

Nome e Cognome

Corso di studi Del Santo Fonda

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2(3x))}{e^{\tan^2(5x)} - 1} = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\sqrt{x}) \right) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 4},$$

determinando

i) Dominio: .

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

iii) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda $f''(x) =$

vi) Grafico di f .

vii) Si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 2$.

Esercizio 3. (2+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Dimostrare che:

i) f è strettamente crescente.

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

iii) Trovare un esempio di una tale funzione f che sia derivabile e per la quale

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0.$$

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcoli

$$\int_0^{2\pi} \tanh(\cos x) \sin x \, dx = \boxed{},$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} \, dt = \boxed{}.$$