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, ,$$

e quindi deve essere $f'(x_0) = 0$. Nel caso in cui x_0 sia un punto di minimo locale, si procede in modo analogo. ∎

Normalmente la derivata, essendo un limite, ci dà un'informazione di tipo locale sul comportamento della funzione. Il seguente teorema, invece, con la generalizzazione che ne seguirà, ci porterà all'uso della derivata per avere informazioni generali sull'andamento del grafico di una funzione.

Teorema (di Rolle). *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, derivabile su $]a, b[$ e tale che*

$$f(a) = f(b) \, ,$$

allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Dimostrazione. Se la funzione è costante, allora la sua derivata si annulla in tutti i punti, e la conclusione è banalmente vera. Supponiamo ora che f non sia costante. Esiste quindi un $\bar{x} \in]a,b[$ tale che

$$f(\bar{x}) < f(a) = f(b)\,, \quad \text{oppure} \quad f(\bar{x}) > f(a) = f(b)\,.$$

Supponiamo valga il primo caso. Per il teorema di Weierstrass, f ha minimo in $[a,b]$, e nel caso considerato un punto di minimo deve necessariamente essere in $]a,b[$. Sia $\xi \in]a,b[$ un tale punto. Per il teorema di Fermat, avremo che $f'(\xi) = 0$.

La situazione è analoga nel secondo caso. Per il teorema di Weierstrass, f ha massimo in $[a,b]$, e in questo caso un punto di massimo deve necessariamente essere in $]a,b[$. Se $\xi \in]a,b[$ è un tale punto, per il teorema di Fermat avremo che $f'(\xi) = 0$. ∎

Enunciamo ora una generalizzazione del teorema di Rolle.

Teorema (di Lagrange). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, derivabile su $]a,b[$, allora esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)\,.$$

Si ha che $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, derivabile su $]a,b[$ e tale che

$$g(a) = 0 = g(b)\,.$$

Per il teorema di Rolle, esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0\,,$$

da cui la tesi. ∎

Corollario. *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile su $\mathring{I}$. Si ha che:*

a) se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è crescente;
b) se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è strettamente crescente;
c) se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è decrescente;
d) se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è strettamente decrescente;
e) se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è costante.

Dimostrazione. Dimostriamo a): siano $x_1 < x_2$ in I. Per il teorema di Lagrange, esiste un $\xi \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,.$$

Quindi, essendo $f'(\xi) \geq 0$, si deve avere che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Questo dimostra che f è crescente.

Le altre si dimostrano in modo analogo. ■

Si noti che, se f è crescente, allora ogni rapporto incrementale di f è sempre maggiore o uguale a zero e quindi $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$ Quindi in a), e così anche in c) ed e), vale anche l'implicazione opposta. Ma così non è per b) e d): se f è strettamente crescente, in generale non è vero che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$: la derivata potrebbe annullarsi in qualche punto (vedi ad esempio $f(x) = x^3$).

Funzioni trigonometriche e iperboliche inverse

Tenuto conto della formula per la derivata e delle proprietà di segno delle funzioni trigonometriche, abbiamo che

$$\cos x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente decrescente su } [0,\pi]\,, \\ \\ \text{strettamente crescente su } [\pi, 2\pi]\,, \end{cases}$$

$$\sin x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente crescente su } \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \text{strettamente decrescente su } \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Consideriamo le funzioni $F : [0,\pi] \to [-1,1]$ e $G : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ definite da $F(x) = \cos x$ e $G(x) = \sin x$. Sono strettamente monotone, quindi iniettive. Inoltre, essendo continue, la loro immagine è un intervallo e, siccome $F(\pi) = -1 = G(-\frac{\pi}{2})$ e $F(0) = 1 = G(\frac{\pi}{2})$, deve coincidere con $[-1,1]$. Esse sono pertanto biiettive. Chiameremo le due funzioni $F^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$ e $G^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ rispettivamente "arco coseno" e "arco seno" e scriveremo

$$F^{-1}(y) = \arccos y\,, \quad G^{-1}(y) = \arcsin y\,.$$

La prima è strettamente decrescente, la seconda strettamente crescente. Calcoliamone le derivate: ponendo $y = F(x)$, per $x \in]0,\pi[$ si ha

$$(F^{-1})'(y) = \frac{1}{F'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,,$$

mentre ponendo $y = G(x)$, per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si ha

$$(G^{-1})'(y) = \frac{1}{G'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Si può notare che la funzione $\arccos + \arcsin$ ha derivata nulla e pertanto è costante. Calcolandola in 0, si trova quindi che

$$\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{per ogni } y \in [-1,1]\,.$$

Consideriamo ora la funzione $H :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ definita da $H(x) = \tan x$. Per lo stesso tipo di considerazioni, essa risulta invertibile. Chiameremo la funzione $H^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ "arco tangente" e scriveremo

$$H^{-1}(y) = \arctan y\,.$$

Essa è strettamente crescente e si ha:

$$\lim_{y\to-\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}\,.$$

Calcoliamone la derivata: ponendo $y = H(x)$, per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si ha

$$(H^{-1})'(y) = \frac{1}{H'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Passiamo ora alle funzioni iperboliche. La funzione $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e invertibile. Si vede infatti che

$$\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}\,)\,.$$

La derivata si può calcolare direttamente, oppure usando la formula della funzione inversa: se $y = \sinh(x)$, si ha

$$D\sinh^{-1}(y) = \frac{1}{D\sinh(x)} = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,.$$

La funzione $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è né iniettiva (è una funzione pari) né suriettiva: si ha $\cosh x \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte, la funzione $F : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$, definita da $F(x) = \cosh x$, è strettamente crescente, invertibile e la sua inversa $F^{-1} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ è data da

$$F^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}\,)\,.$$

Essa si denota spesso, impropriamente, con $\cosh^{-1}$. Calcoliamone la derivata: ponendo $y = \cosh(x)$, con $x \geq 0$, si ha

$$D\cosh^{-1}(y) = \frac{1}{D\cosh(x)} = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x)-1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

La funzione $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,,$$

non è suriettiva: si ha $-1 < \tanh x < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte, la funzione $H : \mathbb{R} \to]-1,1[$, definita da $H(x) = \tanh x$, è strettamente crescente, invertibile e la sua inversa $H^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ è data da

$$H^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Essa si denota spesso, impropriamente, con $\tanh^{-1}$. Ne calcoliamo la derivata: ponendo $y = \tanh(x)$, si ha

$$D\tanh^{-1}(y) = \frac{1}{D\tanh(x)} = \cosh^2(x) = \frac{1}{1-\tanh^2(x)} = \frac{1}{1-y^2}.$$

Riassumiamo nella tabella sottostante le derivate delle funzioni elementari fin qui trovate.

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
...	...

Convessità e concavità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Definizione. *Diremo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è "convessa" se, comunque presi tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ in I, si ha che*

$$(a) \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Vediamo che sono equivalenti ad (a) le seguenti:

$$(b) \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

$$(c) \qquad \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\,.$$

Infatti,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f(x_2)-f(x_1))(x_3-x_2) \le (f(x_3)-f(x_2))(x_2-x_1)$$
$$\Leftrightarrow (f(x_2)-f(x_1))(x_3-x_1+x_1-x_2) \le (f(x_3)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2))(x_2-x_1)$$
$$\Leftrightarrow (f(x_2)-f(x_1))(x_3-x_1) \le (f(x_3)-f(x_1))(x_2-x_1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\,,$$

per cui $(a) \Leftrightarrow (b)$; analogamente si vede che $(a) \Leftrightarrow (c)$.

Osserviamo che $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se, per ogni x_0 in I, la funzione "rapporto incrementale" $F : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, definita da

$$F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,,$$

è crescente. Infatti, presi x, x' in $I \setminus \{x_0\}$ tali che $x < x'$, si ha $F(x) \le F(x')$, e questo accade in tutti e tre i casi possibili: $x < x' < x_0$, oppure $x < x_0 < x'$, oppure $x_0 < x < x'$. A questo punto, diventa naturale la seguente caratterizzazione della convessità.

Teorema. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua, derivabile su $\mathring{I}$, allora f è convessa se e solo se f' è crescente su $\mathring{I}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia convessa. Siano $\alpha < \beta$ due punti in $\mathring{I}$. Se $\alpha < x < \beta$, per (b) si ha

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \le \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\,,$$

da cui, essendo f derivabile in α,

$$f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \le \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\,.$$

Analogamente, per (c) si ha

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \le \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}\,.$$

da cui, essendo f derivabile in β,

$$f'(\beta) = \lim_{x\to\beta^-} \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x} \ge \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\,.$$

Ne segue che $f'(\alpha) \le f'(\beta)$, il che dimostra che f' è crescente.

Viceversa, supponiamo f' crescente. Presi $x_1 < x_2 < x_3$, per il teorema di Lagrange abbiamo che

$$\exists\, \xi_1 \in]x_1, x_2[:\ f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$\exists\, \xi_2 \in]x_2, x_3[:\ f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\,.$$

Essendo f' crescente, si ha che $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$; ne segue (a). ∎

Diremo che f è "strettamente convessa" se, comunque presi tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ in I, si ha

$$(a') \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\,.$$

Equivalentemente, possiamo scrivere le analoghe

$$(b') \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}\,,$$

$$(c') \qquad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\,.$$

Vale la seguente caratterizzazione.

