Precorso 1 settembre

mercoledì 1 settembre 2021 09:54

Altri esempi di insiemi quoziente:

⑦ $X = \{\text{rette piano}\}$, $\mathcal{R} = \{(L, L') : L \text{ è parallela a } L'\}$

$X = \{\text{rette dello spazio}\}$

$\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza

$X/_{\mathcal{R}} \ni [L]$ classe di equivalenza di L
$= \{\text{tutte le rette parallele a } L\}$

$X/_{\mathcal{R}}$ viene chiamato INSIEME DELLE DIREZIONI DEL PIANO

DELLO SPAZIO

Riconsideriamo esempio ③:

$X = \{\text{vettori applicati nel piano}\}$

$\mathcal{R} = \{(v_1, v_2) : v_1 \text{ è equipollente a } v_2\}$

è di equivalenza

$X/_{\mathcal{R}} \ni [v]$ classe di eq
$= \{\text{tutti i vettori equipollenti a } v\}$

$X/_{\mathcal{R}}$ è chiamato SPAZIO (INSIEME) DEI VETTORI LIBERI

Esempio ⑧ $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ni (p, q)$

dove $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\mathcal{R} = \{((p,q),(r,s)) : ps = qr\} \subseteq X \times X$
$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$

Esercizio: verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza

Notazione: invece di (p,q) si usa scrivere $\frac{p}{q}$

$\mathcal{R} = \left\{\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) : \boxed{ps = qr}\right\}$ es. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{6}\right) : 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$

$\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{8}\right) : 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$

e cons. $X/_{\mathcal{R}} \ni \left[\frac{p}{q}\right]$

$X/_{\mathcal{R}}$ si chiama INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$

per semplicità $\left[\frac{p}{q}\right]$ si indica con p/q.

RELAZIONI D'ORDINE

Def.: Una RELAZIONE D'ORDINE o ORDINAMENTO su X è una relazione binaria $\mathcal{R}$ tale che:

ⓐ $\mathcal{R}$ è RIFLESSIVA

ⓑ $\mathcal{R}$ è ANTISIMMETRICA, cioè $(x,y) \in \mathcal{R}$ e $(y,x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$

ⓒ $\mathcal{R}$ è TRANSITIVA

Esempi: ① Sia A un insieme qualunque, e sia $X = \mathcal{P}(A) := \{\text{tutti i sottoinsiemi di } A\}$

si chiama INSIEME DELLE PARTI di A

cons. $\mathcal{R} := \{(B, C) : B \subseteq C\}$

è una RELAZ. D'ORDINE.

Infatti: ⓐ $(B,B) \overset{?}{\in} \mathcal{R}$: $B \subseteq B$ ok

ⓑ $(B,C) \in \mathcal{R}$, cioè $B \subseteq C$
e $(C,B) \in \mathcal{R}$, cioè $C \subseteq B$ $\Big\} \Rightarrow B = C$ ok

ⓒ $(B,C) \in \mathcal{R}$, $(C,D) \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow (B,D) \in \mathcal{R}$
$B \subseteq C \qquad C \subseteq D \qquad \Rightarrow B \subseteq D$ ok

② Sia $X = \mathbb{N}$, opp. $\mathbb{Z}$, oppure $\mathbb{Q}$, oppure $\mathbb{R}$

e sia $\mathcal{R} := \{(m,n) : m \leq n\}$

$\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine, infatti:

ⓐ $(m,m) \in \mathcal{R}$: $m \leq m$ ok.

ⓑ $(m,n) \in \mathcal{R}$, $(n,m) \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow n = m$
$m \leq n \qquad n \leq m$

ⓒ $(m,n) \in \mathcal{R}$, $(n,p) \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow (m,p) \in \mathcal{R}$
$m \leq n \qquad n \leq p \qquad \Rightarrow m \leq p$

OSS: Nell'esempio $X = \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{R}$ data dall'inclusione, non tutte le coppie di elementi di X sono confrontabili (non tutte le coppie di sottoinsiemi (B,C) verificano $B \subseteq C$ oppure $C \subseteq B$)

In questo caso $\mathcal{R}$ si dice REL. D'ORDINE PARZIALE

Invece nell'esempio ②, tutte le coppie (m,n) sono confrontabili (si ha $m \leq n$ opp. $n \leq m$)

In questo caso $\mathcal{R}$ si dice REL. D'ORDINE TOTALE

APPLICAZIONI E FUNZIONI

Def.: Siano X e Y insiemi, si chiama APPLICAZIONE TRA X e Y ogni LEGGE che ad ogni elemento di X associa un elemento di Y.

