PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

5 febbraio 2021

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo B

esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1.1

Noti i campioni di una realizzazione di un **processo stocastico stazionario a valore atteso nullo** raggruppati nella tabella seguente:

t_i	1	2	3	4	5	6
$y(t_i)$	0.413	0.069	0.194	0.707	0.687	0.637

si vuole identificare per il processo stocastico in questione un modello di tipo AR(2). Si chiede di:

- determinare i parametri del modello sfruttando i dati a disposizione;
- valutare l'incertezza della stima dei parametri del modello.

$\boxed{\text{Soluzione}}$

$\mathcal{M}$ AR(2) $y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \eta(t)$

con $\eta(\cdot) \sim WN(0, \sigma^2)$

Uso algoritmo PEM batch

predittore ad 1 passo $\hat{\mathcal{M}}(\theta)$:

$$\hat{y}(t|t-1) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2)$$

Lo posso applicare ai campioni osservati agli istanti $t = 3, 4, 5, 6$, ma non ai primi 2 (per mancanza di osservazioni agli istanti precedenti)

Il funzionale di costo da minimizzare è allora:

$$J(\vartheta) = \left[\sum_{t=3}^{6} \left[y(t) - \hat{y}(t)\right]^2\right] \cdot \frac{1}{4}$$

NB: il costo è l'errore quadratico MEDIO

$$= \sum_{t=3}^{6} \left[y(t) - \varphi(t)^T \vartheta\right]^2$$

← lo voglio minimizzare, quindi il termine $\frac{1}{4}$ è ininfluente!

con $\vartheta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $\qquad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix}$

In forma compatta le equazioni normali ai minimi quadrati sono [cfr L12-p6]

$$\sum_{t=3}^{6} \varphi(t) y(t) = \left[\sum_{t=3}^{6} \varphi(t) \varphi^T(t)\right] \vartheta$$

Calcolo la matrice

$$S = \left[\sum_{t=3}^{6} \varphi(t) \varphi^T(t)\right]$$

$$= \sum_{t=3}^{6} \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-1) & y(t-2) \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$S = \sum_{3}^{6}{}_{t} \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(t-1) & y(t-2) \end{bmatrix}$$

4

ju idless

$$S = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(2) & y(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y(3) \\ y(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(3) & y(2) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} y(4) \\ y(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(4) & y(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y(5) \\ y(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(5) & y(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y^2(2) & y(2)y(1) \\ y(1)y(2) & y^2(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^2(3) & y(3)y(2) \\ y(2)y(3) & y^2(2) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} y^2(4) & y(4)y(3) \\ y(3)y(4) & y^2(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^2(5) & y(5)y(4) \\ y(4)y(5) & y^2(4) \end{bmatrix} =$$

$$S = \begin{bmatrix} \left[y^2(2) + y^2(3) + y^2(4) + y^2(5)\right] & \left[\begin{matrix} y(1)y(2) + y(2)y(3) + \\ + y(3)y(4) + y(4)y(5) \end{matrix}\right] \\ \left[\begin{matrix} y(1)y(2) + y(2)y(3) + y(3)y(4) + \\ + y(4)y(5) \end{matrix}\right] & \left[y^2(1) + y^2(2) + y^2(3) + y^2(4)\right] \end{bmatrix}$$

Sostituisco:

$$S(1,1) = \left[y^2(2) + y^2(3) + y^2(4) + y^2(5)\right] =$$

$$= (0{,}069)^2 + (0{,}194)^2 + (0{,}707)^2 + (0{,}687)^2 =$$

$$\simeq 1{,}0142$$

$$S(2,2) = \left[y^2(1) + y^2(2) + y^2(3) + y^2(4)\right] =$$

$$= (0{,}413)^2 + (0{,}069)^2 + (0{,}194)^2 + (0{,}707)^2 =$$

$$\simeq 0{,}7128$$

$$S(1,2) = S(2,1) = \left[y(1)\cdot y(2) + y(2)\cdot y(3) + y(3)\cdot y(4) + y(4)\cdot y(5)\right] =$$

$$= (0{,}413 \cdot 0{,}069) + (0{,}069 \cdot 0{,}194) + (0{,}194 \cdot 0{,}707) + (0{,}707 \cdot 0{,}687) \simeq 0{,}6647$$

$S_{11} > 0$

$\det S = 0{,}2811 \quad > 0$

$$S \simeq \begin{bmatrix} 1{,}0142 & 0{,}6647 \\ 0{,}6647 & 0{,}7128 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ simmetrica e def positiva (ok)

$$S \cong \begin{bmatrix} 1{,}0142 & 0{,}6647 \\ 0{,}6647 & 0{,}7128 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{0{,}2811} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}7128 & -0{,}6647 \\ -0{,}6647 & 1{,}0142 \end{bmatrix} =$$

$$\cong \begin{bmatrix} 2{,}5362 & -2{,}3652 \\ -2{,}3652 & 3{,}6086 \end{bmatrix}$$

