OLD BINI

Eq. di Boltzmann non collisionale

Idea di base
Fluido tradizionale è "continuo" in 3D
Flusso delle stelle è "continuo" in 6D
non ci sono salti di velocità!

Immaginate un gran numero di stelle (galassie) che si muovono sotto l'influenza di un potenziale "smooth" smussato $\phi(\vec{x}, t)$.

Ad ogni istante t, una descrizione completa dello stato del sistema non collisionale è dato da

di stelle che hanno le posizioni in $d^3\vec{x}$ centrato in $\vec{x}$ e le velocità in $d^3\vec{v}$ centrato in $\vec{v}$

$\longrightarrow f(\vec{x}, \vec{v}, t)\, d^3\vec{x}\, d^3\vec{v}$ probabilità che una certa stella abbia al tempo t le sue coordinate 6D (nello spazio delle fasi)

$\boxed{f(\vec{x}, \vec{v}, t)}$ è la funzione di distribuzione DF

o densità di probabilità nello spazio delle fasi

ovviamente $f \geq 0$ in ogni punto dello spazio delle fasi

Dato $f(\vec{x}, \vec{v}, t_0) \xrightarrow[\text{legge di Newton}]{} f(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad \forall t$

Per fare questo consideriamo il flusso di punti nello spazio delle fasi che si sviluppa mentre le stelle si muovono lungo le loro orbite.

Coordinate nello spazio delle fasi

$$(\vec{x}, \vec{v}) \equiv \vec{w} \equiv (w_1, \ldots, w_6)$$

la velocità del flusso

$$\dot{\vec{w}} = (\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{v}}) = (\vec{v}, -\vec{\nabla}\phi)$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = -m\vec{\nabla}\phi$$

vettore 6-D posiz. velocità indipend.

$\dot{\vec{w}}$ sta a $\vec{w}$ come $\vec{u}$ sta a $\vec{x}$ nel solito flusso di un fluido tradizionale

Caratteristica del flusso descritto da $\dot{\vec{w}}$ è che conserva le stelle: in assenza di incontri, le stelle non saltano da un punto dello spazio delle fasi ad un altro, ma piuttosto si ~~muovono~~ fluiscono "dolcemente"

$\Rightarrow$ densità delle stelle $f(\vec{w}, t)$ soddisfa ad una eq. analoga a quella soddisfatta dalla $\rho(\vec{x}, t)$ di un fluido ordinario (eq. di continuità)

1.E3 $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{6} \frac{\partial f \dot{w}_\alpha}{\partial w_\alpha} = 0 \qquad \boxed{4.11}$$

x vedere il significato fisico $\quad \int_V$ spazio delle fasi

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial f}{\partial t} d^6\vec{w}}_{A} + \underbrace{\int \sum \frac{\partial f \dot{w}_\alpha}{\partial w_\alpha} d^6\vec{w}}_{B} = 0 \qquad (4.11)$$

V volume in 6 DIM.

A: Tasso con cui il mucchio di stelle aumenta/decresce nel volume V

B: teorema divergenza $\int_S f \dot{\vec{w}} \, d^5\vec{S}$

Tasso con cui stelle fluiscono nel/dal volume

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{6} \left(f \frac{\partial \dot{w}_\alpha}{\partial w_\alpha} + \dot{w}_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \right) = 0 \qquad (4.11b)$$

Ma flusso descritto da $\dot{\vec{w}}$ è molto speciale

NON DOBBIAMO DIMENTICARE COS'È!

$$\sum_{\alpha=1}^{6} \frac{\partial \dot{w}_\alpha}{\partial w_\alpha} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(-\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \right) = 0 \qquad (4.12)$$

$= 0$ xché v_i e x_i sono coordinate indipendenti nello spazio delle fasi

perché $\vec{\nabla}\phi$ non dipende dalle velocità

4.12 usate x semplificare 4.11

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{6} \dot{w}_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} = 0$$ 4.13a

cioè $$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) = 0$$ → 4.13b

eq. di Jeans

o in notazione vettoriale

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f - \vec{\nabla} \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0}$$ eq. di Boltzmann

eq. di Boltzmann
eq. fondamentale della dinamica stellare
(caso particolare del teorema di Liouville 8.1.2)

→ Significato: estensione a 6-D del concetto di derivata lagrangiana

DEFINIAMO l'estensione a 6-D di ciò che conosciamo

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{6} \dot{w}_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} = 0$$

$$\boxed{\frac{df}{dt} = 0}$$ eq. di Boltzmann compatta

Il flusso dei punti "stelle" nello spazio delle fasi è INCOMPRIMIBILE, la densità nello spazio delle fasi f attorno ad un punto fase rimane la stessa

VANTAGGI

- Eq. di Boltzmann senza collisioni regola tutti i sistemi dinamici (in equilibrio o no) → disequilibrio evolve lentamente
- Se un sistema dinamico è composto da più tipi di particelle, l'eq. di Boltzmann si applica a ciascun tipo (eg. gal. rosse e gal. blu, stelle di tipo ≠).

