

Esercizi di Geometria  
Ingegneria Industriale e Navale 2021/2022 - ottavo foglio

November 15, 2021

1. Si consideri la retta del piano affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ :

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases}$$

- Si dimostri che il punto  $(0, -2) \in r$ ;
- sia  $W$  la giacitura di  $r$ ; si dimostri che il vettore  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in W$ ;
- si dimostri che la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3\tau \\ y = -2 + 6\tau \end{cases}$$

coincide con  $r$

2. Si determini un'equazione cartesiana della retta in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  passante per i punti  $P$  e  $Q$  in ognuno dei casi seguenti:

- (a)  $P = (1, -1)$ ,  $Q = (3, 2)$ ;
- (b)  $P = (2, 0)$ ,  $Q = (-1, -1)$ ;
- (c)  $P = (0, 0)$ ,  $Q = (0, 8)$ .

3. Si determinino delle equazioni parametriche per la retta in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  parallela al vettore  $v$  e passante per il punto  $r \cap s$  in ciascuno dei casi seguenti:

(a)  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $r : 3x_1 - 2x_2 = 7$ ,  $s : 2x_1 + 3x_2 = 0$ ;

(b)  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \end{pmatrix}$ ,  $r : x_1 - x_2 = 5$ ,  $s : x_1 + x_2 = 1$ .

4. Si determinino delle equazioni cartesiane e parametriche dei piani paralleli al piano coordinato  $xy$ , di equazione cartesiana

$$z = 0.$$

5. Si determini un'equazione cartesiana del piano in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  contenente il punto  $Q = (-1, 0, 1)$  e parallelo al piano

$$2x_1 - x_3 = \frac{2}{3}.$$

6. In ciascuno dei seguenti casi determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  passante per il punto  $P$  e parallela al vettore  $v$ :

(a)  $P = (-10, -10, 10)$ ,  $v = \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b)  $P = (-1, -1, -2)$ ,  $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(c)  $P = (7, 1, -1)$ ,  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

7. Due rette  $r$  ed  $s$  di  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  si dicono complanari se esiste un piano  $\pi \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  che le contiene:

$$r \subset \pi, \quad s \subset \pi.$$

In ciascuno dei seguenti casi verificare se le rette  $r$  ed  $s$  di  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono o no complanari. Nel caso affermativo si dica se sono parallele o incidenti.

(a)

$$r : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 8 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_1 = 1 - \tau \\ x_2 = 3 + \tau \\ x_3 = 5\tau \end{cases}$$

(b)

$$r : \begin{cases} x_1 = 6 + 2t \\ x_2 = 3 + 2t \\ x_3 = 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_1 = \tau \\ x_2 = \tau \\ x_3 = \tau \end{cases}$$

(c)

$$r : \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 - 2t \\ x_3 = 8 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_1 = \tau \\ x_2 = -5 + \tau \\ x_3 = 2 + \tau \end{cases}$$

8. Determinare un'equazione cartesiana del piano in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  contenente la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

e parallelo al vettore  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

9. Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ , si considerino i punti

$$P = (0, -1, 1), \quad Q = (0, 1, 1), \quad R_a = (a, 0, 0),$$

al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ . Per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , si determini il piano affine  $L_a$  passante per  $P$ ,  $Q$  ed  $R_a$ . Si determini  $a \in \mathbb{R}$  tale che il piano  $L_a$  sia parallelo alla retta affine  $r$  di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

10. Per ogni valore del parametro  $a \in \mathbb{R}$  si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r_a \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  passante per i punti  $P = (1, 1, 1)$  e  $Q_a = (2, 0, a)$ .

Per quali  $a \in \mathbb{R}$  la retta  $r_a$  è parallela al piano  $S$  di equazione cartesiana  $2x - y + 3z = 1$ ?

11. Nello spazio  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y = a \\ z = 0. \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0. \end{cases}$$

al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ . Per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  le rette  $r_1$  e  $r_2$  sono complanari? Per ogni tale  $a$  si dica se  $r_1$  ed  $r_2$  sono incidenti oppure no.

12. Nello spazio  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  si considerino i punti  $P = (1, 1, 0)$ ,  $P' = (1, 2, 3)$ , ed i vettori  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Sia  $r$  la retta passante per  $P$  e con giacitura  $\text{Span}(v)$  e sia  $r'$  la retta passante per  $P'$  e con giacitura  $\text{Span}(v')$ .

Si dimostri che  $r$  ed  $r'$  sono sghembe.

Si determinino due piani paralleli  $\pi$  e  $\pi'$ , tali che

$$r \subseteq \pi, \quad r' \subseteq \pi'.$$