La soluzione cercata è allora

$$\hat{\vartheta} = S^{-1} \cdot \sum_{t=3}^{6} \varphi(t)\, y(t)$$

con

$$\sum_{t=3}^{6} \varphi(t)\, y(t) = \varphi(3) \cdot y(3) + \varphi(4) \cdot y(4) + \varphi(5) \cdot y(5) + \varphi(6)\, y(6)$$

$$= \begin{bmatrix} y(2) \\ y(1) \end{bmatrix} \cdot y(3) + \begin{bmatrix} y(3) \\ y(2) \end{bmatrix} \cdot y(4) + \begin{bmatrix} y(4) \\ y(3) \end{bmatrix} y(5) + \begin{bmatrix} y(5) \\ y(4) \end{bmatrix} y(6) \Rightarrow$$

$$\sum_{t=3}^{6} \varphi(t)\, y(t) = \begin{bmatrix} 0,069 \\ 0,413 \end{bmatrix} \cdot 0,134 + \begin{bmatrix} 0,134 \\ 0,069 \end{bmatrix} \cdot 0,707 + \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0,134 \end{bmatrix} \cdot 0,687 + \begin{bmatrix} 0,687 \\ 0,707 \end{bmatrix} \cdot 0,637 = \begin{bmatrix} 1,0739 \\ 0,7125 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2,5362 & -2,3652 \\ -2,3652 & 3,6086 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,0739 \\ 0,7125 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,0383 \\ 0,0314 \end{bmatrix}$$

Incertezza della stima

Utilizzo l'espressione in L12-p14

$$var(\hat{\vartheta}_N) \simeq \hat{\lambda}^2 \cdot S(N)^{-1}$$

$S(N)^{-1}$ è già stata determinata

$\hat{\lambda}^2$ è stima della varianza del rumore bianco del modello.

Determino $\hat{\lambda}^2$ così:

$$\hat{\lambda}^2 = J(\hat{\vartheta})$$

adesso il termine $\frac{1}{4}$ è necessario: devo calcolare il valore dell'errore predittivo medio

valuto il minimo del funzionale di costo in corrispondenza del vettore dei parametri $\hat{\vartheta}$

$$J(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{4}\sum_{t=3}^{6} \left[y(t) - \varphi(t)^T \hat{\vartheta}\right]^2 = \hat{\lambda}^2$$

$$= 0{,}2779 \cdot 0{,}25 = 0{,}0695$$

Applicando la formula si ottiene $\longrightarrow$

$$\operatorname{var}(\hat{\vartheta}) \simeq 0{,}2779 \cdot \begin{bmatrix} 2{,}5362 & -2{,}3652 \\ -2{,}3652 & 3{,}6086 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 0{,}7048 & -0{,}6573 \\ -0{,}6573 & 1{,}0029 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\simeq 10^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}762 & -1{,}643 \\ -1{,}643 & 2{,}507 \end{bmatrix}$$

Domanda 1.2

Di un **processo stocastico stazionario a valore atteso nullo** si hanno a disposizione 221 **campioni** di una realizzazione. Facendo uso di questi campioni, si vuole determinare il migliore modello di tipo AR(n), con n variabile tra 1 e 10.
Applicando l'algoritmo di identificazione di tipo LS batch per identificare modelli di complessità crescente, si ottengono i seguenti valori del minimo del funzionale di costo $J(\hat{\theta}_N)$

AR(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$J(\hat{\theta}_N)$	2.1039	2.0885	1.2310	1.0469	1.0448	1.0296	1.0115	1.0099	1.0098	1.0020

SI chiede di:

- valutare gli indici FPE ed AIC sulla base dei dati a disposizione;
- indicare la complessità ottima suggerita da ciascuno dei due indicatori e commentare il risultato ottenuto.

$\boxed{\text{FPE}}$

$$FPE(n) = \frac{N+n}{N-n} J(\hat{\theta}_N)^{(n)}$$

$N \leftarrow$ n° di dati a disposizione

$n \leftarrow$ indice della complessità del modello e cui corrisponde $J(\hat{\theta}_N)^{(n)}$

$J(\hat{\theta}_N)^{(n)} \leftarrow$ minimo del funzionale di costo in corrispondenza del vettore di parametri $\hat{\theta}_N$, stimato per il modello di complessità n

$\boxed{\text{MDL}}$

$$MDL(n) = (\ln N)\frac{n}{N} + \ln\left[J(\hat{\theta}_N)^{(n)}\right]$$

Come prima:

$N \leftarrow$ n° di dati a disposizione

$n \leftarrow$ indice della complessità del modello e cui corrisponde $J(\hat{\theta}_N)^{(n)}$

$J(\hat{\theta}_N)^{(n)} \leftarrow$ minimo del funzionale di costo in corrispondenza del vettore di parametri $\hat{\theta}_N$ stimato per il modello di complessità n

---

Nel caso dell'esercizio

$$FPE(n) = \frac{221+n}{221-n} J(n) \qquad n = 1, 2 \ldots 10$$

$$MDL(n) = (\ln 221)\frac{n}{221} + \ln\left[J(n)\right] \qquad n = 1, 2 \ldots 10$$

dove $J(n) = J(\hat{\theta}_N)^{(n)}$

$$FPE(1) = \frac{221+1}{221-1} \cdot 2{,}1039 =$$

$$FPE(2) = \frac{221+2}{221-2} \cdot 2{,}0885 =$$

$$FPE(3) = \frac{221+3}{221-3} \cdot 1{,}2310 =$$

$$FPE(4) = \frac{221+4}{221-4} \cdot 1{,}0469 =$$

$$FPE(5) = \frac{221+5}{221-5} \cdot 1{,}0448 =$$

$$FPE(6) = \frac{221+6}{221-6} \cdot 1{,}0236 =$$

$$FPE(7) = \frac{221+7}{221-7} \cdot 1{,}0115 =$$

ecc. ...

$$FPE(8) = \frac{221+8}{221-8} \cdot 1{,}0099 =$$

$$FPE(9) = \frac{221+9}{221-9} \cdot 1{,}0098 =$$

$$FPE(10) = \frac{221+10}{221-10} \cdot 1{,}0020 =$$