Teorema. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua, derivabile su $\mathring{I}$, allora f è strettamente convessa se e solo se f' è strettamente crescente su $\mathring{I}$.*

<u>Dimostrazione</u>. Dovremo modificare un pochino la dimostrazione del teorema precedente. Supponiamo che f sia strettamente convessa e siano $\alpha < \beta$ due punti in $\mathring{I}$. Se $\alpha < x < \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, per (b') si ha

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\,,$$

da cui

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \le \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\,.$$

Analogamente, se $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) < x < \beta$, per (c') si ha

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}\,.$$

da cui

$$f'(\beta) = \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \ge \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} > \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\,.$$

Ne segue che $f'(\alpha) < f'(\beta)$, il che dimostra che f' è strettamente crescente.

Viceversa, supponiamo f' crescente. Presi $x_1 < x_2 < x_3$, usando il teorema di Lagrange, esattamente come per il teorema precedente si dimostra che vale (a'). ■

Diremo che f è "concava" se la funzione $(-f)$ è convessa o, equivalentemente, se vale (a) ma con il segno di disugualianza invertito. Diremo che f è "strettamente concava" se la funzione $(-f)$ è strettamente convessa o, equivalentemente, se vale (a') ma con il segno di disugualianza invertito. Si possono scrivere, naturalmente, gli analoghi teoremi che caratterizzano la concavità (o la stretta concavità) di f con la decrescenza (o la stretta decrescenza) di f'.

Arriviamo quindi al seguente corollario, che trova spesso applicazione in situazioni pratiche.

Corollario. *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile due volte su $\mathring{I}$. Si ha che:*

a) se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è convessa;
b) se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è strettamente convessa;
c) se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è concava;
d) se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è strettamente concava.

Analogamente a quanto già osservato per le funzioni monotone, anche qui in a) e c) valgono anche le implicazioni opposte: se f è convessa, allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, e similmente se f è concava. Ma così non è per b) e d) (vedi ad esempio $f(x) = x^4$).

Esempi. 1) La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è strettamente convessa: si ha

$$f''(x) = e^x > 0\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. La sua inversa $\ln(x)$, il logaritmo naturale, è una funzione strettamente concava.

2) Tenuto conto delle derivate delle funzioni trigonometriche, si ha che:

$$\cos x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su } \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\[2ex] \text{strettamente convessa su } \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right], \end{cases}$$

$$\sin x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su } [0, \pi]\,, \\[2ex] \text{strettamente convessa su } [\pi, 2\pi]\,. \end{cases}$$

I punti che separano un intervallo in cui si ha convessità da un altro in cui si ha concavità si chiamano "punti di flesso".

Analoghe considerazioni si possono fare per le altre funzioni elementari fin qui studiate.

Sarà utile la seguente proprietà delle funzioni convesse derivabili: in breve, essa dice che il loro grafico sta sempre al di sopra delle rette ad esso tangenti.

Teorema. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa e derivabile in un punto $x_0 \in I$, allora*

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,,$$

per ogni $x \in I$.

Dimostrazione. La disguaglianza è sicuramente verificata se $x = x_0$. Se $x > x_0$, preso $h > 0$ tale che $h < x - x_0$, per la convessità si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Passando al limite per $h \to 0$, si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0)\,,$$

da cui la disuguaglianza cercata.

Se $x < x_0$, preso $h < 0$ tale che $|h| < x_0 - x$, per la convessità si ha

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{-h}\,,$$

e si conclude analogamente. ■

Le regole di de l'Hôpital

Iniziamo con l'introdurre la seguente generalizzazione del teorema di Lagrange.

Teorema (di Cauchy). *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, derivabili su $]a, b[$, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)\,.$$

Si vede che essa è continua, derivabile su $]a, b[$, e $h(a) = h(b)$. Per il teorema di Rolle, esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $h'(\xi) = 0$. Ne segue la tesi. ■

Il seguente risultato è noto come "regola di de l'Hôpital" nel caso indeterminato del tipo $\frac{0}{0}$.

Teorema. *Sia I un intervallo e $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0\,.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

e i due coincidono.

Dimostrazione. Sia $l = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (possibilmente $l = +\infty$ o $-\infty$); estendiamo le due funzioni anche al punto x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. In questo modo f e g saranno continue su tutto I. Per il teorema di Cauchy, per ogni $x \neq x_0$ esiste un punto $\xi_x \in]x_0, x[$ (che dipende da x) [12] tale che

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Se $x \to x_0$, si ha che anche $\xi_x \to x_0$, per cui, usando il teorema sul limite di una funzione composta,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{y \to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l\,.$$

■

Esempio. Siano $x_0 = 0$, $f(x) = \sin x - x$ e $g(x) = x^3$. Allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}\,,$$

per cui anche

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}\,.$$

Risulta talvolta utile il seguente

Corollario. *Sia I un intervallo contenente x_0 e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, continua in x_0, e derivabile in ogni $x \neq x_0$. Se esiste il limite*

$$l = \lim_{x \to x_0} f'(x)\,,$$

allora esiste anche la derivata di f in x_0 e si ha $f'(x_0) = l$.

---

[12] Qui e nel seguito, nel caso in cui x sia minore di x_0, con il simbolo $]x_0, x[$ si intende indicare l'intervallo $]x, x_0[$. Si noti che la formula del teorema di Cauchy rinmane valida anche in questo caso.

Dimostrazione. Siano $F(x) = f(x) - f(x_0)$ e $G(x) = x - x_0$. Abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} G(x) = 0\,,$$

e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to x_0} f'(x) = l\,.$$

La regola di de l'Hôpital ci dice quindi che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = l\,,$$

ossia $f'(x_0) = l$. ■

Il teorema precedente non esclude la possibilità che x_0 sia un estremo dell'intervallo I, nel qual caso si parlerà di limite destro o limite sinistro. Esso si estende anche ai casi in cui $x_0 = +\infty$ o $-\infty$. Vediamo qui il primo caso.

Teorema. *Sia I un intervallo non limitato superiormente e $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, tali che*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0\,.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

e i due coincidono.

Dimostrazione. Sia $l = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; definendo le due funzioni $F(x) = f(x^{-1})$ e $G(x) = g(x^{-1})$, si ha che $G'(x) \neq 0$ per ogni x e

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} G(x) = 0\,.$$

Inoltre,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x^{-1})(-x^{-2})}{g'(x^{-1})(-x^{-2})} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x^{-1})}{g'(x^{-1})} = \lim_{y \to +\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l\,.$$

Per il teorema precedente, si ha che anche $\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = l$; pertanto,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u^{-1})}{g(u^{-1})} = \lim_{u \to 0^+} \frac{F(u)}{G(u)} = l\,.$$

■

Osserviamo che la conclusione del teorema è scritta in forma di implicazione: se esiste il limite del rapporto delle due derivate, allora esiste il limite del rapporto delle due funzioni. L'implicazione opposta non è vera, come si vede dal seguente esempio: siano $x_0 = 0$,

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad g(x) = x\,.$$

Allora $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,,$$

mentre

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

per cui non esiste il $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Vediamo ora che la regola di de l'Hôpital continua a valere anche nei casi indeterminati del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, dove ∞ può essere $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio, nel caso in cui x_0 sia un numero reale, si ha il seguente

Teorema. *Sia I un intervallo contenente x_0 e $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, tali che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty\,.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

e i due coincidono.

Dimostrazione. Sia $l = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Supponiamo dapprima $l \in \mathbb{R}$, e che x_0 non sia l'estremo destro dell'intervallo I. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora esiste un $\delta_1 > 0$ tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \;\Rightarrow\; \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Per il teorema di Cauchy, per ogni $x \in]x_0, x_0 + \delta_1[$, esiste un $\xi_x \in]x, x_0 + \delta_1[$ tale che

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x_0 + \delta_1) - f(x)}{g(x_0 + \delta_1) - g(x)}\,,$$

per cui

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \;\Rightarrow\; \left| \frac{f(x_0 + \delta_1) - f(x)}{g(x_0 + \delta_1) - g(x)} - l \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Possiamo inoltre supporre che δ_1 sia tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \;\text{ e }\; g(x) \neq 0 \,.$$

Scriviamo

$$\frac{f(x_0+\delta_1) - f(x)}{g(x_0+\delta_1) - g(x)} = \psi(x) \frac{f(x)}{g(x)} \,,$$

e osserviamo che

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1 - f(x_0+\delta_1)/f(x)}{1 - g(x_0+\delta_1)/g(x)} = 1 \,.$$

In particolare,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\psi(x)} \Big(l - \frac{\varepsilon}{2} \Big) = l - \frac{\varepsilon}{2} \,, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\psi(x)} \Big(l + \frac{\varepsilon}{2} \Big) = l + \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Pertanto, esiste un $\delta \in \,]0, \delta_1[$ tale che, se $x_0 < x < x_0 + \delta$, allora

$$\frac{1}{\psi(x)} \Big(l - \frac{\varepsilon}{2} \Big) \geq l - \varepsilon \,, \qquad \frac{1}{\psi(x)} \Big(l + \frac{\varepsilon}{2} \Big) \leq l + \varepsilon \,.$$

Quindi, se $x_0 < x < x_0 + \delta$, si ha

$$l - \varepsilon \leq \frac{1}{\psi(x)} \Big(l - \frac{\varepsilon}{2} \Big) \leq \frac{1}{\psi(x)} \, \frac{f(x_0+\delta_1) - f(x)}{g(x_0+\delta_1) - g(x)} \leq \frac{1}{\psi(x)} \Big(l + \frac{\varepsilon}{2} \Big) \leq l + \varepsilon \,,$$

da cui

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| \leq \varepsilon \,.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \,.$$

In modo del tutto analogo si dimostra che, se x_0 non è l'estremo sinistro dell'intervallo I, allora

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \,,$$

per cui il teorema è dimostrato, nel caso in cui $l \in \mathbb{R}$.

