CdS Fisica, Esame di Analisi Matematica 1, 18/2/2021 D

Nome e Cognome ....

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(\tan x)}{1-\cos(\tanh x)} = \boxed{}\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln \dfrac{5x^2+1}{6x}}{\ln \dfrac{2x^2-1}{3x}} = \boxed{}\,.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{(x+2)(x+4)}\,,$$

determinando:

i) Dominio: $\boxed{}$.

ii) Limiti importanti:

iii) Derivata prima $f'(x) =$ $\boxed{}$

e suo segno.

iv) Intervalli di crescenza e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

v) Derivata seconda $f''(x) =$ $\boxed{}$

vi) Eventuali informazioni sulla concavità/convessità e grafico di f.

Esercizio 3. [1](3+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, con

$$f'(-2) = 0 = f'(1)\,,$$

tale che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su } \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\,, \\ \text{strettamente convessa su } \left]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[\,, \\ \text{strettamente concava su } \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\,. \end{cases}$$

Dimostrare che:

i) sia -2 che 1 sono punti di massimo locale;

ii) esiste un unico punto di minimo locale in $[-2, 1]$;

iii) non esistono altri punti di massimo o di minimo locale.

[1]Il testo di questo esercizio è stato qui modificato, in quanto non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, con $f'(-2) = 0 = f'(1)$, tale che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su }]-\infty, -2[\,, \\ \text{strettamente convessa su }]-2, 1[\,, \\ \text{strettamente concava su }]1, +\infty[\,. \end{cases}$$

Infatti, la derivata f' di una tale funzione dovrebbe essere strettamente crescente su $]-2, 1[$ con $f'(-2) = 0 = f'(1)$, il che è impossibile!

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx = \boxed{}\,, \qquad \int_0^{3\pi} x^2\cos x\,dx = \boxed{}\,.$$