beorchia@units.it per richiedere file delle lezioni

NOZIONI PRELIMINARI DI INSIEMISTICA

INSIEMI:

Un insieme è collezione di oggetti.

Oggetti saranno chiamati ELEMENTI.

Gli insiemi: sono finiti o infiniti.

NOTAZ.: x è elemento di X insieme: $x \in X$

x NON è elemento di X: $x \notin X$

X contiene x come elemento: $X \ni x$

X non contiene x → $X \not\ni x$

Es.: insieme delle lettere alfabeto

$A = \{a, b, c, d, e, \dots, z\}$ è un insieme finito

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

insieme dei numeri naturali

$E = \{\text{numeri naturali pari}\}$

$0 \in E$, $4 \in E$, $120 \in E$, $1 \notin E$, $-6 \notin E$

$\pi \notin E$

$\pi = 3,14152653587 \dots$

è un numero irrazionale e trascendente

(tra gli irrazionali ci sono numeri ALGEBRICI ($\sqrt{2}$) e quelli trascendenti

$\sqrt{2}$ è radice di $x^2 - 2$

Def. Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi

Es.: $E = \{\text{numeri naturali multipli di } 6\}$

$F = \{\text{numeri naturali pari che sono multipli di } 3\}$

$E = F$

Es.: $G = \{\text{numeri naturali primi}\}$

p primo ⟺ p è divisibile per 1 e per p

$H = \{\text{numeri naturali che si ottengono con cifre consecutive della mantissa di } \pi\}$

Congettura: $H = \mathbb{N}$

ALTRE NOTAZIONI:

Se specifichiamo un insieme delle proprietà $\mathcal{P}$ devono soddisfare i suoi elementi, scriveremo:

$$\underset{\text{il lato destro definisce } X}{X} \overset{\text{per definizione uguale a}}{:=} \{x : x \text{ soddisfa } \mathcal{P}\}$$

tale che

oppure $X := \{x \mid x \text{ soddisfa } \mathcal{P}\}$

Esempio: $X := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è maggiore di } 1 \text{ e minore di } 10\}$

$X := \{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 10\}$

$X := \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ATTENZIONE: ⚠ negli elenchi degli elementi le ripetizioni NON sono vietate:

$X := \{2, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 5, 8, 9\}$

INSIEME VUOTO: $\emptyset$

è l'insieme che non ha alcun elemento.

⚠ $\underset{\text{insieme vuoto}}{\emptyset} \neq \underset{\text{numero zero}}{0} \in \mathbb{N}$

Def. Y si dice SOTTOINSIEME di X e si scrive $Y \subseteq X$ (Y è contenuto in X) se ogni elemento di Y è un elemento di X

$X \supseteq Y$ X contiene Y come sottoinsieme

Col simbolo $Y \not\subseteq X$ indichiamo che Y NON è sottoinsieme di X; oppure $X \not\supseteq Y$

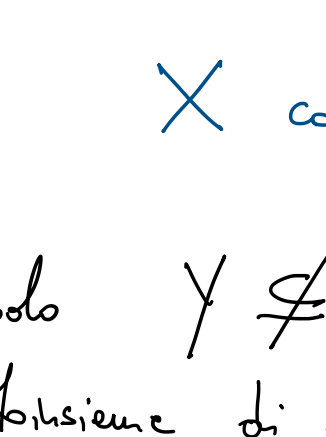
OSS.: $Y \not\subseteq X$ se e solo se esiste almeno un elemento di Y che non è elemento di X.

Esempio: $A = \{\text{numeri naturali primi}\}$

$B = \{\text{numeri naturali dispari}\}$

$A \not\subseteq B$ perché $2 \in A$ ma $2 \notin B$

Notazione: Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$



Scriveremo $A \subsetneq B$ oppure $A \subsetneqq B$, oppure $A \subset B$

A si dice SOTTOINSIEME PROPRIO di B

OSS.: $\emptyset \subseteq A$ per ogni insieme A

Raccomandazione: NON CONFONDERE $\subseteq$ con $\in$

$x \in X$, $\cancel{x \subseteq X}$, $\{x\} \subseteq X$

§2 OPERAZIONI TRA INSIEMI

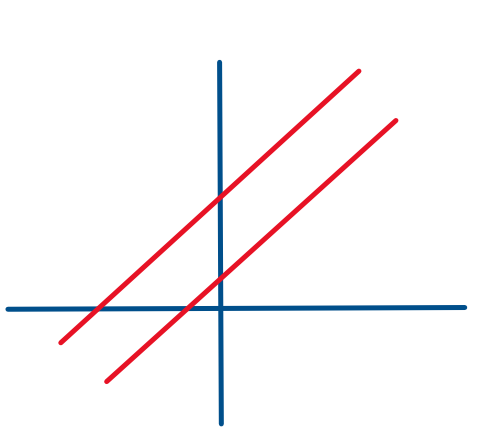
Def.: Dati A e B, l'INTERSEZIONE è formata da tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$
$$= \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