Supponiamo ora $l = +\infty$ e che x_0 non sia l'estremo destro dell'intervallo I. Fissiamo $\alpha > 0$. Allora esiste un $\delta_1 > 0$ tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \;\Rightarrow\; \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq 2\alpha \,.$$

Procedendo come sopra, possiamo dedurre che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_0+\delta_1) - f(x)}{g(x_0+\delta_1) - g(x)} \geq 2\alpha \,.$$

Possiamo inoltre supporre che δ_1 sia tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \;\text{ e }\; g(x) \neq 0\,.$$

Definiamo $\psi(x)$ come sopra. Esiste un $\delta \in]0, \delta_1[$ tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; \psi(x) \leq 2\,.$$

Quindi, se $x_0 < x < x_0 + \delta$, si ha

$$\frac{1}{\psi(x)}\,\frac{f(x_0+\delta_1) - f(x)}{g(x_0+\delta_1) - g(x)} \geq \frac{1}{\psi(x)}\,2\alpha \geq \alpha\,,$$

da cui

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \alpha\,.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\,.$$

In modo del tutto analogo si dimostra che, se x_0 non è l'estremo sinistro dell'intervallo I, allora

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\,,$$

per cui il teorema è dimostrato, nel caso in cui $l = +\infty$. Il caso $l = -\infty$ è del tutto analogo al precedente. ■

Esempio. Vogliamo calcolare, se esiste, il

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x\,.$$

Poniamo $f(x) = \ln x$ e $g(x) = 1/x$. Notiamo che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$. Inoltre,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0\,.$$

Pertanto, anche

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Anche nel caso indeterminato del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ si possono scrivere gli analoghi teoremi se $x_0 = +\infty$ o $-\infty$. Vediamo il primo caso.

Teorema. *Sia I un intervallo non limitato superiormente e $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, tali che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty\,.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

e i due coincidono.

La dimostrazione è analoga a quella del caso $\frac{0}{0}$.

Una strana proprietà della funzione derivata

È interessante il seguente teorema in cui si afferma che la derivata di una funzione derivabile ha una proprietà analoga a quella vista, per le funzioni continue, nell'enunciato del teorema degli zeri.

Teorema (di Darboux). *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che*

$$f'(a) < 0 < f'(b) \quad \textit{oppure} \quad f'(a) > 0 > f'(b)\,,$$

allora esiste un $c \in \,]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il primo caso. Sia c un punto di minimo di f, la cui esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass. Essendo $f'(a) < 0 < f'(b)$, si vede che il punto c deve essere interno a $[a, b]$, e il teorema di Fermat ci dice che $f'(c) = 0$. Se invece $f'(a) > 0 > f'(b)$, si ragiona in maniera analoga, considerando un punto di massimo anziché di minimo. ■

Come conseguenza del teorema di Darboux, abbiamo che la derivata di una funzione derivabile "manda intervalli in intervalli".

Corollario. *Sia E un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Se $I \subseteq E$ è un intervallo, allora anche $f'(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Escludendo i casi banali in cui I o $f'(I)$ consistono di un unico punto, prendiamo $\alpha, \beta \in f'(I)$, con $\alpha < \beta$ e sia γ tale che $\alpha < \gamma < \beta$. Vogliamo vedere che $\gamma \in f'(I)$. Consideriamo la funzione $g : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(x) - \gamma x\,.$$

Siano a, b in I tali che $f'(a) = \alpha$ e $f'(b) = \beta$. Essendo I un intervallo, la funzione g è definita su $[a, b]$ (o $[b, a]$, nel caso in cui $b < a$) ed è ivi derivabile. Inoltre, $g'(a) < 0 < g'(b)$ e quindi, per il teorema di Darboux, esiste un $c \in \,]a, b[$ tale che $g'(c) = 0$. Essendo $g'(x) = f'(x) - \gamma$, si ha che $f'(c) = \gamma$. ■

Vediamo ora un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, la cui derivata non è continua. Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0\,, \\ \\ 0 & \text{se } x = 0\,, \end{cases}$$

e calcoliamone la derivata. Se $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\, x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,,$$

mentre se $x \neq 0$, abbiamo

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

La funzione è quindi derivabile, ma non esiste il $\lim_{x\to 0} f'(x)$, per cui la funzione f' non è continua in 0.

La teoria dell'integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata*. Questo significa che esistono due costanti c, C tali che

$$c \leq f(x) \leq C\,, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]\,.$$

Consideriamo una *suddivisione* dell'intervallo $[a, b]$: si tratta di un insieme finito di punti

$$\mathcal{D} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}\,,$$

tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Definiamo i numeri reali

$$\ell'_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,, \quad \ell''_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,,$$

(si ricordi che f è limitata) e le corrispondenti somme

$$\mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell'_k(x_k - x_{k-1})\,, \quad \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell''_k(x_k - x_{k-1})\,,$$

che chiameremo *somma inferiore* e *somma superiore*, rispettivamente. Si noti che $\mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(f, \mathcal{D})$, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$.

Definizione. *Se il numero reale*

$$\sigma'(f) = \sup\{\mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ è una suddivisione di } [a, b]\}$$

coincide con

$$\sigma''(f) = \inf\{\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ è una suddivisione di } [a, b]\}\,,$$

tale numero reale si chiama **integrale** *di f su $[a, b]$, e si indica con uno dei simboli*

$$\int_a^b f\,, \quad \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

In tal caso si dice che la funzione f è **integrabile** *(secondo Riemann) su $[a, b]$.*

Nel seguito avremo bisogno dei due lemmi seguenti.

Lemma 1. *Valgono le seguenti proprietà di monotonia:*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}_1) \le \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}_2)\,, \\ \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}_1) \ge \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}_2)\,. \end{aligned}$$

Inoltre, se $\mathcal{D}$ e $\widetilde{\mathcal{D}}$ sono due suddivisioni qualiasi di $[a, b]$, allora

$$\mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f, \widetilde{\mathcal{D}})\,.$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda le proprietà di monotonia, basterà dimostrare che esse valgono qualora $\mathcal{D}_2$ abbia un unico punto in più di $\mathcal{D}_1$, per poi iterare il ragionamento nel caso generale. Siano quindi

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}\,, \quad \mathcal{D}_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, \hat{x}, x_m, \dots, x_n\}\,,$$

dove $\hat{x}$ è il punto aggiuntivo. Allora, posto

$$\ell'_{m,1} = \inf\{f(x) : x \in [x_{m-1}, \hat{x}]\}\,, \quad \ell'_{m,2} = \inf\{f(x) : x \in [\hat{x}, x_m]\}\,,$$

si vede che $\ell'_m \le \ell'_{m,1}$ e $\ell'_m \le \ell'_{m,2}$, per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}_2) - \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}_1) &= \ell'_{m,1}(\hat{x} - x_{m-1}) + \ell'_{m,2}(x_m - \hat{x}) - \ell'_m(x_m - x_{m-1}) \\ &\ge \ell'_m(\hat{x} - x_{m-1}) + \ell'_m(x_m - \hat{x}) - \ell'_m(x_m - x_{m-1}) = 0\,. \end{aligned}$$

In modo analogo, posto

$$\ell''_{m,1} = \sup\{f(x) : x \in [x_{m-1}, \hat{x}]\}\,, \quad \ell''_{m,2} = \sup\{f(x) : x \in [\hat{x}, x_m]\}\,,$$

si vede che $\ell''_m \ge \ell''_{m,1}$ e $\ell''_m \ge \ell''_{m,2}$, per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}_2) - \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}_1) &= \ell''_{m,1}(\hat{x} - x_{m-1}) + \ell''_{m,2}(x_m - \hat{x}) - \ell''_m(x_m - x_{m-1}) \\ &\le \ell''_m(\hat{x} - x_{m-1}) + \ell''_m(x_m - \hat{x}) - \ell''_m(x_m - x_{m-1}) = 0\,. \end{aligned}$$

Siano ora $\mathcal{D}$ e $\widetilde{\mathcal{D}}$ due suddivisioni qualiasi di $[a, b]$. Allora $\mathcal{D} \cup \widetilde{\mathcal{D}}$ è anch'essa una suddivisione di $[a, b]$, e si ha

$$\mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) \le \mathcal{S}'(f, \mathcal{D} \cup \widetilde{\mathcal{D}}) \le \mathcal{S}''(f, \mathcal{D} \cup \widetilde{\mathcal{D}}) \le \mathcal{S}''(f, \widetilde{\mathcal{D}})\,,$$

per cui il lemma è dimostrato. ■

Lemma 2. *La funzione f è integrabile su $[a,b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ per cui*

$$\sigma - \varepsilon \le \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \le \sigma + \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Dalla definizione, ricordando le proprietà di monotonia viste nel Lemma 1, sappiamo che f è integrabile se e solo se esiste un numero reale σ tale che

per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ di $[a,b]$ per cui

$$\sigma - \varepsilon \le \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_2) \le \sigma + \varepsilon\,.$$

Sia f integrabile. Allora, tenendo sempre conto del Lemma 1, si conclude prendendo $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Viceversa, se vale la proprietà dell'enunciato, basta prendere $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$. ∎

Vediamo ora alcuni esempi.

