PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

5 febbraio 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 2

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 2.1

Si sfrutti il Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a tempo discreto per individuare una funzione di Lyapunov quadratica per il sistema:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= +0.5\,x_1(k) + 0.5\,x_2(k) - 1.2\,u(k) \\ x_2(k+1) &= 0.25\,x_1(k) + 0.3\,x_2(k) + 0.98\,u(k) \\ y(k) &= 1.25\,x_1(k) - 0.815\,x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

matrice A delle eq. di stato

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/10 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico: perché? (*)

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} (\lambda - 1/2) & -1/2 \\ -1/4 & (\lambda - 3/10) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{10}\right) - \frac{1}{8} = \lambda^2 - \lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right) + \frac{3}{20} - \frac{1}{8}$$

$$= \lambda^2 - \frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{10}\,5}\lambda + \frac{1}{40} = \lambda^2 - \frac{4}{5}\lambda + \frac{1}{40}$$

autovalori:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{1}{10}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{32-5}{50}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{27}{50}}\right]$$

$$= \frac{2}{5} \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} \pm \frac{3}{10}\,\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2}{5} \pm \frac{3\sqrt{6}}{20}$$

NB $\Rightarrow$ $\lambda_1 \simeq 0{,}0326$ $\quad$ $\lambda_2 \simeq 0{,}7674$

(8) per verifica + adesso SO PER CERTO che troverò una matrice P simmetrica e def positiva, soluzione dell'equazione di Lyapunov!

Equazione di Lyapunov

$$A^T P A - P = -Q$$

scelgo Q simmetrica e def. positiva

Dall'analisi fatta sugli autovalori di A, SO che DEVO trovare P simmetrica e def positiva...

Per comodità

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} \quad \text{con vincoli:} \begin{cases} p_1 > 0 \\ p_1 p_2 - \bar{p}^2 > 0 \end{cases}$$

$A^T P A - P = -Q$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(p_1/2 + \frac{\bar{p}}{4}\right) & \left(\frac{\bar{p}}{2} + \frac{p_2}{4}\right) \\ \left(p_1/2 + \frac{3}{10}\bar{p}\right) & \left(\frac{\bar{p}}{2} + \frac{3}{10}p_2\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(p_1/2 + \frac{\bar{p}}{4}\right) & \left(\frac{\bar{p}}{2} + \frac{p_2}{4}\right) \\ \left(p_1/2 + \frac{3}{10}\bar{p}\right) & \left(\frac{\bar{p}}{2} + \frac{3}{10}p_2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/10 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{p_1}{4} + \frac{p_2}{16} + \frac{\bar{p}}{4}\right) & \left(\frac{p_1}{4} + \frac{3}{40}p_2 + \frac{11}{40}\bar{p}\right) \\ \left(\frac{p_1}{4} + \frac{3}{40}p_2 + \frac{11}{40}\bar{p}\right) & \left(\frac{p_1}{4} + \frac{9}{100}p_2 + \frac{3}{10}\bar{p}\right) \end{bmatrix}$$

Infine

$$A^T P A - P =$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{p_2}{16} - \frac{3}{4}p_1 + \frac{\bar{p}}{4}\right) & \left(\frac{p_1}{4} + \frac{3}{40}p_2 - \frac{29}{40}\bar{p}\right) \\ \left(\frac{p_1}{4} + \frac{3}{40}p_2 - \frac{29}{40}\bar{p}\right) & \left(\frac{p_1}{4} - \frac{31}{100}p_2 + \frac{3}{10}\bar{p}\right) \end{bmatrix} =$$

NB è simmetrica (deve essere così!)

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A questo punto

$$\begin{cases} \frac{p_1}{4} + \frac{3}{40}p_2 - \frac{29}{40}\bar{p} = 0 & /\cdot 40 \\ \frac{p_2}{16} - \frac{3p_1}{4} + \frac{\bar{p}}{4} = -1 & /\cdot 16 \\ \frac{p_1}{4} - \frac{31}{100}p_2 + \frac{3}{10}\bar{p} = -1 & /\cdot 100 \end{cases}$$

