Precorso 31 agosto

martedì 31 agosto 2021 10:08

Ieri: abbiamo visto la nozione di PROPOSIZIONE

Assumeremo i seguenti principi:

① PRINCIPIO DI NON CONTRADDIZIONE: una prop. non può essere allo stesso tempo vera e falsa.

② PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO: se una prop. è falsa, allora la sua negazione è vera (e viceversa) (non c'è una terza possibilità)

CONNETTIVI LOGICI : $\wedge$, $\vee$

e NEGAZIONE : $\neg$

Se p è una proposizione, la sua negazione $\neg p$ (si legge NON p) è la prop. che è falsa se p è vero, ed è vera se p è falsa.

Indicheremo con V e F i valori vero e falso di una proposizione (oppure 1 e 0)

Tabella di verità:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ieri: $\wedge$ CONGIUNZIONE

$\vee$ DISGIUNZIONE

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$p\vee\neg q$
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F	V

Esempio: p = "6 è un numero pari"

q = "Milano è la capitale d'Italia"

Def.: Una PROP. COMPOSTA è una combinazione di prop. semplici con i connettivi logici.

Def.: Una prop. composta si dice:

- TAUTOLOGIA se è sempre VERA, indipendentemente dai valori di verità delle prop. semplici. es. $p\vee\neg p$
- CONTRADDIZIONE se è sempre FALSA, indip. dai valori di verità delle prop. semplici. es. $p\wedge\neg p$

Def.: IMPLICAZIONE: date p e q, l'implicazione $p\Rightarrow q$ (si legge p IMPLICA q, oppure SE VALE p ALLORA VALE q).

è la prop. che è falsa se p è vera e q è falsa, ed è vera negli altri casi.

p	q	$p\Rightarrow q$
V	V	V
F	V	V
F	F	V
V	F	F

Es. p = "Piove", q = "Studio".

$p\Rightarrow q$: Se piove, allora studio.
Se non piove, posso sia studiare che non studiare.
Se piove e NON studio, non ho mantenuto fede all'impegno (l'implicazione è falsa)
↑

Def. DOPPIA IMPLICAZIONE:

$p\Leftrightarrow q$ (si legge VALE p SE E SOLO SE VALE q).

è vera quando p e q entrambe vere o entrambe false, ed è falsa negli altri casi

p	q	$p\Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

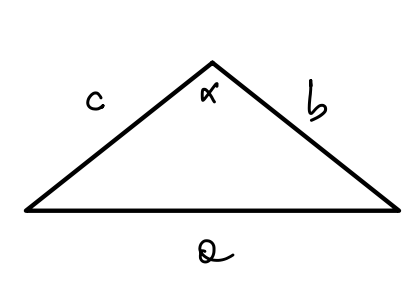
Esempio: p = "T è un triangolo rettangolo"

q = "in T vale il Teorema di Pitagora"

$p\Rightarrow q$

Vale la doppia implicazione? Sì

$p\Leftrightarrow q$



$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$ FORMULA DEL COSENO PER UN TRIANGOLO QUALUNQUE

Se vale $a^2=b^2+c^2$ $\Rightarrow -2bc\cos\alpha=0$, essendo $b\neq0$, $c\neq0$, si ha $\cos\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}=90°$.

② Esempio: L, L' rette nello spazio cartesiano.

p = "L e L' sono rette parallele"

q = "L e L' sono rette tali che $L\cap L'=\emptyset$"

$p\Rightarrow q$ è vera.

$q\Rightarrow p$ non è vera (si vedrà nei corsi di Geometria)

Terminologia: $p\Rightarrow q$ si dice che p è una CONDIZIONE SUFFICIENTE per q
q è una CONDIZIONE NECESSARIA per p

$p\Leftrightarrow q$ si dice che p è CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE per q

~ . ~ . ~ . ~

PROP. DIPENDENTI DA VARIABILI

Sia U un insieme qualunque, sia $x\in U$ qualunque, e sia $p(x)$ una proposizione che dipende da x

es.: $x\in\mathbb{R}$, $U=\mathbb{R}$, $p(x)$ = "la funzione $f(x)=x^3$ è iniettiva".

Possiamo considerare enunciati del tipo

$\forall x\in U$, $p(x)$ è vera

$\exists\, x\in U$, $p(x)$ è vera

$\forall x\in U$, $p(x)$ è falsa

$\exists\, x\in U$, $p(x)$ è falsa

e varianti con implicazioni: $(\forall x\in U)\,(p(x)\Rightarrow q(x))$

$(\exists\, x\in U)\,(p(x)\Rightarrow q(x))$

REGOLE DI NEGAZIONE:

- $\neg[(\forall x\in U)\,p(x)] = (\exists\, x\in U)\,\neg p(x)$
- $\neg[(\exists\, x\in U)\,p(x)] = (\forall x\in U)\,\neg p(x)$
- $\neg[(\forall x\in U)\,(p(x)\Rightarrow q(x))] = (\exists x\in U)\,(p(x)\wedge\neg q(x))$