X si dice DOMINIO

Y si dice CODOMINIO

Se f è l'applicazione, scriveremo

$f : X \longrightarrow Y$

se a $x \in X$ viene assegnato $y \in Y$, scriveremo

$f(x) = y$

y si chiama ELEMENTO IMMAGINE DI x TRAMITE f.

Esempio: $X = \{\text{studenti della mia classe}\}$

$Y = \mathbb{R}$

$f : X \longrightarrow Y$, $f(\text{studente}) = \text{altezza in cm}$

Il fatto che ad OGNI x CORRISPONDE un SOLO ELEMENTO $y \in Y$ si esprime dicendo che f è UNIVOCA.

⚠ questa NON È L'INIETTIVITÀ!

Def.: Quando Y = insieme numerico $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (numeri complessi) una applicazione viene chiamata FUNZIONE, e $f(x)$ viene chiamato anche VALORE DI f in x.

Def.: Sia $f : X \longrightarrow Y$ applicazione, X, Y insiemi qualunque, il GRAFICO di f è il sottoinsieme

$G_f \subseteq X \times Y$

$G_f := \{(x,y) : y = f(x)\}$

Es. ① Se $X = Y = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$G_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

② $X = \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2) = y \in \mathbb{R}$

f è una funzione reale di 2 variabili reali

$G_f \subseteq X \times Y = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

(queste funzioni studiate in Analisi 2)

es. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$f(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2$

$f(x_1, x_2) = e^{x_1}$

Esempi: ① L'applicazione IDENTITÀ:

Sia X insieme qualunque

$Id_X : X \longrightarrow X$

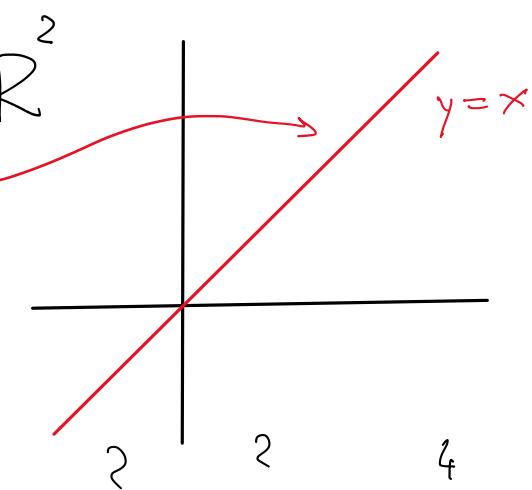
$Id_X(x) = x$

$G_{Id_X} \subseteq X \times X$, $G_{Id_X} = \{(x,y) : y = \underbrace{Id_X(x)}_{=x}\}$

$= \{(x,y) : y = x\}$

$= \{(x,x)\}$

es. $X = \mathbb{R}$, $G_{Id_{\mathbb{R}}} \subseteq \mathbb{R}^2$



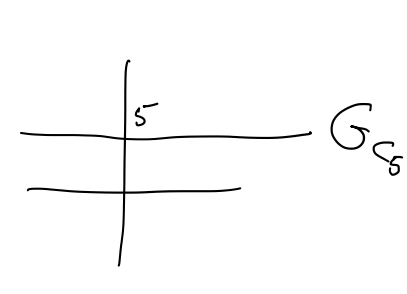
es. $X = \mathbb{R}^2$, $G_{Id_{\mathbb{R}^2}} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$

② APPLICAZIONE COSTANTE:

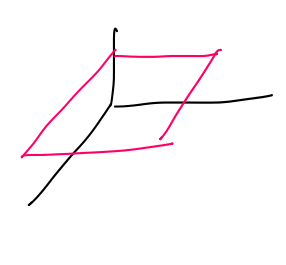
Fissiamo $\bar{y} \in Y$, la APPLICAZIONE COSTANTE $C_{\bar{y}} : X \to Y$ associa ad OGNI ELEMENTO DI X l'elemento fissato $\bar{y}$.