3 eq. nelle incognite $p_1, p_2, \bar{p}$

$$\begin{cases} 10p_1 + 3p_2 = 29\bar{p} \\ p_2 - 12p_1 + 4\bar{p} = -16 \\ 25p_1 - 31p_2 + 30\bar{p} = -100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = 12p_1 - 4\bar{p} - 16 \\ 10p_1 + 3\left[12p_1 - 4\bar{p} - 16\right] = 29\bar{p} \\ 25p_1 - 91\left[12p_1 - 4\bar{p} - 16\right] + 30\bar{p} = -100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = 12p_1 - 4\bar{p} - 16 \\ 46p_1 - 48 = 41\bar{p} \longrightarrow p_1 = \frac{1}{46}\left[41\bar{p} + 48\right] \\ -1067p_1 + 1556 = -394\bar{p} \end{cases}$$

$$-\frac{1067}{46}\left[41\bar{p} + 48\right] + 1556 = -394\bar{p} \quad / \cdot 46$$

$$25623\,\bar{p} = 20360$$

$$\bar{p} = \frac{20360}{25623} \simeq 0,7946$$

$$p_1 = \frac{41}{46}\bar{p} + \frac{48}{46} \simeq 1,7517$$

$$p_2 = 12p_1 - 4\bar{p} - 16 \simeq 1,8420$$

La matrice è:

$$P = \begin{bmatrix} 1,7517 & 0,7946 \\ 0,7946 & 1,8420 \end{bmatrix}$$

$p_1 > 0$ ✓ $\det P = 2,5952 > 0$ ✓

È la matrice def. pos. cercata!

Domanda 2.2

Si consideri ancora il sistema LTI descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= +0.5\,x_1(k) + 0.5\,x_2(k) - 1.2\,u(k) \\ x_2(k+1) &= 0.25\,x_1(k) + 0.3\,x_2(k) + 0.98\,u(k) \\ y(k) &= 1.25\,x_1(k) - 0.815\,x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

Determinare, se possibile, uno stato iniziale $[x_1(0),\ x_2(0)]^T$ tale da determinare un movimento libero dello stato che si mantenga indefinitivamente a distanza costante dall'origine nello spazio di stato. Motivare la risposta.

Movimento libero dello stato: $x(k) = A^k x(0)$

Idea $\rightarrow$
- determino gli autovalori
- determino i modi di risposta
- analizzo l'evoluzione dei modi di risposta

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/10 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \frac{4}{5}\lambda + \frac{1}{40}$$

calcolato in precedenza per la risposta precedente

autovalori $\lambda_{1,2} = \frac{2}{5} \pm \frac{3\sqrt{6}}{20}$

reali e distinti

$\lambda_1 \simeq 0{,}0326$

$\lambda_2 \simeq 0{,}7674$

Modi di risposta:

$$A^k = A_1 \lambda_1^k + A_2 \lambda_2^k$$

Potrei trovare A_1 ed A_2 così:

$$A_1 = \lim_{z \to \lambda_1} \left[(z-\lambda_1)(zI-A)^{-1} \right]$$

$$A_2 = \lim_{z \to \lambda_2} \left[(z-\lambda_2)(zI-A)^{-1} \right]$$

Oppure così: $A_1 = v_1 \tilde{v}_1^T$

$$A_2 = v_2 \tilde{v}_2^T$$

con $v_1 : (\lambda_1 I - A) v_1 = 0$ autovettori "destri"

$v_2 : (\lambda_2 I - A) v_2 = 0$ associati a λ_1, λ_2

$\tilde{v}_1^T : \tilde{v}_1^T (\lambda_1 I - A) = 0$ autovettori "sinistri"

$\tilde{v}_2^T : \tilde{v}_2^T (\lambda_2 I - A) = 0$ associati a λ_1, λ_2

Ma NON serve la conoscenza di A_1 ed A_2.

L'esercizio chiede di determinare uno stato iniziale che dia origine ad un movimento libero dello stato che sia periodico e mantenga lo stato (nel tempo) SEMPRE a distanza costante dall'origine [cioè la traiettoria di stato corrispondente a questo movimento è una circonferenza di centro l'origine dello spazio di stato].

Questo tipo di comportamento NON è possibile!

I modi di risposta tendono a zero al crescere del tempo, quindi l'evoluzione libera dello stato converge verso l'origine dello spazio di stato SEMPRE, per qualsiasi condizione iniziale.