la CONGIUNZIONE e si scrive formalmente $\wedge$

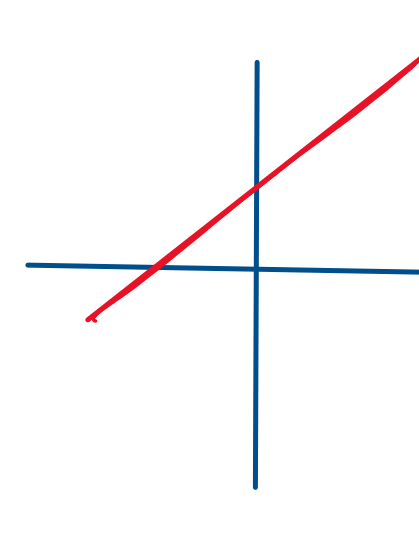
Es. 2 rette piane: L, M

possiamo avere 3 casi:



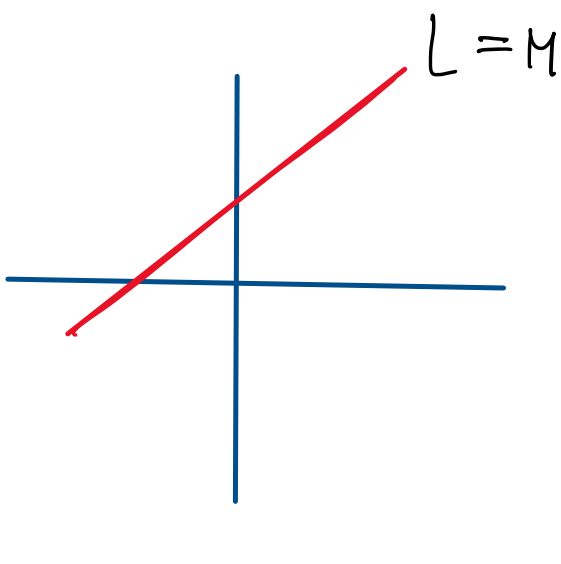
2 rette incidenti

$L \cap M = \{P\}$



2 rette parallele

$L \cap M = \emptyset$

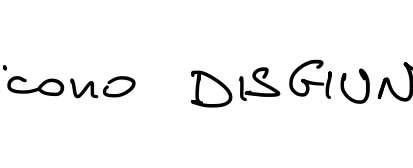


2 rette coincidenti:

$L \cap M = L$

Def.: Se $A \cap B = \emptyset$, allora si dicono DISGIUNTI.

Proprietà:
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$
- $A \cap B = A$ se e solo se $A \subseteq B$



Analogamente: $A \cap B \cap C$

anche intersezioni infinite: Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di insiemi (A_n è un insieme per ogni $n \in \mathbb{N}$)

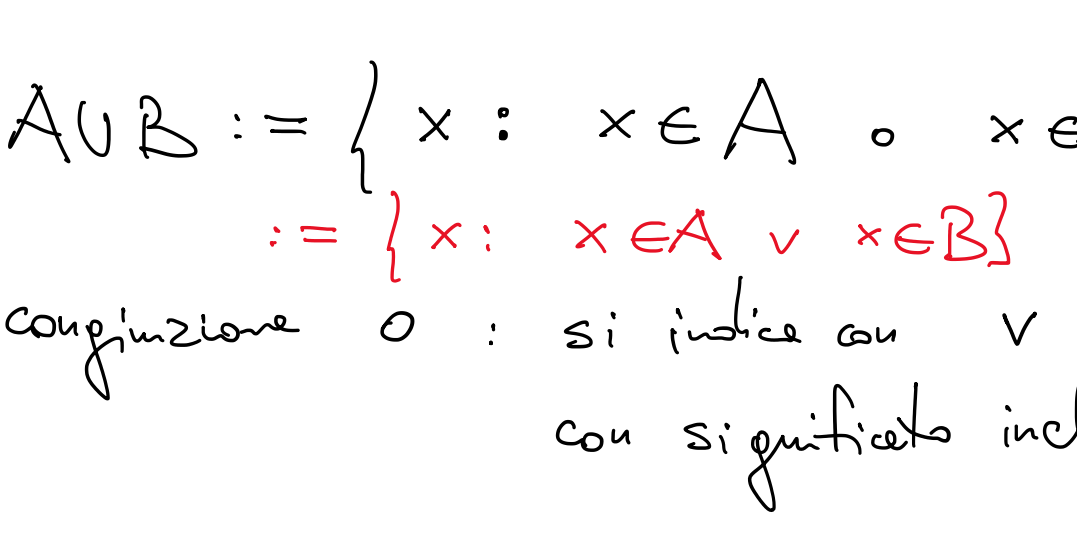
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

oppure $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n := \{\text{elementi che appartengono a ogni } A_n\}$