Esempio 1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione costante di valore $\alpha \in \mathbb{R}$. Si verifica rapidamente che, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$, si ha $\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \alpha(b-a)$. Ne segue quindi che $\int_a^b f = \alpha(b-a)$, ossia che

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b-a)\,.$$

Esempio 2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x$. Vogliamo dimostrare che è integrabile e calcolarne l'integrale. Considerata una qualunque suddivisione $\mathcal{D}$, si vede subito che, essendo f strettamente crescente, $\ell'_k = f(x_{k-1}) = x_{k-1}$ e $\ell''_k = f(x_k) = x_k$. Pertanto,

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^n x_{k-1}(x_k - x_{k-1})\,, \quad \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1})\,.$$

Notiamo ora che, prendendo $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$,

$$\sum_{k=1}^n \xi_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \tfrac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)(x_k - x_{k-1}) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2) = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\,,$$

essendo quest'ultima una somma telescopica. Questo ci porta a congetturare che $\int_a^b f$ sia proprio uguale a $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, ossia che

$$\int_a^b x\,dx = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\,.$$

Dimostriamolo. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\mathcal{D}$ una suddivisione costituita da punti equidistanti, ossia

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}\,k\,, \qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Allora, per n sufficientemente grande,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(b^2-a^2) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{2n}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{b-a}{2n}\,(b-a) < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Analogamente si vede che

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \tfrac{1}{2}(b^2-a^2) < \varepsilon\,,$$

per cui

$$\tfrac{1}{2}(b^2-a^2) - \varepsilon \le \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \le \tfrac{1}{2}(b^2-a^2) + \varepsilon\,,$$

e la nostra congettura risulta dimostrata.

Esempio 3. Proponiamo ora un esempio di funzione non integrabile: la *funzione di Dirichlet*, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Si vede infatti che, qualsiasi sia la suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$, si ha $\ell_k' = 0$ e $\ell_k'' = 1$, per ogni k, per cui

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = 0\,, \quad \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = b-a\,.$$

Allora anche

$$\sigma'(f) = 0\,, \quad \sigma''(f) = b-a\,,$$

per cui f non è integrabile.

Sarà molto utile il seguente

Criterio di integrabilità. *La funzione f è integrabile su $[a,b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ per cui*

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \varepsilon\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Se f è integrabile su $[a,b]$, fissato $\varepsilon > 0$, per il Lemma 2 esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ per cui

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \le \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \le \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

e quindi $\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \varepsilon$.

Viceversa, supponiamo che valga la proprietà dell'enunciato. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ per cui $\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \varepsilon$. Se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ e sono due suddivisioni contenenti $\mathcal{D}$, dalle proprietà di monotonia segue che

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_2) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \varepsilon\,,$$

da cui

$$0 \leq \sigma''(f) - \sigma'(f) \leq \varepsilon\,.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ aribitrario, deve necessariamente essere che $\sigma'(f) = \sigma''(f)$. ■

Proprietà elementari delle funzioni integrabili

Passiamo ora a enunciare alcune proprietà elementari dell'integrale. Supporremo sempre che le funzioni $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ siano limitate.

Teorema. *Se f, g sono funzioni integrabili su $[a,b]$, anche $f+g$ lo è, e in tal caso*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,.$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono una suddivisione $\mathcal{D}_1$ di $[a,b]$ per cui

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) \geq \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

e una suddivisione $\mathcal{D}_2$ di $[a,b]$ per cui

$$\mathcal{S}'(g,\mathcal{D}_2) \geq \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sia $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$; essendo

$$\begin{aligned}&\inf\{f(x)+g(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\} \geq \\ &\qquad\qquad \geq \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\} + \inf\{g(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\}\,,\end{aligned}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'(f+g,\mathcal{D}) &\geq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) + \mathcal{S}'(g,\mathcal{D}) \\ &\geq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) + \mathcal{S}'(g,\mathcal{D}_2) \\ &\geq \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) - \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Analogamente, esistono una suddivisione $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ di $[a,b]$ per cui

$$\mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}}_1) \leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

e una suddivisione $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ di $[a,b]$ per cui

$$\mathcal{S}''(g,\widetilde{\mathcal{D}}_2) \leq \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sia $\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{\mathcal{D}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{D}}_2$; essendo

$$\begin{aligned}\sup\{f(x)+g(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\} \leq \\ \leq \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\} + \sup\{g(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\}\,,\end{aligned}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{S}''(f+g,\widetilde{\mathcal{D}}) &\leq \mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathcal{S}''(g,\widetilde{\mathcal{D}}) \\ &\leq \mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}}_1) + \mathcal{S}''(g,\widetilde{\mathcal{D}}_2) \\ &\leq \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) + \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Ne segue la tesi. ■

Teorema. *Se f è una funzione integrabile su $[a,b]$, anche λf lo è, per ogni numero reale λ, e in tal caso*

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f\,.$$

Dimostrazione. Se $\lambda = 0$, l'enunciato è chiaramente vero. Supponiamo quindi $\lambda \neq 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ per cui

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \leq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\,.$$

Si noti che, se $\lambda \geq 0$,

$$\mathcal{S}'(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda\mathcal{S}'(f,\mathcal{D})\,, \quad \mathcal{S}''(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda\mathcal{S}''(f,\mathcal{D})\,,$$

mentre se $\lambda < 0$,

$$\mathcal{S}'(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda\mathcal{S}''(f,\mathcal{D})\,, \quad \mathcal{S}''(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda\mathcal{S}'(f,\mathcal{D})\,.$$

Quindi, in ogni caso,

$$\lambda \int_a^b f - \varepsilon \leq \mathcal{S}'(\lambda f,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(\lambda f,\mathcal{D}) \leq \lambda \int_a^b f + \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

Teorema. *Se f è una funzione integrabile su $[a,b]$, anche $f^+ = \max\{f,0\}$, $f^- = \max\{-f,0\}$, $|f|$ e f^2 lo sono.*

Dimostrazione. Osserviamo che $f = f^+ - f^-$. Si può verificare che

$$\mathcal{S}''(f^+, \mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f^+, \mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}),$$

da cui segue che f^+ è integrabile, per il criterio di integrabilità. Quindi anche $f^- = f^+ - f$ è integrabile, e così pure $|f| = f^+ + f^-$.

Siccome $f^2 = |f|^2$, possiamo supporre senza perdita di generalità che sia $f \geq 0$. Osserviamo che, in tal caso,

$$\inf\{f^2(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = (\inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\})^2 = (\ell'_k)^2,$$

e

$$\sup\{f^2(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = (\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\})^2 = (\ell''_k)^2.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}''(f^2, \mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f^2, \mathcal{D}) &= \sum_{k=1}^{n} ((\ell''_k)^2 - (\ell'_k)^2)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ell''_k + \ell'_k)(\ell''_k - \ell'_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq 2\alpha \sum_{k=1}^{n} (\ell''_k - \ell'_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= 2\alpha(\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f, \mathcal{D})),
\end{aligned}$$

dove α è una costante tale che $|f(x)| \leq \alpha$ per ogni $x \in [a, b]$ (ricordiamo che f è limitata). Dal criterio di integrabilità segue allora che f^2 è integrabile su $[a, b]$. ■

Teorema. *Se f, g sono funzioni integrabili su $[a, b]$, anche fg lo è.*

Dimostrazione. Segue dalla relazione

$$fg = \tfrac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2),$$

e dai teoremi precedentemente dimostrati. ■

Vediamo ora una stima sulla "media integrale".