$C_{\bar{y}}(x) = \bar{y} \quad \forall x \in X$

ES. $C_5(x) = 5$



$C_5(x_1, x_2) = 5$



Esempi di funzioni: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$f(x) = \sin x$

$f(x) = e^x$

$f : \underbrace{\mathbb{R}_{\geq 0}}_{\text{numeri reali } \geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

DEF.: X, Y insiemi, f applicazione si dice:

ⓐ INIETTIVA: se elementi diversi di X hanno sempre immagini diverse, cioè:

$\forall x_1, x_2 \in X$ tali che $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

OSS. L'applicazione costante non è iniettiva.
Invece $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ è iniettiva.
$Id_X : X \to X$ è sempre iniettiva.

ⓑ SURIETTIVA: se ogni elemento del codominio Y è immagine di qualche elemento di X, cioè:

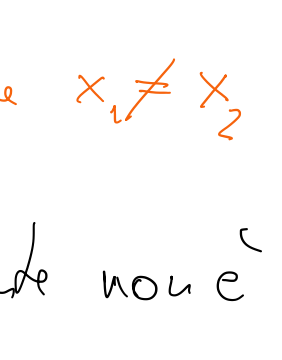
$\forall y \in Y, \exists x \in X$ tale che $f(x) = y$

es.: • la applicazione costante è suriettiva $\Leftrightarrow Y = \{\bar{y}\}$
altrimenti, se Y ha almeno 2 elementi, non è suriettiva.

• $Id_X : X \to X$ è sempre suriettiva.

ⓒ BIIETTIVA: se f è iniettiva e suriettiva
es. Id_X è biiettiva.

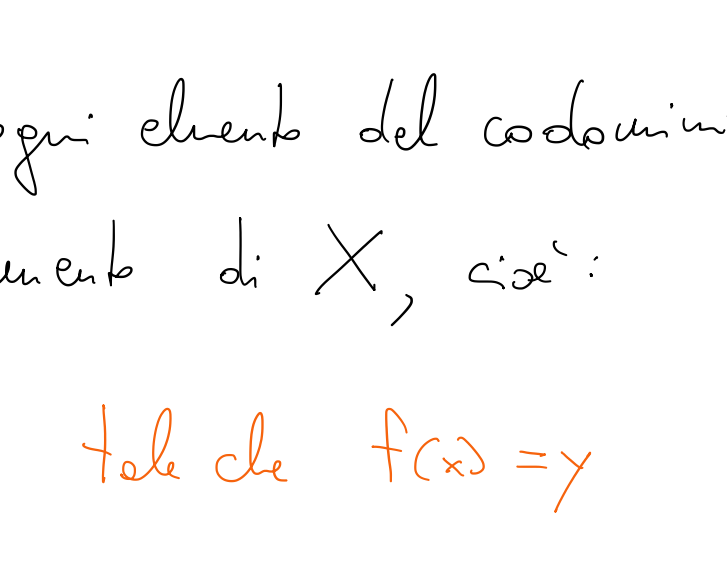
Esempio: ⓐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ è iniettiva, ma non suriettiva



infatti: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, quindi $\mathbb{R}_{\leq 0}$ non sono immagini tramite l'esponenziale.

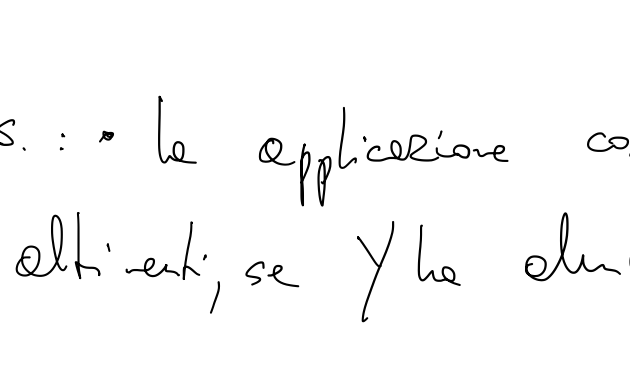
ⓑ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 15x^2$

È SURIETTIVA
infatti: $\forall c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$
$x^3 - 15x^2 = c$



$f(x) = \cos x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON È SURIETTIVA

