

Esercizi sulle Applicazioni Lineari

Ingegneria Industriale e Navale 2021/2022 - nono foglio

December 6, 2021

1. Si verifichi che l'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare. Si determini, inoltre, $\ker f$ e $\text{Im } f$ e le loro dimensioni.

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(f)$ associata ad f nelle basi canoniche \mathcal{E} di \mathbb{R}^2 e \mathcal{E}' di \mathbb{R}^3 .

2. Si dia una descrizione geometrica di ciascuna delle applicazioni lineari rappresentate dalla moltiplicazione per le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ associata ad f nelle seguenti basi di \mathbb{R}^2 :

- $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare che soddisfi:

$$f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si scriva il valore di f nel generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ di \mathbb{R}^3 .

Si determinino, inoltre, $\ker f$ e una sua base e $\operatorname{Im} f$ e una sua base.

5. Si dica, motivando la risposta, se può esistere un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che assuma i seguenti valori:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Si trovi un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$\ker f = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

e tale che

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ nella base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 .

7. Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare biettiva (un isomorfismo). Si dimostri che allora anche la funzione inversa

$$f^{-1} : W \rightarrow V$$

un'applicazione lineare.

8. Si consideri lo spazio dei numeri complessi \mathbb{C} come spazio vettoriale di dimensione 1 su \mathbb{C} . Si dimostri che la funzione

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \bar{z},$$

dove \bar{z} il coniugato di z , una funzione additiva (verifica (AL1)), ma non omogenea (non verifica (AL2)).

9. Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Si dimostri che f è omogenea (verifica (AL2)), ma non additiva (non verifica (AL1)).