Teorema. *Se f è una funzione integrabile su $[a, b]$, allora*

$$\inf f([a, b]) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \sup f([a, b]).$$

Dimostrazione. Siano $c = \inf f([a, b])$ e $C = \sup f([a, b])$. Se $\mathcal{D}$ è una suddivisione di $[a, b]$, allora

$$c \leq \ell'_k \leq \ell''_k \leq C, \qquad \text{per ogni } k = 1, 2, \ldots, n,$$

per cui

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell'_k (x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)\,,$$

mentre

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell''_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} C(x_k - x_{k-1}) = C(b-a)\,.$$

Pertanto,

$$c \leq \frac{1}{b-a}\,\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \frac{1}{b-a}\,\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \leq C\,,$$

e ne segue che $c \leq \sigma'(f) \leq \sigma''(f) \leq C$, da cui la tesi. ■

Corollario. *Se f è una funzione integrabile su $[a,b]$ e $f \geq 0$, allora*

$$\int_a^b f \geq 0\,.$$

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del teorema precedente, essendo $\inf f([a,b]) \geq 0$. ■

Corollario. *Se f,g sono funzioni integrabili su $[a,b]$ e $f \leq g$, allora*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g\,.$$

Dimostrazione. Siccome $g - f \geq 0$, usando la linearità e il corollario precedente, abbiamo che

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) \geq 0\,,$$

da cui la tesi. ■

Corollario. *Se f è integrabile su $[a,b]$, allora*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

Dimostrazione. Si ha che $-|f| \leq f \leq |f|$ per cui, dal corollario precedente,

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|\,,$$

e ne segue la tesi. ■

Abbiamo il seguente **teorema di additività dell'integrale**.

Teorema. *Siano dati $a < c < b$. Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a,b]$ se e solo se lo è su $[a,c]$ e su $[c,b]$. In tal caso,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo che f sia integrabile su $[a,b]$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ tale che

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \varepsilon\,.$$

Per tale suddivisione $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ci sarà un certo m per cui si ha che $x_{m-1} < c \le x_m$. Definiamo quindi $\widetilde{\mathcal{D}} = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, c\}$, suddivisione di $[a,c]$. Allora

$$\mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}}) - \mathcal{S}'(f,\widetilde{\mathcal{D}}) \le \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \varepsilon\,,$$

per cui f è integrabile su $[a,c]$. Analogamente si vede che f è integrabile su $[c,b]$.

Supponiamo ora che f sia integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono una suddivisione $\mathcal{D}_1 = \{x_0, x_1, \dots, c\}$ di $[a,c]$ e una suddivisione $\mathcal{D}_2 = \{c, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$ di $[c,b]$ tali che

$$\int_a^c f - \frac{\varepsilon}{2} \le \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) \le \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_1) \le \int_a^c f + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$
$$\int_c^b f - \frac{\varepsilon}{2} \le \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_2) \le \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_2) \le \int_c^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sia $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Si ha che $\mathcal{D}$ è una suddivisione di $[a,b]$, e

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) + \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_2)\,, \quad \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_1) + \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_2)\,,$$

per cui

$$\left(\int_a^c f + \int_c^b f\right) - \varepsilon \le \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \le \left(\int_a^c f + \int_c^b f\right) + \varepsilon\,.$$

Abbiamo quindi che l'integrale di f su $[a,b]$ è proprio uguale a $\int_a^c f + \int_c^b f$. ■

Sarà conveniente definire $\int_a^b f$ anche nel caso in cui $a \ge b$, ponendo

$$\int_a^b f = -\int_b^a f\,, \quad \int_a^a f = 0\,.$$

Vale allora il seguente

Corollario. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile e u, v, w sono tre punti qualsiasi di $[a,b]$, allora*

$$\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f\,.$$

Dimostrazione. Il caso $u < v < w$ segue immediatamente dal teorema precedente. Gli altri casi si ottengono facilmente tenendo conto delle convenzioni adottate per gli integrali con estremi uguali o scambiati. ■

Il teorema fondamentale

Iniziamo con il dimostrare che ogni funzione continua è integrabile.

Teorema. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora essa è integrabile.*

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass, f è limitata. Inoltre, sappiamo (per il teorema di Heine) che f è uniformemente continua su $[a,b]$. Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|x - x'| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Sia $\mathcal{D}$ una suddivisione di $[a,b]$ avente tutti i punti equidistanti, con distanza $x_k - x_{k-1} \leq \delta$. Per il Teorema di Weierstrass, esisteranno dei $\xi'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ per cui $f(\xi'_k) = \ell'_k$ e dei $\xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ per cui $f(\xi''_k) = \ell''_k$. Allora

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} (f(\xi''_k) - f(\xi'_k))\,\frac{b-a}{n} \leq \left(n\,\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\frac{b-a}{n} = \varepsilon\,,$$

e il criterio di integrabilità permette di concludere. ■

Notiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, essa è integrabile su ogni intervallo $[a,x] \subset I$. Fissato che sia $a \in I$, si può pertanto definire la funzione

$$x \mapsto \int_a^x f\,,$$

che chiameremo **funzione integrale** o **integrale indefinito** di f, e indicheremo con uno dei simboli seguenti:

$$\int_a^{\cdot} f \quad , \quad \int_a^{\cdot} f(t)\,dt$$

(si noti che qui è conveniente usare una lettera diversa da x per indicare la variabile di f; ad esempio, qui abbiamo scelto la lettera t).

Introduciamo il concetto di funzione primitiva di una data funzione. Indichiamo con I un intervallo di $\mathbb{R}$.

Definizione. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice* **primitivabile** *su I se esiste una funzione derivabile $F : I \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Una tale funzione F si chiama* **primitiva** *di f su I.*

È chiaro che una funzione primitivabile avrà sempre un numero infinito di primitive, in quanto, trovatane una, basterà aggiungere una costante arbitraria per trovarne delle altre. La seguente proposizione ci dice che, oltre a quelle ottenibili in questo modo, non ce ne sono altre.

Proposizione. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione primitivabile, e sia F una sua primitiva. Allora una funzione $G : I \to \mathbb{R}$ è primitiva di f se e solo se $F - G$ è una funzione costante su I.*

Dimostrazione. Se $F - G$ è costante, si ha

$$G'(x) = F'(x) + (G - F)'(x) = F'(x) = f(x)\,,$$

per ogni $x \in I$, e perciò G è una primitiva di f. Viceversa, se G è una primitiva di f su I, si ha

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0\,,$$

per ogni $x \in I$. Ne segue che $F - G$ è costante su I. ■

Il **Teorema fondamentale del calcolo differenziale e integrale** stabilisce che tutte le funzioni continue su un intervallo $[a, b]$ sono primitivabili, e che il loro integrale si può calcolare facilmente, nota che sia una loro primitiva. Ecco l'enunciato.

Teorema Fondamentale. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è primitivabile e, se F è una qualunque sua primitiva, allora*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Dimostrazione. Faremo vedere che $\int_a^{\cdot} f$, la funzione integrale, è una primitiva di f. Poniamo quindi $G(x) = \int_a^x f$ e, preso un punto x_0 in $[a, b]$, andiamo a dimostrare che $G'(x_0) = f(x_0)$. Consideriamo dapprima il caso in cui $x_0 \in]a, b[$. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = f(x_0)\,.$$

Si noti che

$$\begin{aligned}\left|\frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f\right) - f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx\right|.\end{aligned}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo f continua in x_0, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in [a, b]$,

$$|x - x_0| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon\,.$$

Prendendo h tale che $0 < h \le \delta$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(x)-f(x_0))\,dx\right| &\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|\,dx\\ &\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\,dx=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Se invece $-\delta \le h < 0$, allora

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(x)-f(x_0))\,dx\right| &= \left|\frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0}(f(x)-f(x_0))\,dx\right|\\ &\le \frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0}|f(x)-f(x_0)|\,dx\\ &\le \frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0}\varepsilon\,dx=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0<|h|\le\delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}-f(x_0)\right|\le\varepsilon\,,$$

che è quanto volevasi provare. Nel caso in cui $x_0 = a$ o $x_0 = b$, si procede in modo analogo, considerando la derivata destra o la derivata sinistra, rispettivamente.

Sia ora F una qualunque primitiva di f. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ per cui $F(x) = G(x) + c$, e pertanto

$$F(b)-F(a)=(G(b)+c)-(G(a)+c)=\int_a^b f-\int_a^a f=\int_a^b f\,,$$

che è quanto volevasi dimostrare. ∎

Alcune osservazioni

Talvolta è comodo indicare la differenza $F(b) - F(a)$ con i simboli

$$[F]_a^b\,,\quad [F(x)]_{x=a}^{x=b}\,,$$

o con varianti di questi, come ad esempio $[F(x)]_a^b$, oppure $F(x)|_a^b$, qualora non ci siano ambiguità. Notiamo ancora che, se F è una qualunque primitiva della funzione f, la differenza $F(b)-F(a)$ non dipende dalla primitiva in questione. Infatti, se G è un'altra primitiva di F, necessariamente esiste una costante per cui $G(x) = F(x) + c$, per ogni x, e pertanto

$$G(b)-G(a)=(F(b)+c)-(F(a)+c)=F(b)-F(a)\,.$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = x^n$. È facile vedere che $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ne è una primitiva. Il teorema fondamentale ci assicura quindi che

$$\int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}\,.$$

Notiamo che la scelta del punto a nella definizione di $\int_a^{\cdot} f$ non è determinante. Si potrebbe prendere un qualsiasi punto $\omega \in I$ e considerare $\int_\omega^{\cdot} f$. Il teorema fondamentale ci assicura che, se F è una primitiva della funzione continua f, allora, per ogni $x \in I$,

$$\int_\omega^x f = F(x) - F(\omega)\,,$$

e pertanto $\int_\omega^{\cdot} f$ è una primitiva di f. Le convenzioni fatte sull'integrale con estremi scambiati ci assicurano inoltre che tale formula continua a valere anche se $x < \omega$, in quanto

$$\int_\omega^x f = -\int_x^\omega f = -(F(\omega) - F(x)) = F(x) - F(\omega)\,.$$

Possiamo scrivere, usando la notazione di Leibniz,

$$\frac{d}{dx}\int_\omega^x f = f(x)\,, \qquad \text{oppure} \qquad \frac{d}{dx}\int_\omega^x f(t)\,dt = f(x)\,.$$

Questa formula si può generalizzare: se $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili, allora

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)\,.$$

Infatti, se F è una primitiva di f, si ottiene la formula cercata derivando l'espressione $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$.