RELAZIONI BINARIE

Sia X insieme, una RELAZIONE BINARIA su X è un sottoinsieme

$$\mathcal{R}\subseteq X\times X = X^2$$

se $(x_1,x_2)\in\mathcal{R}$, diremo che x_1 è IN RELAZIONE con x_2

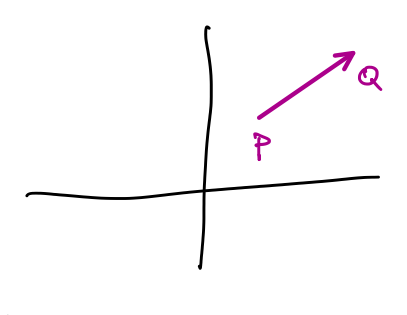
ESEMPI:

① X = {studenti iscritti a UNITS nell'anno 21/22}

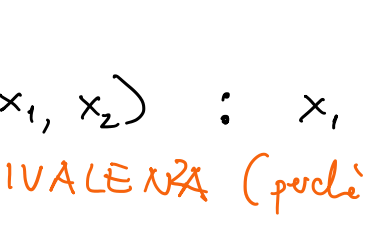
$\mathcal{R} := \{(x_1,x_2)\in X\times X : x_1$ e x_2 sono iscritti allo stesso CdS$\}$
È DI EQUIVALENZA

② $X=\mathbb{N}$, $\mathcal{R} := \{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : m\leq n\}$
NON È DI EQUIVALENZA (manca la SIMMETRIA)

③ X = {vettori applicati del piano cartesiano}



$\mathcal{R} = \{(v_1,v_2)\in X\times X : v_1$ e v_2 sono equipollenti$\}$ (cioè stessa direzione, stesso verso, stessa lunghezza (modulo))
È DI EQUIVALENZA



④ X = {tutte le persone viventi}

$\mathcal{R} = \{(x_1,x_2) : x_1$ conosce $x_2\}$
NON è di EQUIVALENZA (perché manca TRANSITIVITÀ)

⑤ $X=\mathbb{Z}=\{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$
insieme dei NUMERI INTERI

fissiamo $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$
$(m\neq0)$

$\mathcal{R} := \{(x,y) : m$ divide $x-y\}$
È DI EQUIVALENZA
$:= \{(x,y) : x-y$ è un multiplo intero di $m\}$

$:= \{(x,y) : \exists\, k\in\mathbb{Z}$ tale che $x-y=k\cdot m\}$

$(x,y)\in\mathcal{R}$, $(y,z)\in\mathcal{R}$
$x-y=km$, $y-z=hm$
$x-z=x-y+y-z=km+hm$
$=(k+h)m$
$\Rightarrow (x,z)\in\mathcal{R}$

Es.: $m=2$, $\mathcal{R} := \{(x,y) : 2$ divide $x-y\}$

$:=\{(x,y) : \exists\, k\in\mathbb{Z}$ tale che $x-y=2k\}$

es. $(4,2)\in\mathcal{R}$ perché $4-2=2=2\cdot1$

$(2,4)\in\mathcal{R}$

$(9,3)\in\mathcal{R}$ perché $9-3=6=2\cdot3$

$(3,9)\in\mathcal{R}$ $3-9=-6=2\cdot(-3)$

$(12,-8)\in\mathcal{R}$: $12-(-8)=20=2\cdot10$

$(-8,12)\in\mathcal{R}$ $-8-12=-20=2\cdot(-10)$

In generale vale che: $(m,n)\in\mathcal{R}$ se e solo se m e n sono entrambi pari o entrambi dispari

infatti: $(m,n)\in\mathcal{R} \Leftrightarrow m-n=2k$

$m=n+\underbrace{2k}_{\text{pari}}$

Se n è dispari, $n=2h+1$ per $h\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow m=2h+1+2k=2(h+k)+1$ dispari

Se n è pari, $n=2s \Rightarrow m=2s+2k=2(s+k)$
pari

e valgono anche le implicazioni opposte

$m=3$ $\mathcal{R} := \{(x,y) : \exists\, k\in\mathbb{Z}$ tale che $x-y=3k\}$

es. $(40,10)\in\mathcal{R}$ $40-10=30=3\cdot10$
$(10,40)\in\mathcal{R}$
resto $r=r'=1$

resto $r=r'=0$
$(9,3)\in\mathcal{R}$ $9-3=6=3\cdot2$
$(9,0)\in\mathcal{R}$ $9-0=9=3\cdot3$

$(5,2)\in\mathcal{R}$: $5-2=3=3\cdot1$
$(8,5)\in\mathcal{R}$, $8-5=3$

$x=y+3k$

$x=3\cdot q+r$ divisione euclidea, $r\in\{0,1,2\}$

$y=3\cdot q'+r'$, $r'\in\{0,1,2\}$

$x-y=3q+r-3q'-r'=3k$

$\Leftrightarrow$ $r=r'+\underbrace{(k-q+q')}3$;

siccome $r,r'\in\{0,1,2\}\Rightarrow$
$k-q+q'=0$, cioè
$k=q-q'$ e $r=r'$

es. $x=40$, $y=10$

$x=3\cdot13+1$
$y=3\cdot3+1$

$x-y=3\cdot\overset{q}{13}+1-3\cdot\overset{q'}{3}-1$
$=3\cdot\underbrace{(13-3)}_{=k}+(1-1)$

