

Nome e Cognome .....

Corso di studi ..... Del Santo  Fonda

**Esercizio 1.** (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin^2 x) \log(1 + x^2)} = \boxed{\phantom{000}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{x^2 - 1} - x)^x = \boxed{\phantom{000}}.$$

**Esercizio 2.** (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = -\log\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan(x - 1),$$

determinando

i) Dominio: .

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima  $f'(x) =$   
e suo segno.

iii) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda  $f''(x) =$

vi) Grafico di  $f$ .

vii) Si determini il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = -1$ .

---

**Esercizio 3.** (2+2+2 pt) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa.

i) Dati  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , con  $x_1 < x_2$ , si provi che, per ogni  $x, \alpha \in \mathbb{R}$ , se  $x < x_1$  e  $\alpha \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  allora  $f(x) \geq f(x_1) + \alpha(x - x_1)$ .

ii) Si supponga che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Si provi che  $f$  è crescente.

iii) Si supponga che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Si provi che se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$  allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

---

**Esercizio 4.** (4+4 pt) Si calcoli

$$\int_0^\pi (\sin x)^4 dx = \boxed{\phantom{000}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\tan^2 x} \frac{\sin t}{t} dt}{x^2} = \boxed{\phantom{000}}.$$