Indicheremo l'insieme di tutte le primitive di f con uno dei seguenti simboli:

$$\int f\,, \qquad \int f(x)\,dx\,.$$

Per quanto riguarda l'uso della x, vale un'osservazione analoga a quella fatta per l'integrale: essa può essere rimpiazzata da una qualunque altra lettera o simbolo, con le dovute precauzioni. Nella pratica, però, se F è una primitiva di f, invece della scrittura corretta

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}\,,$$

si usa spesso scrivere impropriamente espressioni del tipo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ indica una costante arbitraria; ci adegueremo anche noi a questa prassi. Elenchiamo ad esempio le primitive di alcune funzioni elementari:

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$
$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$$

Le formule scritte sopra vanno considerate sugli opportuni intervalli di definizione. Ad esempio, la terz'ultima formula va così interpretata:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \begin{cases} \ln x \,, & \text{se } x \in]0, +\infty[\,, \\ \ln(-x) \,, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\,. \end{cases}$$

Esempio. Usando il teorema fondamentale, troviamo:

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2 \,.$$

Notiamo che la presenza della costante arbitraria c può talvolta portare a risultati in apparenza diversi. Ad esempio, si verifica facilmente che si ha anche

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\arccos x + c \,.$$

Ciò si spiega con il fatto che $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ per ogni $x \in [-1, 1]$, e non bisogna pensare che qui c indichi la stessa costante che appare nell'ultima formula dell'elenco scritto sopra.

La notazione introdotta per le primitive assomiglia a quella dell'integrale, anche se i due concetti sono completamente diversi. Essi sono però legati tra loro dal teorema fondamentale: si ha

$$\int_\omega^{\cdot} f \in \int f \,,$$

con $\omega \in I$ qualsiasi, e

$$\int_a^b f = \left[\int_\omega^{\cdot} f \right]_a^b \,.$$

Si potrebbe essere tentati di scrivere

$$\int_a^b f = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b ;$$

in realtà il termine di sinistra è un numero reale, mentre quello di destra è qualcosa di non ben definito (potrebbe essere un insieme il cui unico elemento è $\int_a^b f$). Nella pratica si abusa però spesso di queste notazioni.

Vediamo ora un esempio di funzione integrabile ma non primitivabile. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x = \xi\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Qui ξ è un punto di $[a, b]$ e α è una costante positiva (se $\alpha < 0$ il ragionamento è analogo). Si vede allora che, presa una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$, con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

si ha che

$$\ell'_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0\,,$$

per cui

$$\mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell'_k(x_k - x_{k-1}) = 0\,,$$

e quindi $\sigma'(f) = 0$. D'altra parte, $\ell''_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ è non nulla per uno o al più due valori di k, per cui la somma $\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell''_k(x_k - x_{k-1})$ ha solamente uno o due addendi non nulli: possiamo scrivere

$$\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) = \alpha(x_{\bar{k}} - x_{\bar{k}-1})\,, \text{ oppure } \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) = \alpha(x_{\bar{k}} - x_{\bar{k}-1}) + \alpha(x_{\bar{k}+1} - x_{\bar{k}})\,,$$

per un certo $\bar{k} \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Siccome le lunghezze $x_{\bar{k}} - x_{\bar{k}-1}$ e $x_{\bar{k}+1} - x_{\bar{k}}$ possono essere prese arbitrariamente piccole, otteniamo che $\sigma''(f) = 0$. In conclusione, abbiamo dimostrato che f è integrabile e

$$\int_a^b f = 0\,.$$

Chiaramente questo ragionamento può essere fatto anche per una funzione che sia diversa da zero solo su un numero finito di punti. L'integrale "non vede" questi punti. Naturalmente, se l'insieme di punti diventa infinito, le cose cambiano.

Vediamo ora come si tratta una funzione definita a tratti. Sia $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ avente i seguenti valori:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \le x < 4\,, \\ 5 & \text{se } 4 \le x \le 7\,. \end{cases}$$

Useremo la formula $\int_0^7 f = \int_0^4 f + \int_4^7 f$. Notiamo che f è costante su $[4,7]$, per cui $\int_4^7 f = 5(7-4) = 15$. D'altra parte, sull'intervallo $[0,4]$ abbiamo che f è "quasi costante", nel senso che differisce dalla costante 2 su un unico punto; in altri termini,

$$f(x) - 2 = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,4[\,, \\ 3 & \text{se } x = 4\,. \end{cases}$$

Allora $\int_0^4 f = \int_0^4 (f-2) + \int_0^4 2 = 0 + 2(4-0) = 8$. Pertanto, $\int_0^7 f = 15 + 8 = 23$.

Si potrà procedere in modo analogo qualora una funzione sia definita a tratti su un intervallo $[a,b]$: se ad esempio $f_1 : [a,c] \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [c,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, con $a < c < b$, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } a \leq x < c\,, \\ f_2(x) & \text{se } c \leq x \leq b\,, \end{cases} \quad \text{oppure } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } a \leq x \leq c\,, \\ f_2(x) & \text{se } c < x \leq b\,, \end{cases}$$

possiamo scrivere $\int_a^b f = \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2$.

Alcune regole di primitivazione

Dalle note proprietà delle derivate si possono facilmente dimostrare le seguenti proposizioni.

Proposizione. *Siano f e g due funzioni primitivabili e siano F e G primitive di f e g, rispettivamente. Allora $f+g$ è primitivabile e $F+G$ ne è una primitiva; scriveremo brevemente:*

$$\int (f+g) = \int f + \int g\,.$$

Proposizione. *Sia f una funzione primitivabile e sia F una sua primitiva. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario. Allora αf è primitivabile e αF ne è una primitiva; scriveremo brevemente:*

$$\int (\alpha f) = \alpha \int f\,.$$

Introduciamo ora due metodi spesso usati per determinare le primitive di alcune funzioni. Il primo è noto come metodo di primitivazione **per parti**. Nel seguito, $I \subset \mathbb{R}$ sarà sempre un intervallo.

Proposizione. *Siano $F, G : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, e siano f, g le rispettive derivate. Si ha che fG è primitivabile su I se e solo se Fg lo è, nel qual caso una primitiva di fG è ottenuta sottraendo da FG una primitiva di Fg; scriveremo brevemente:*

$$\int fG = FG - \int Fg\,.$$

Dimostrazione. Essendo F e G derivabili, anche FG lo è, e si ha

$$(FG)' = fG + Fg\,.$$

Essendo $(FG)'$ primitivabile su I con primitiva FG, la tesi segue dalla proposizione precedente. ■

Esempio. Si voglia trovare una primitiva della funzione $h(x) = xe^x$. Definiamo le seguenti funzioni: $f(x) = e^x$, $G(x) = x$, e conseguentemente $F(x) = e^x$, $g(x) = 1$. Applicando la formula della proposizione, si ha:

$$\int e^x x\,dx = e^x x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c\,,$$

dove c indica, come sempre, una costante arbitraria.

Come immediata conseguenza della proposizione precedente, nel caso in cui f e g siano continue, il Teorema Fondamentale ci fornisce la regola di **integrazione per parti**:

$$\int_a^b fG = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b Fg\,.$$

Esempi. Applicando la formula direttamente alla funzione $h(x) = xe^x$ dell'esempio precedente, otteniamo

$$\int_0^1 e^x x\,dx = e^1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1\,.$$

Notiamo che si può giungere allo stesso risultato usando il teorema fondamentale, avendo già trovato che una primitiva di h è data da $H(x) = xe^x - e^x$:

$$\int_0^1 e^x x\,dx = H(1) - H(0) = (e - e) - (0 - 1) = 1\,.$$

Vediamo ancora un paio di esempi. Sia $h(x) = \sin^2 x$. Con l'ovvia scelta delle funzioni f e G, troviamo

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x\,dx\\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx\\ &= x - \cos x \sin x - \int \sin^2 x\,dx\,,\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + c\,.$$

Consideriamo ora il caso della funzione $h(x) = \ln x$, con $x > 0$. Per applicare la formula di primitivazione per parti, scegliamo le funzioni $f(x) = 1$, $G(x) = \ln x$. In questo modo, si trova

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c \, .$$

Il secondo metodo che vogliamo studiare è noto come metodo di primitivazione **per sostituzione**.