Conclusione:

$(x,y)\in\mathcal{R} \Leftrightarrow r=r'$, cioè x e y hanno lo stesso resto nella divisione con 3

In generale: è possibile verificare che $\forall m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$
$(x,y)\in\mathcal{R} \Leftrightarrow x$ e y hanno lo stesso resto nella divisione per m

⑥ X = {tutte le persone viventi}, $\mathcal{R}=\{(x_1,x_2) : x_1$ e x_2 hanno la stessa altezza$\}$
È DI EQUIVALENZA

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

Def: $\mathcal{R}\subseteq X\times X$ relazione binaria si dice RELAZIONE DI EQUIVALENZA se soddisfa:

ⓐ PROPR. RIFLESSIVA: $\forall x\in X$, $(x,x)\in\mathcal{R}$

ⓑ PROPR. SIMMETRICA: $\forall x_1,x_2$ tali che $(x_1,x_2)\in\mathcal{R}$, si ha $(x_2,x_1)\in\mathcal{R}$

ⓒ PROPR. TRANSITIVA: $\forall x_1,x_2,x_3\in X$ tali che $(x_1,x_2)\in\mathcal{R}\wedge(x_2,x_3)\in\mathcal{R}\Rightarrow(x_1,x_3)\in\mathcal{R}$

Notazione: Se $\mathcal{R}$ è rel. di equivalenza, $(x_1,x_2)\in\mathcal{R}$ si usa anche

$x_1\sim x_2$, opp.

$x_1\equiv x_2$

CLASSI DI EQUIVALENZA

Def.: Sia $\mathcal{R}\subseteq X\times X$ rel. di equivalenza.
Un sottoinsieme $C\subseteq X$ si dice CLASSE DI EQUIVALENZA se valgono:

① $C\neq\emptyset$

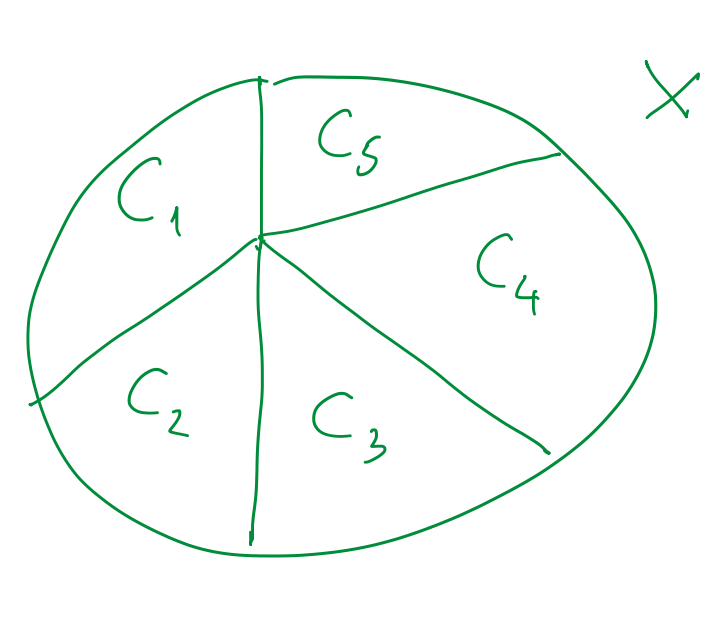
② se $x,y\in C\Rightarrow x\sim y$ (opp. $(x,y)\in\mathcal{R}$)

③ $\forall x\in C$, sia $y\in X$; se $x\sim y$, allora $y\in C$

PROPOSIZIONE: Sia $\mathcal{R}$ equiv. su X. Allora ogni elemento $x\in X$ appartiene a una e una sola classe di equivalenza.

In particolare: date 2 classi di eq. C e C', si ha $C=C'$ oppure $C\cap C'=\emptyset$

Inoltre: X è unione di tutte le classi di equivalenza.



Def.: $\forall$ classe C, se $x\in C$, x si dice RAPPRESENTANTE di C

Def. Data $\mathcal{R}$ di equivalenza, l'INSIEME QUOZIENTE $X/\mathcal{R}$ o $X/\sim$ è l'insieme delle classi di equivalenza per $\mathcal{R}$.

Es.: $X=\mathbb{Z}$, $\mathcal{R}:=\{(x,y) : x-y=2k\}$, $X/\mathcal{R} =: \mathbb{Z}_2$

ci sono 2 classi : $[0]$ (classe dello zero) $=C_1=\{$numeri pari$\}\ni0$

$[1]$ (classe di 1) $=C_2=\{$numeri dispari$\}\ni1$

analog: $\mathcal{R}=\{(x,y) : x-y=km\}$

$\mathbb{Z}/\mathcal{R}=\{[0],[1],[2],\dots,[m-1]\}=:\mathbb{Z}_m$