

martedì 7 settembre 2021 09:54

Per avere la "slide" :

mandare il proprio
indirizzo email a

beorchia@units.it

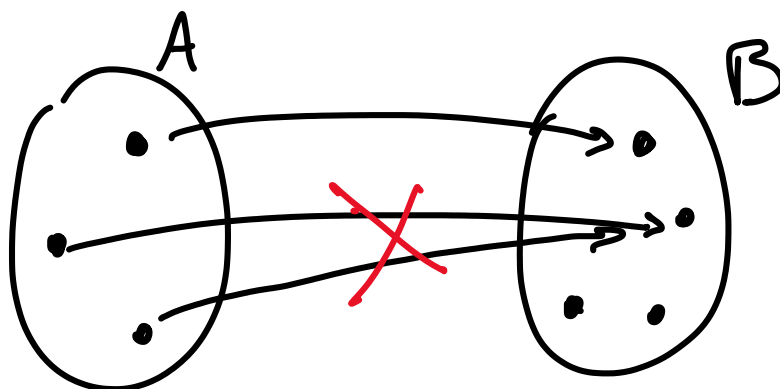
Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente
de crescente se $f(x) < f(y)$
 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$.

funzioni monotone : funzioni crescenti
o decrescenti.

Ogni funzione strettamente monotona
è **iniettiva**.

→ Una funzione $f: A \rightarrow B$ è
iniettiva se $\forall a_1, a_2 \in A$, se

$a_1 \neq a_2$, allora $f(a_1) \neq f(a_2)$



Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente, verifichiamo che f è iniettiva.

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq y$.

Siccome su $\mathbb{R}$ abbiamo un ordine totale, avremo $x < y$ oppure $y < x$.

(Ad esempio $x < y$)

Ma f è strettamente crescente:

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow f(x) < f(y) \\ &\Rightarrow f(x) \neq f(y) \end{aligned}$$

Per definizione, f è iniettiva.

FRAZIONI ALGEBRICHE

Essattamente come abbiamo costruito $\mathbb{Q}$ partendo da $\mathbb{Z}$,

costruiamo le frazioni tra polinomi

Consideriamo cose del tipo

$$(*) \quad \frac{x+z}{xy^2} + \frac{1}{y}$$

(Il polinomio al denominatore non può essere il polinomio 0)

Quando consideriamo x, y, z come numeri reali, dobbiamo garantire che i denominatori non si annullino.

(*) è "ben definito" se $xy^2 \neq 0$
e $y \neq 0$.

OPERAZIONI CON LE FRAZIONI ALGEBR.

Funzionano come le operazioni in $\mathbb{Q}$.

$$1) \quad \frac{P}{Q} + \frac{R}{T} = \frac{P \cdot () + R \cdot ()}{\text{mcm}(Q, T)}$$

$$2) \quad \frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{T} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot T}$$

elem neutri 0, 1

inversi : $\frac{P}{Q} \rightsquigarrow -\frac{P}{Q}$

$\rightsquigarrow \frac{Q}{P}$

Come in $\mathbb{Q}$, non c'è un concetto di "multiplo," "divisore," "primo".

Non c'è un ordine totale

POTENZE, ESPONENZIALI, LOGARITMI.

Dato $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} \in \mathbb{R}$$

Proprietà

$$1) \quad a \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2) \quad a \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$3) \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$a^n \cdot b^m = (ab)^m.$$

Se $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, allora considero

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^m$$

Osserviamo:

- se m è pari, $m = 2t$, allora

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^m \\ &= (-x)^{2t} \\ &= ((-x)^2)^t \\ &= (x^2)^t \\ &= x^{2t} \\ &= x^m = f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ è pari

- se m è dispari, allora

f è dispersi.

In entrambi i casi possiamo studiare

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^n$$

Si può dimostrare che f è
strettamente crescente
(quindi iniettiva)

La sua inversa si chiama radice
 n -esima.

L'immagine di f è $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Quindi, fissato $n \in \mathbb{N}$,

$\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \exists! z \geq 0$ tale
che $z^n = x$.

z si chiama radice n -esima di x
e si scrive $z = \sqrt[n]{x}$.

Vogliamo definire a^n quando $n \in \mathbb{Z}$
in modo che le proprietà valgono

ancora.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Qualunque sia sia " a^{-n} ", deve
retere $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$

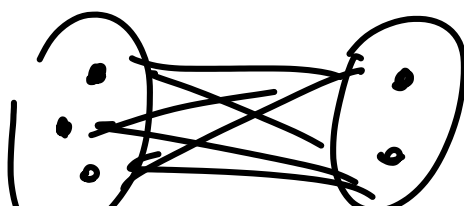
$$\Rightarrow a^{-n} \cdot a^n = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Con questa definizione, le tre proprietà
continuano a valere.

$$0^0 = 1$$

2^3 = numero di funzioni
da un insieme con
3 el a un ins
con 2 el



$$0^0 = \# \text{ funzioni} = 1$$

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi \\ \phi \times \phi &= \phi \\ (\phi, \phi, \phi) \end{aligned}$$

Vogliamo un esponente in $\mathbb{Q}$ in modo che le proprietà continuino a valere.

$$a^{\frac{1}{n}} = ?$$

$$\begin{aligned} \text{con } a &\in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ n &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\text{e } a^{\frac{m}{n}} ?$$

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &= a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

V ~

Si può vedere che le proprietà valgono ancora e che la definizione non dipende dalla rappresentazione della frazione.

$$(i.e. a^{2/3} = a^{4/6})$$

Posso definire $a^{\frac{m}{n}}$ quando $m, n \in \mathbb{Z}, a < 0$?

(in modo che le proprietà continuino a valere)

NO

Cosa vorrebbe dire $(-2)^{1/2}$?

Se esistesse $(-2)^{1/2}$ allora

$$-2 = (-2)^1 = (-2)^{\frac{2}{2}} = \left((-2)^{1/2} \right)^2 \geq 0$$

sto elevando un numero reale

il quadrato

D'ora in poi scriveremo a^q con
 $a \geq 0$. Sappiamo come fare
 se q è razionale.

Vorremo a^x con $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
 e $x \in \mathbb{R}$.

1° caso $a > 1$. Definiamo a^x come
 $\{a^z / z \in \mathbb{Q} \text{ e } z < x\} \cup \{a^s / s \in \mathbb{Q} \text{ e } s > x\}$