Proposizione. *Siano $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo contenente $\varphi(I)$, e $f : J \to \mathbb{R}$, una funzione primitivabile, con primitiva F. Allora la funzione $(f \circ \varphi)\varphi'$ è primitivabile su I, e una sua primitiva è data da $F \circ \varphi$. Scriveremo brevemente:*

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f \right) \circ \varphi \, .$$

<u>Dimostrazione</u>. Il teorema di derivazione delle funzioni composte assicura che la funzione $F \circ \varphi$ è derivabile su I e

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi' \, .$$

Ne segue che $(f \circ \varphi)\varphi'$ è primitivabile con primitiva $F \circ \varphi$. ■

Ad esempio, cerchiamo una primitiva della funzione $h(x) = xe^{x^2}$. Definendo $\varphi(x) = x^2$, $f(t) = \frac{1}{2}e^t$ (è consigliabile usare lettere diverse per indicare le variabili di φ e di f), si ha che $h = (f \circ \varphi)\varphi'$. Essendo una primitiva di f data da $F(t) = \frac{1}{2}e^t$, si ha che una primitiva di h è $F \circ \varphi$, ossia

$$\int xe^{x^2} \, dx = F(\varphi(x)) + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c \, .$$

Come conseguenza, se f e φ' sono continue, abbiamo la regola di **integrazione per sostituzione**:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt \, .$$

Infatti, se F è una primitiva di f su $\varphi(I)$, per il Teorema Fondamentale, si ha

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

Esempio. Prendendo la funzione $h(x) = xe^{x^2}$ definita sopra, si ha

$$\int_0^2 xe^{x^2} \, dx = \int_0^4 \frac{1}{2}e^t \, dt = \frac{1}{2}[e^t]_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1) \, .$$

Chiaramente, lo stesso risultato si ottiene con il teorema fondamentale, una volta noto che una primitiva di h è data da $H(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Infatti, si ha

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = H(2) - H(0) = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)\,.$$

Nota. La formula di primitivazione per sostituzione si trova spesso scritta nella forma

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)}\,,$$

dove, se F è una primitiva di f, il termine di destra si legge

$$\int f(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + c\,,$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria. Formalmente, si opera il cambiamento di variabile $t = \varphi(x)$, e il simbolo dt viene a rimpiazzare $\varphi'(x)\,dx$ (la notazione di Leibniz $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ può essere usata come regola mnemonica).

Esempio. Per trovare una primitiva della funzione $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, possiamo scegliere $\varphi(x) = \ln x$, applicare la formula

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt\Big|_{t=\ln x}\,,$$

e trovare così $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$ (in questo caso, scrivendo $t = \ln x$, si ha che il simbolo dt rimpiazza $\frac{1}{x}dx$).

Nel caso in cui la funzione $\varphi : I \to \varphi(I)$ sia invertibile, si può anche scrivere

$$\int f(t)\,dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)}\,,$$

con la corrispondente formula per l'integrale:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\,.$$

Esempi. 1. Volendo trovare una primitiva di $f(t) = \sqrt{1-t^2}$, con $t \in [-1,1]$, si può considerare la funzione $\varphi : [0,\pi] \to [-1,1]$ definita da $\varphi(x) = \cos x$. Essendo $\varphi^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$ definita da $\varphi^{-1}(t) = \arccos t$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-t^2}\,dt &= \int \sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin x)\,dx\Big|_{x=\arccos t} \\
&= -\int \sin^2 x\,dx\Big|_{x=\arccos t} \\
&= -\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)\Big|_{x=\arccos t} + c \\
&= -\frac{1}{2}(\arccos t - t\sqrt{1-t^2}) + c
\end{aligned}$$

(ponendo $t = \cos x$, il simbolo dt è rimpiazzato da $-\sin x\,dx$).

2. Se $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ è una funzione derivabile, strettamente crescente e invertibile, allora, essendo $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$, prendendo $f = \varphi^{-1}$ si ha

$$\int_\alpha^\beta \varphi^{-1}(t)\,dt = \int_a^b x\varphi'(x)\,dx = b\varphi(b) - a\varphi(a) - \int_a^b \varphi(x)\,dx\,.$$

La formula di Taylor

Il seguente teorema ci fornisce la cosiddetta "formula di Taylor con resto di Lagrange".

Teorema. *Siano $x \neq x_0$ due punti di un intervallo I e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n+1$ volte su I. Allora esiste un $\xi \in]x_0, x[$ tale che*

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)\,,$$

dove

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

è il "polinomio di Taylor di grado n associato alla funzione f nel punto x_0" e

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

è il "resto di Lagrange".

<u>Dimostrazione</u>. Osserviamo che il polinomio p_n soddisfa alle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = f(x_0)\,, \\ p_n'(x_0) = f'(x_0)\,, \\ p_n''(x_0) = f''(x_0)\,, \\ \quad\vdots \\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,. \end{cases}$$

Applicando il teorema di Cauchy, troviamo un $\xi_1 \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{(f(x)-p_n(x)) - (f(x_0)-p_n(x_0))}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi_1)-p_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\,.$$

Applicando di nuovo il teorema di Cauchy, troviamo un $\xi_2 \in]x_0, \xi_1[$ tale che

$$\frac{f'(\xi_1)-p_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{(f'(\xi_1)-p_n'(\xi_1)) - (f'(x_0)-p_n'(x_0))}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n - (n+1)(x_0-x_0)^n} = \frac{f''(\xi_2)-p_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}\,.$$

Procedendo per induzione, troviamo $n+1$ elementi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ tali che

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{f'(\xi_1)-p_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \\ &= \frac{f''(\xi_2)-p_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} \\ &\;\vdots \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})-p_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!(\xi_{n+1}-x_0)^0}\,. \end{aligned}$$

Se $x > x_0$, si ha

$$x_0 < \xi_{n+1} < \xi_n < \ldots < \xi_2 < \xi_1 < x\,,$$

mentre se $x < x_0$ si ha l'ordine opposto. Essendo la derivata $(n+1)-$esima di un polinomio di grado n sempre nulla, si ha che $p_n^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0$ e ponendo $\xi = \xi_{n+1}$ si ottiene la tesi. ∎

Osserviamo che, se $n = 0$, si ha l'equivalente del teorema di Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)\,, \qquad \text{per un certo } \xi \in]x_0, x[\,.$$

Si noti che il polinomio di Taylor

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

potrebbe in realtà avere un grado inferiore a n (ad esempio, per una funzione costante, $p_n(x)$ ha sempre grado 0).

Esempi. Determiniamo il polinomio di Taylor di alcune funzioni considerando per semplicità il caso $x_0 = 0$.

1) Sia $f(x) = e^x$. Si ha:

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

2) Sia $f(x) = \cos x$. Allora, se $n = 2m$ o $n = 2m+1$,

$$p_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

3) Sia $f(x) = \sin x$. Allora, se $n = 2m+1$ o $n = 2m+2$,

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Teorema. *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che*

$$e^x = \lim_n \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

<u>Dimostrazione</u>. La formula è chiaramente vera se $x = 0$. Se $x \neq 0$, per la formula di Taylor con resto di Lagrange, esiste un $\xi \in]0, x[$ tale che $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$, con

$$r_n(x) = e^{\xi}\, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Vogliamo dimostrare che $\lim_n r_n(x) = 0$. Osserviamo che

$$|r_n(x)| \leq e^{|x|}\, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

e sappiamo che, per ogni $a > 0$, si ha $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$. Ne segue la tesi. ∎

Scriveremo brevemente
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,,$$
la "serie di Taylor" associata alla funzione esponenziale nel punto $x_0 = 0$.

Con analoga dimostrazione, si ha pure il seguente

Teorema. *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che*
$$\cos x = \lim_m \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}\right)\,,$$
$$\sin x = \lim_m \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\,.$$

Scriveremo brevemente:
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Queste funzioni, per cui si ha che $f(x) = \lim_n p_n(x)$, si chiamano *analitiche.* Non tutte le funzioni lo sono. Per esempio, la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,, \end{cases}$$
è derivabile infinite volte, e $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, per cui $p_n(x)$ è identicamente nullo.

Calcoliamo ancora i polinomi di Taylor associati ad alcune funzioni elementari, nel punto $x_0 = 0$. Iniziamo con la funzione
$$f(x) = \frac{1}{1-x}\,.$$
Si dimostra per induzione che la sua derivata n-esima ha la seguente espressione:
$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\,.$$
Pertanto, $f^{(n)}(0) = n!$ e il polinomio cercato è
$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n\,.$$
Si procede similmente per la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x}$, per la quale troviamo
$$p_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n\,.$$
Consideriamo ora la funzione $f(x) = \ln(1+x)$. La sua derivata coincide con la funzione precedente, per cui si ricava rapidamente
$$p_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,.$$

Un altro esempio per cui è possibile calcolare il polinomio di Taylor è la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, per cui si ha che, se $n = 2m$ o $n = 2m+1$,

$$p_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^m x^{2m} .$$

A questo punto risulta agevole trattare la funzione $f(x) = \arctan x$, la cui derivata coincide con la funzione precedente, per cui si ha che, se $n = 2m+1$ o $n = 2m+2$,

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} .$$

Da quanto visto finora, non sarà difficile trovare le espressioni generali dei polinomi di Taylor delle funzioni iperboliche $\cosh x$, $\sinh x$, nonchè di $\tanh^{-1} x$. Riportiamo la seguente tabella riassuntiva.