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ È SURIETTIVA

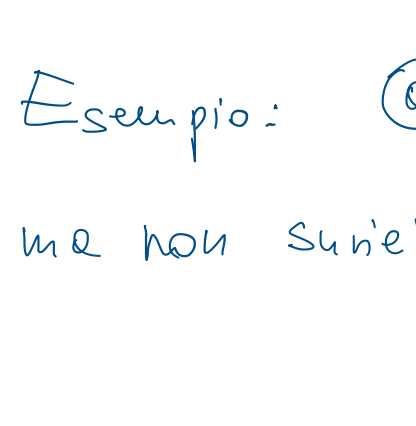


la suriettività di $f(x) = x^3 - 15x^2$ equivale all'esistenza di almeno una soluzione reale dell'equazione

$x^3 - 15x^2 = c$, $\quad x^3 - 15x^2 - c = 0$

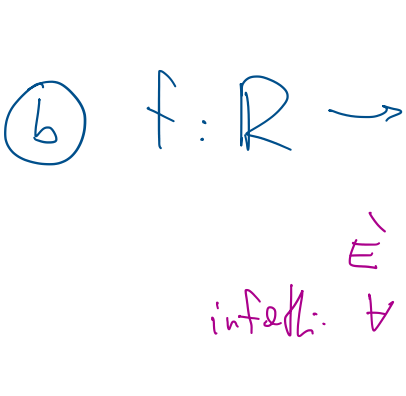
una ne esiste sempre.

ⓒ $f(x) = x$, $f(x) = x^3$ sono BIETTIVE



OSS. $f(x) = x^2$ NON è iniettiva
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(-2) = 4 = f(2)$

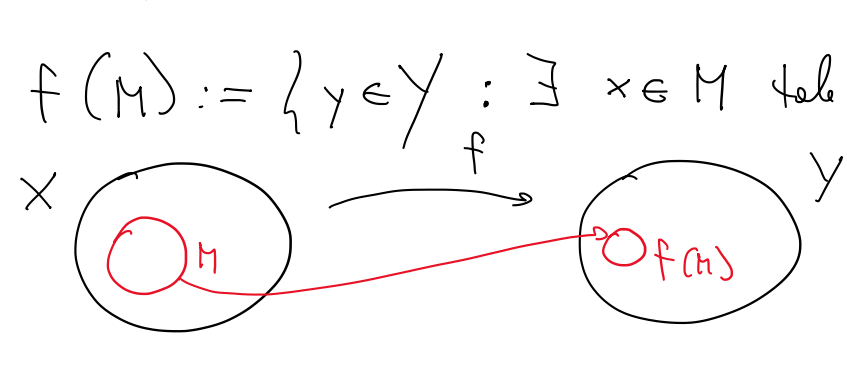


Non è nemmeno suriettiva: -3 non è immagine.

Def. • $f : X \to Y$ applicazione, sia $M \subseteq X$

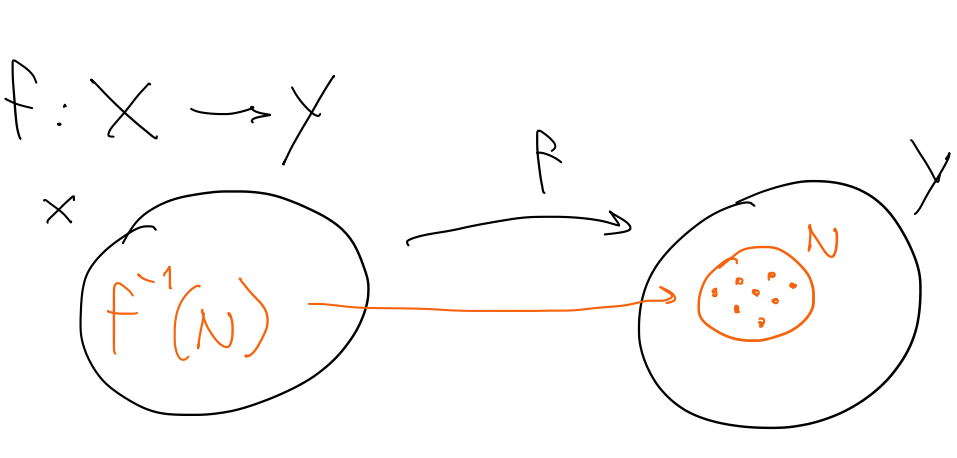
l'IMMAGINE DI M TRAMITE f è:

