

Nome e Cognome .....

Corso di studi ..... Del Santo  Fonda

---

**Esercizio 1.** (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x \tan x}{x^4} = \boxed{\phantom{000}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x^2 - 2} \sqrt{x^2 - 1} = \boxed{\phantom{000}}.$$

---

**Esercizio 2.** (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \log(4e^{2x} - e^x + 1),$$

determinando

i) Dominio:

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima  $f'(x) =$   
e suo segno.

iii) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda  $f''(x) =$

vi) Grafico di  $f$ .

vii) Si dica, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\log(4e^{2x} - e^x + 1) = \alpha.$$

---

**Esercizio 3.** (3+2+2 pt) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile e si supponga

$$f(a) = f(b) = 0 \quad \text{e} \quad f'(a) = f'(b) = -\frac{1}{2}.$$

Dimostrare che:

i) esiste  $\bar{\xi} \in ]a, b[$  tale che  $f(\bar{\xi}) = 0$ ;

ii) esistono almeno due punti  $\xi_1, \xi_2 \in ]a, b[$ , con  $\xi_1 < \xi_2$ , tali che  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ ;

iii) se  $f$  è due volte derivabile, allora esiste almeno un punto  $\xi_3 \in ]a, b[$  tale che  $f''(\xi_3) = 0$ .

**Esercizio 4.** (3+4 pt)

i) Si determinino tutti i numeri complessi  $z$  tali che

$$\bar{z}z^2 - |z|^2 = -2z.$$

ii) Si determinino tutti i numeri complessi  $z$  tali che

$$\bar{z} = -iz^3.$$