$f(x)$	$p_n(x)$ *nel punto* $x_0 = 0$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!}$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
$\tanh^{-1} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$

Non risulta invece elementare la formula del polinomio di Taylor per le funzioni $\tan x$ e $\tanh x$, di cui riportiamo solo i primi termini.

$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$
$\tanh x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots$

Tenendo fisso x_0, vogliamo ora vedere cosa succede se $x \to x_0$. Per ogni $x \neq x_0$, per evidenziare il fatto che il nostro $\xi \in]x_0, x[$ dipende da x, scriviamo $\xi = \xi_x$. Allora, se $f^{(n+1)}$ è *limitata in un intorno di* x_0, avremo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x - x_0) = 0 .$$

Talvolta per questa relazione di limite si usa la seguente notazione:

$$r_n(x) = o(|x - x_0|^n) \qquad \text{se } x \to x_0 \, .$$

Notiamo ancora che, se $f^{(n+1)}$ è *continua in* x_0, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) \, .$$

Questo ci permette, in alcuni casi, di determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo locale di una funzione. Ad esempio, se x_0 è un punto, interno al dominio I di f, in cui $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2!} f''(x_0) > 0 \, ,$$

da cui si deduce, usando il teorema sulla permanenza del segno, che esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > f(x_0)$, per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$. Pertanto,

se $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) > 0$*, allora* x_0 *è un punto di minimo locale.*

Analogamente si vede che

se $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) < 0$*, allora* x_0 *è un punto di massimo locale.*

Qualora $f'(x_0) = 0$ e anche $f''(x_0) = 0$, dovremo guardare alla derivata terza. Se $f'''(x_0) \neq 0$, allora x_0 non è nè di minimo nè di massimo locale. Se anche $f'''(x_0) = 0$, allora si vede che

se $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ *e* $f''''(x_0) > 0$,
allora x_0 *è un punto di minimo locale.*

mentre

se $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ *e* $f''''(x_0) < 0$,
allora x_0 *è un punto di massimo locale.*

Il procedimento può essere continuato. Tralasciamo i dettagli, per brevità.

Concludiamo con la "formula di Taylor con resto integrale".

Teorema. *Siano* $x \neq x_0$ *due punti di un intervallo* I *e* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile* $n+1$ *volte su* I*, con derivata* $(n+1)$*-esima continua. Allora*

$$f(x) = p_n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(u)(x - u)^n \, du \, ,$$

dove $p_n(x)$ *è il polinomio di Taylor di grado* n *nel punto* x_0*.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione. Se $n = 0$, usando il Teorema Fondamentale,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(u) \, du = p_0(x) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^{x} f^{(0+1)}(u)(x - u)^0 \, du \, ,$$

per cui la formula è vera.

Supponiamo ora che sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned}
f(x) - p_{n+1}(x) &= f(x) - \Big(p_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}\Big) \\
&= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(u)(x-u)^n\,du - \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} \\
&= \frac{1}{n!}\left(\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(u)(x-u)^n\,du - \frac{1}{n+1}\, f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Integrando per parti,

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(u)(x-u)^n\,du = \\
&= \left[\Big(-\frac{(x-u)^{n+1}}{n+1}\Big) f^{(n+1)}(u)\right]_{u=x_0}^{u=x} - \int_{x_0}^{x}\Big(-\frac{(x-u)^{n+1}}{n+1}\Big) f^{(n+2)}(u)\,du \\
&= \frac{1}{n+1}\, f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(u)(x-u)^{n+1}\,du\,,
\end{aligned}$$

e sostituendo,

$$\begin{aligned}
f(x) - p_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(u)(x-u)^{n+1}\,du\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(u)(x-u)^{n+1}\,du\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la formula vale anche per $n+1$, e la dimostrazione è completa. ■

La funzione esponenziale complessa

Abbiamo visto che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, ponendo

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,,$$

si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = e^x.$$

Definiamo ora le funzioni $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in questo modo:

$$q_n(y) = p_n(iy) = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\,\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\,\frac{y^7}{7!} + \ldots + i^n\frac{y^n}{n!}\,.$$

Abbiamo quindi che

$$q_n(y) = q_n^{(1)}(y) + i q_n^{(2)}(y)\,,$$

dove

$$q_n^{(1)}(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots + (-1)^m\frac{y^{2m}}{(2m)!}$$

se $n = 2m$ o $n = 2m+1$, mentre

$$q_n^{(2)}(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots + (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

se $n = 2m+1$ o $n = 2m+2$. Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} q_n^{(1)}(y) = \cos y\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} q_n^{(2)}(y) = \sin y\,,$$

concludiamo quindi che

$$\lim_{n\to\infty} q_n(y) = \cos y + i \sin y\,,$$

ossia

$$\lim_{n\to\infty} p_n(iy) = \cos y + i \sin y\,,$$

Per analogia con la formula trovata in precedenza, si decide di denotare questa espressione con il simbolo e^{iy}. Ecco allora che, per ogni numero complesso $z = x + iy$, risulterà naturale porre

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)\,.$$

Resta così definita la funzione *esponenziale complessa* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ponendo

$$\exp(x+iy) = e^{x+iy}.$$

Si noti che

$$|e^{x+iy}| = |e^x|\,|e^{iy}| = e^x\,,$$

per cui $\exp(z) \neq 0$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Ricordando la funzione circolare $h_T : \mathbb{R} \to S^1$, abbiamo che

$$h_{2\pi}(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}\,.$$

Sappiamo che $\widetilde{h}_{2\pi} : [0, 2\pi[\to S^1$, la restrizione di $h_{2\pi}$ all'intervallo $[0, 2\pi[$, è biiettiva. Ora, siccome ogni numero complesso $z \neq 0$ si può scrivere come

$$z = |z|\,\frac{z}{|z|}\,, \qquad \text{con } |z| > 0 \text{ e } \frac{z}{|z|} \in S^1,$$

vediamo che esso determina univocamente due numeri $\rho = |z|$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ tale che

$$\frac{z}{|z|} = h_{2\pi}(\theta) = e^{i\theta}\,.$$

Ecco quindi che ogni numero complesso z si potrà scrivere come

$$z = \rho e^{i\theta}\,,$$

dove $\rho \geq 0$ è il *modulo* e $\theta \in [0, 2\pi[$ è l'*argomento* di z (se però $z = 0$, l'argomento non risulta univocamente definito).

Con le note proprietà di omomorfismo viste durante il corso, si può verificare che, per ogni z_1, z_2 in $\mathbb{C}$, si ha che

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)\,.$$

Infatti, se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, si ha

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+x_2} h_{2\pi}(y_1+y_2) = e^{x_1} e^{x_2} h_{2\pi}(y_1) h_{2\pi}(y_2) \\ &= e^{x_1} h_{2\pi}(y_1)\, e^{x_2} h_{2\pi}(y_2) = e^{x_1} e^{iy_1}\, e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \end{aligned}$$

Possiamo pertanto affermare che la funzione esponenziale complessa è un omomorfismo tra $(\mathbb{C}, +)$ e $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Il fatto che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z\,,$$

si può interpretare dicendo che la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi i$. Questo fatto compromette la possibile definizione di una funzione "logaritmo" nel campo complesso: dato $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, l'equazione

$$e^u = z\,,$$

vista la periodicità della funzione esponenziale, presenta molteplici soluzioni. Precisamente, se scriviamo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, il numero complesso $u = x+iy$ ne è soluzione se e solo se

$$e^x(\cos y + i\sin y) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$

ossia

$$x = \ln\rho\,, \quad y = \theta + 2\pi k\,,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto,

$$e^u = z \quad \Leftrightarrow \quad u \in \{\ln|z| + i(Arg(z) + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Talvolta si interpreta il "logaritmo complesso" come una "funzione multivoca" che assume in questo caso infiniti valori, riservando il nome di "logaritmo principale" al particolare valore ottenuto scegliendo $k = 0$. Ad esempio, il logaritmo complesso del numero i assume tutti i valori dell'insieme

$$\left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}\,.$$

Il logaritmo principale di i vale pertanto $\frac{\pi}{2}i$.

Si noti che, scrivendo per $t \in \mathbb{R}$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \,, \qquad e^{-it} = \cos t - i \sin t \,,$$

si trova che

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \,, \qquad \sin t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2i} \,.$$

Queste formule possono essere usate per estendere le funzioni cos e sin al campo complesso, assumendole valide anche per $t \in \mathbb{C}$. Anche le funzioni iperboliche possono essere estese a $\mathbb{C}$ con le loro formule

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \,, \qquad \sinh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \,.$$

Si avrà quindi che

$$\cos t = \cosh(it) \,, \qquad \sin t = -i \, \sinh(it) \,.$$

In questo contesto risulta ben chiaro il legame di parentela che c'è tra queste funzioni.