Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2021/2022 - 18 gennaio 2022
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
BEORCHIA	VALENTINA

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale.

Si enunci e si dimostri la diseguaglianza di Cauchy - Schwarz e si dia la definizione di angolo convesso tra vettori non nulli.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \tilde{A}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}\, A = 2 = \mathrm{rg}\, f$, base di $\mathrm{Im} f$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \ker f = 3 - \mathrm{rg}\, f = 3 - 2 = 1$

Eq. di $\ker f$: $A \cdot X = 0$, o equiv. $\tilde{A} \cdot X = 0$: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

una base di $\ker f$: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) **(1 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(H)$ del piano vettoriale H di equazioni parametriche

$$H : \begin{cases} x_1 &= t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -t \end{cases}$$

$f\left(\begin{pmatrix} t \\ s \\ -t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t + 2s - 5t \\ t + 4s - 9t \\ -t - (-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s - 4t \\ 4s - 8t \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

quindi $f(H) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow \dim f(H) = 1$, con base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (o qualunque altro vettore proporzionale)

(d) **(1 punto)** Si dica, motivando la risposta, se il piano H del punto sopra contiene autovettori per f oppure no.

Osservo che $\ker f \subseteq H$, perchè $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le eq. parametriche di H per $t = -1$ e $s = -2$.

Quindi $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 0$

(In generale: se un operatore ha nucleo $\ker f \neq \{0\}$, si ha $\ker f = \ker(f - 0 \cdot Id) = V_0$ autospazio relativo all'autovalore nullo.)

(e) **2 punti** Si dica se il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ è compatibile, e in caso affermativo si trovi la sua generica soluzione.

Matrice completa:

$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $\mathrm{rg}\, A = 2 \neq 3 = \mathrm{rg}\,(A|b) \Rightarrow$ il sistema è INCOMPATIBILE per RC.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$p_B(x) = \det(B - x \cdot \mathbb{I}_3) = -x(x^2 - 8x + 15) = -x(x-3)(x-5)$$

$$\Rightarrow Sp(L_B) = \{0, 3, 5\}$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}, \quad \text{base } \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -2y - z = 0 \\ -2x - z = 0 \end{cases}, \quad \text{base } \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_5 = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \text{base } \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ una base ortonormale di autovettori è data da:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = {}^t M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette r e s_a dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$r : \begin{cases} x + y - 2z &= 2 \\ x - y &= -1 \end{cases} \qquad s_a : \begin{cases} x + z &= 1 \\ y + z &= a \end{cases}$$

– si dimostri che r ed s_a non sono mai parallele;
– si determini il valore di a per cui r ed s_a risultano incidenti.

Cons. il SLO $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-y=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$; la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3

$\Rightarrow$ non sono mai parallele
(le 2 giaciture si intersecano in un sottospazio di dim $3 - \text{rg} A = 3-3 = 0$)

Le 2 rette sono incidenti $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-y=-1 \\ x+z=1 \\ y+z=a \end{cases}$ è compatibile

$\Leftrightarrow \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) = \text{rg} A = 3$; $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right)$ ha rango 3 $\Leftrightarrow$ $a = 2$

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano L passante per il punto $(0, 1, 2)$, e ortogonale alla retta

$$r : \begin{cases} x = & 1 - t \\ y = & 2 - 3t \\ z = & 3 + t \end{cases}$$

Oss. che $W_r = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Il generico piano $\perp r$ ha equazione:

$-x - 3y + z = d$ (perché $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ deve essere proporzionale a $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Impongo passaggio per $(0,1,2)$: $0 - 3 + 2 = d$

$\Rightarrow d = -1$, $L : -x - 3y + z = -1$, ovvero

$x + 3y - z = 1$