PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

5 febbraio 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo B
esercizio:	Esercizio 2

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 2.1

Si sfrutti il Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a tempo discreto per individuare una funzione di Lyapunov quadratica per il sistema:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= +0.1\,x_1(k) + 0.2\,x_2(k) - 1.2\,u(k) \\ x_2(k+1) &= 0.2\,x_1(k) + 0.1\,x_2(k) + 0.98\,u(k) \\ y(k) &= 1.25\,x_1(k) - 0.815\,x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

Matrice A delle eq. di stato $A = \begin{bmatrix} 1/10 & 1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{bmatrix}$

polinomio caratteristico ed autovalori:

$$p_A(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{25} = \lambda^2 - \frac{1}{5}\lambda - \frac{3}{100}$$

$\lambda_1 = -\frac{1}{10}$

$\lambda_2 = 3/10$

$|\lambda_{1,2}| < 1$!

così so per certo che l'equazione di Lyapunov deve fornire P def. positiva, scelta $-Q$ def. negativa!

Equazione di Lyapunov

$$A^T P A - P = -Q$$

scelgo Q simmetrica e def. positiva

Dall'analisi fatta sugli autovalori di A, SO che DEVO trovare P simmetrica e def positiva...

Per comodità

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} \quad \text{con vincoli:} \quad \begin{cases} p_1 > 0 \\ p_1 p_2 - \bar{p}^2 > 0 \end{cases}$$

$A^T P A - P = -Q$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/10 & 1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(p_1/10 + \bar{p}/5\right) & \left(\frac{p_2}{5} + \frac{\bar{p}}{10}\right) \\ \left(p_1/5 + \bar{p}/10\right) & \left(p_2/10 + \bar{p}/5\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{p_1}{10}+\frac{\bar{p}}{5}\right) & \left(\frac{p_2}{5}+\frac{\bar{p}}{10}\right) \\ \left(\frac{p_1}{5}+\frac{\bar{p}}{10}\right) & \left(\frac{p_2}{10}+\frac{\bar{p}}{5}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/10 & 1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{p_1}{100}+\frac{p_2}{75}+\frac{\bar{p}}{25}\right) & \left(\frac{p_1}{50}+\frac{p_2}{50}+\frac{\bar{p}}{20}\right) \\ \left(\frac{p_1}{50}+\frac{p_2}{50}+\frac{\bar{p}}{20}\right) & \left(\frac{p_1}{75}+\frac{p_2}{100}+\frac{\bar{p}}{25}\right) \end{bmatrix}$$

Infine:

$$A^T P A - P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{p_2}{75}-\frac{99}{100}p_1+\frac{\bar{p}}{25}\right) & \left(\frac{p_1}{50}+\frac{p_2}{50}-\frac{19}{20}\bar{p}\right) \\ \left(\frac{p_1}{50}+\frac{p_2}{50}-\frac{19}{20}\bar{p}\right) & \left(\frac{p_1}{75}-\frac{99}{100}p_2+\frac{\bar{p}}{25}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è simmetrica!

DEVE esserlo!

Eguagliando termine a termine le due matrici si arriva alle relazioni:

$$\begin{cases} \left(\frac{p_2}{25} - \frac{99}{100} p_1 + \frac{\bar{p}}{25}\right) = -1 & /\cdot 100 \\ \left(\frac{p_1}{25} - \frac{99}{100} p_2 + \frac{\bar{p}}{25}\right) = -1 & /\cdot 100 \\ \left(\frac{p_1}{50} + \frac{p_2}{50} - \frac{19}{20} \bar{p}\right) = 0 & /\cdot 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4p_2 - 99p_1 + 4\bar{p} = -100 \\ 4p_1 - 99p_2 + 4\bar{p} = -100 \\ 2p_1 + 2p_2 - 95\bar{p} = 0 \end{cases} \quad 1^a - 2^a \rightarrow (*)$$

$$\bar{p} = \frac{2}{95} p_1 + \frac{2}{95} p_2$$

$(*)$ $103p_2 - 103p_1 = 0 \rightarrow p_1 = p_2$

sostituisco nella 1^a

$$4p_1 - 99p_1 + 4 \cdot \frac{4}{95} p_1 = -100$$

$$\left(\frac{16}{95} + 4 - 99\right) p_1 = -100$$

$$p_1 = (-100) \cdot \frac{95}{16 - 95^2}$$

$$= \frac{-100 \cdot 95}{-9009} \simeq 1{,}0545$$

$P_1 \simeq 1,0545 \qquad P_2 = P_1 = 1,0545$

$$\bar{P} \rightarrow \quad \bar{P} = \frac{2}{95} P_1 + \frac{2}{95} P_2 = \frac{4}{95} P_1 \simeq 0,0444$$

In definitiva la matrice P cercata è:

$$P = \begin{bmatrix} 1,0545 & 0,0444 \\ 0,0444 & 1,0545 \end{bmatrix}$$

che porta alla funzione di Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Domanda 2.2

Si consideri ancora il sistema LTI descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= +0.1\,x_1(k) + 0.2\,x_2(k) - 1.2\,u(k) \\ x_2(k+1) &= 0.2\,x_1(k) + 0.1\,x_2(k) + 0.98\,u(k) \\ y(k) &= 1.25\,x_1(k) - 0.815\,x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

Determinare, se possibile, uno stato iniziale $[x_1(0),\ x_2(0)]^T$ tale da determinare un movimento libero dello stato che possieda la seguente proprietà

$$x_{1,l}(k) = x_{2,l}(k)\ \ \forall k \geq 0$$

Motivare la risposta.

Matrice A $\rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 1/10 & 1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{bmatrix}$

polinomio caratteristico ed autovalori

$$p_A(\lambda) = \det\left[\lambda I - A\right] = \lambda^2 - \frac{1}{5}\lambda - \frac{3}{100}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{10} \quad \lambda_2 = 3/10$$

Lo stato iniziale cercato potrebbe coincidere con uno degli autovettori corrispondenti agli autovalori oppure essere una loro combinazione lineare (cfr. Lecture2 – L2-p24) autovettore v_1 : $A v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{10}$

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a + b = 0$

$a = -b$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ← non permette di avere la soluzione libera richiesta!

$v_2 : (A - \lambda_2 I) v_2 = 0$

$\lambda_2 = \frac{3}{10}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

$a - b = 0$

$a = b$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ecco la soluzione! Se $x(0) = k v_2$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ allora l'evoluzione libera dello stato è tale da garantire $x_1(t) = x_2(t) \; \forall t$!