Es.: $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ intervallo aperto $\subseteq \mathbb{R}$ numeri reali

$= \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$A_1 = (-1, 1)$, $A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $A_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, …

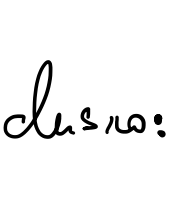


$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

Def. UNIONE DI INSIEMI

$A \cup B :=$ elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B

$A \cup B := \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$
$:= \{x : x \in A \vee x \in B\}$



congiunzione o: si indica con $\vee$ (vel) con significato inclusivo

in italiano o può avere anche significato esclusivo: (aut in latino): es. Ad un esame posso essere promosso o bocciato.

In matematica: sempre vel v.

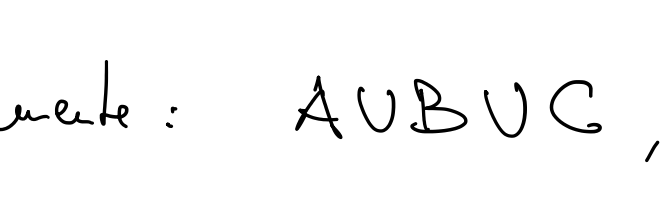
Analogamente: $A \cup B \cup C$, oppure unioni infinite

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x : x \in A_n \text{ per almeno un } n\}$$

es. $\underset{n \geq 1}{A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}$, $\bigcup_{n \in A_n} A_n = A_1 = (-1, 1)$

INSIEME DIFFERENZA:

$B \setminus A := \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$



Se $A \subseteq B$, $B \setminus A$ si chiama SOTTOINSIEME COMPLEMENTARE di A in B

in questo caso: $B \setminus A = \underset{\text{complementare}}{C(A)}$ oppure $\overset{\text{complementare}}{A^c}$

Proprietà: $(A^c)^c = A$

$A^c \cap A = \emptyset$

§3 PRODOTTO CARTESIANO DI INSIEMI

Dati A e B insiemi, il prodotto cartesiano è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$

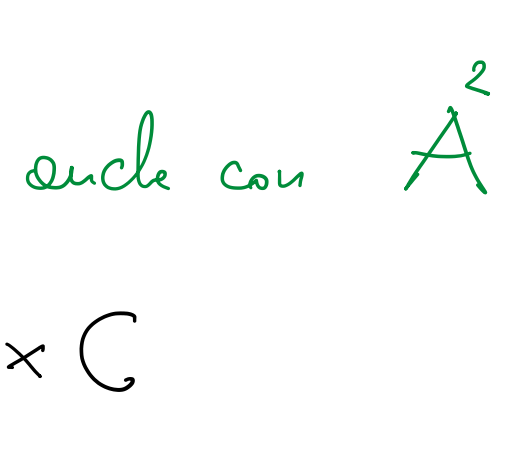
$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

$A \times A$ si indica anche con A^2

Analog.: $A \times B \times C$

Es.: Se $A = \mathbb{R}$ numeri reali

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$



$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

terne ordinate: $(x, y, z) \neq (y, x, z)$

$= \mathbb{R}^3$

Analog. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$

gli elementi sono n-uple ordinate di elementi di $\mathbb{R}$ (stringhe di numeri reali, di lunghezza n)

§3 QUANTIFICATORI e PROPOSIZIONI

$\forall$: PER OGNI, QUALUNQUE SIA

$\exists$: ESISTE

$\exists!$: ESISTE ED È UNICO
ESISTE UNO E UN SOLO

Una PROPOSIZIONE o ENUNCIATO è una qualunque espressione sensata a cui si può attribuire il valore di verità 1 (vero) aut il valore di verità 0 (falso)

Sinonimi: TEOREMA e LEMMA.

LEMMA: risultato semplice, facile dimostrazione.

PROPOSIZIONE: risultato di difficoltà intermedia

TEOREMA: risultato più profondo.

DIMOSTRAZIONE: una catena di deduzioni attraverso le quali la verità delle proposizioni deriva da assiomi e/o proposizioni precedentemente dimostrate.

Per dimostrare, invece, che un enunciato è FALSO, basta trovare UN CONTROESEMPIO, cioè un esempio che verifica le ipotesi e non verifica l'affermazione.