$f(M) := \{y \in Y : \exists x \in M \text{ tale che } f(x) = y\} \subseteq Y$



In particolare: $f(X)$ = IMMAGINE DI $f \subseteq Y$

• $f : X \to Y$

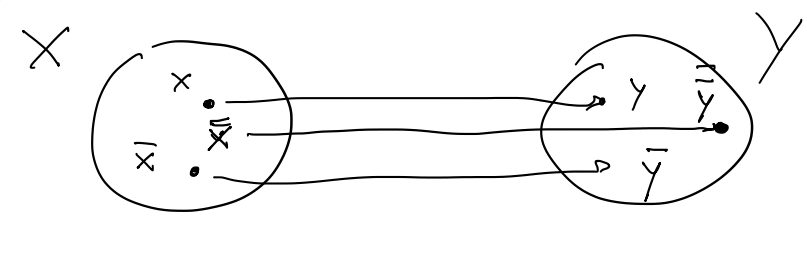


dato $N \subseteq Y$, la PREIMMAGINE o CONTROIMMAGINE di N TRAMITE f è data da:

$f^{-1}(N) := \{x \in X : f(x) \in N\}$

APPLICAZIONE INVERSA

Def. Sia $f : X \longrightarrow Y$ biiettiva; allora ad ogni x corrisponde $y \in Y$, e ogni $y \in Y$ proviene da un unico $x \in X$



in questa situazione si può definire la APPLICAZIONE INVERSA di f e si denota con f^{-1}:

$f^{-1} : Y \longrightarrow X$

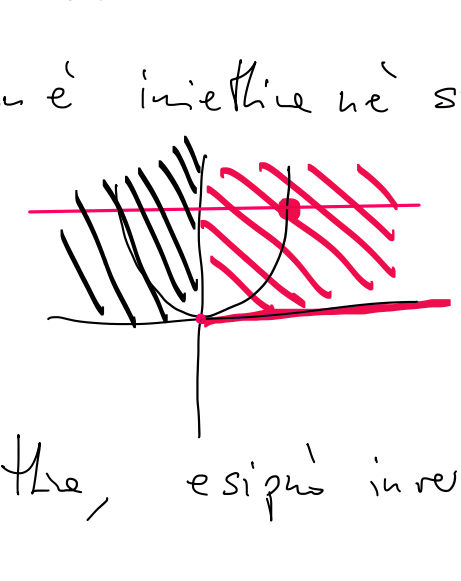
$f^{-1}(y)$ = l'unico x tale che $f(x) = y$

es. $f(x) = x^3$, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

OSS. Se f non è biiettiva, spesso si considera una funzione "molto simile" ad f, ottenuta restringendo il dominio e/o il codominio, in modo da ottenere una funzione biiettiva, e quindi con inversa.

Es: $f(x) = x^2$ non è iniettiva né suriettiva

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

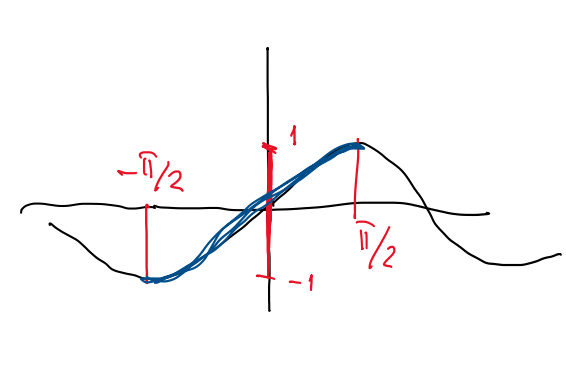


$\tilde{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\tilde{f}(x) = x^2$ è biiettiva, e si può invertire

$(\tilde{f})^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(\tilde{f})^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Esercizio: restringere dominio e codominio della $\sin x$ e $\cos x$ in modo che diventino biiettive



COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI

Def. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$

la COMPOSIZIONE DI f e g, la FUNZIONE COMPOSTA: $g \circ f : X \longrightarrow Z$

$(g \circ f)(x) := g(f(x))$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & g(f(x)) \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

Attenzione: se $f : X \to X$, $g : X \to X$

possiamo cons. $g \circ f$ che $f \circ g$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & g(f(x)) \\
X \arrow[r] & X \arrow[r] & X \\
x \arrow[r] & g(x) \arrow[r] & f(g(x))
\end{tikzcd}$$

: $g \circ f \neq f \circ g$

es. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$

$g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$

$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$