Limiti dell'eq. di Boltzmann

NEW

1) Tempo di vita finito

Stelle nascono e muoiono; galassie fanno merging e spariscono o altre sono acquisite dall'esterno

$$\cancel{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}} = B - D$$

mio Binney

2) $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla} f - \vec{\nabla}\phi \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = B - D$$

$\frac{f}{t_{cross}}$

$B(\vec{x}, \vec{v}, t)$ e $D(\vec{x}, \vec{v}, t)$ sono i tassi per unità di volume dello spazio delle fasi al quale oggetti "nascono" o "muoiono".

Eq. di Boltzmann è ok se

$B - D \ll$ termine a sinistra $\Rightarrow$ OK

$\vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \sim \frac{v f}{R} \sim \frac{f}{t_{cross}}$ (v ed R tipici ~~delle~~ nella galassia) $R/v = t_{crossing}$

$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \sim a$ accelerazione

$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \sim a\frac{f}{v}$ ma $a \sim \frac{v}{t_{cross}}$

$\sim \frac{v}{t_{cross}} \cdot \frac{f}{v} \sim \frac{f}{t_{cross}}$

$$\gamma = \left| \frac{B-D}{f/t_{cross}} \right| \ll 1$$ eq. di Boltzmann è valida

ES. stelle M: $M \lesssim 0.5 M_\odot$ $t_{vita} > t_{univ.}$ ☺ $M \gtrsim 20 M_\odot$ $t_{vita} \lesssim 10\,Myr$

(2)

Correlazioni fra stelle

densità numerica di stelle media in un volume infinitesimale dello spazio delle fasi è Nf.

Noi misuriamo la densità numerica entro uno spazio (abbastanza ampio di stelle)
Assumiamo $N\bar{f}$ dove $\bar{f}$ è la media di f sul volume.

$\int_{tot} f d^3v = \nu$

$\int_{TOT} f d^6 \vec{w} = 1$

~~density~~ probability density

In realtà stelle (gals) si attraggono per cui dato una stella è + "probabile" trovarne una vicina...

(o) campo

NEW

NOI VIVIAMO IN 3D

COARSE GRAINED DF $\bar{f}$

fare medie nello spazio

Definizioni e Relazioni con osservabili

~~Definizioni~~

probabilità x unità di V di trovare una particolare stella in x → $\nu(\vec{x})$ (1) $\nu(\vec{x}) \equiv \int f d^3\vec{v}$

~~densità numerica~~ densità di probabilità

stesso densità di masse (in cui tengo conto)

$\equiv \rho$

una ν $\ast$

~~densità spaziale di stelle~~

~~$n(\vec{x}) = N\nu(\vec{x})$~~ ~~$N$ ... stelle~~

prob x unità di volume di trovare una stella

$\rho(\vec{x}) = m(\vec{x}) = N\nu(\vec{x})$ popolo

velocità stellare media (3) 3 vel media in $\vec{x}$ $\overline{v_i}(\vec{x}) \equiv \frac{1}{\nu(\vec{x})}\int f v_i \, d^3\vec{v}$

(4) $\overline{v_i^2} \equiv \frac{1}{\nu}\int f v_i^2 d^3\vec{v}$

$\frac{\Sigma}{v_{LOS}}$

le solite le 3D

N = numero totale di $\ast$

(2) densità numerica spaziale di stelle $m(\vec{x}) = N\nu(\vec{x})$ dove N è il # TOT di oggetti

$\overline{v_i v_j} \equiv \frac{1}{\nu}\int v_i v_j f d^3\vec{v}$ → $\ast$

$m(\vec{x})$ oss. → $\nu(\vec{x})$

conteggi stellari

$\boxed{\text{attenzione!}}$ eq. di Boltzmann mostra evoluzione di f e poi possiamo calcolare ν a vari tempi e posizioni

Se osservo vari m → vari ν non posso inferire nulla sull'evoluzione della f

$\bar{f}$ NON SODDISFA EQ. DI BOLTZ.

eq. di Boltzmann vale per la f non per la $\bar{f} = \int f d^6\vec{w}$ = coarse grain function | f = fine grain function

(2) $M\nu(\vec{x})$ massa aspettata

$L\nu(\vec{x})$ densità di luminosità aspettata

a volte si usa f_M, f_L, a volte si capisce dal contesto

[BINNEY E TREMAINE NUOVA EDIZ.]

OSSERVABILE

(5) $P_x(\vec{v}) = \dfrac{f(\vec{x},\vec{v})}{\nu(\vec{x})}$ distribuzione di ~~probabilità~~ probabilità ~~di distribuzione~~ delle velocità stellari in $\vec{x}$

misurate vicino al Sole

Nelle gals esterne si può osservare le LOS distribuzione di velocità, frazione di stelle $F(v_\parallel)dv_\parallel$

LOS VD è quantificata da due quantità

la LOS vel. media $\overline{v}_\parallel$ e la dispersione $\sigma_\parallel$ attorno alla media

$$\overline{v}_\parallel(\vec{x}_\perp) \equiv \int dv_\parallel \cdot v_\parallel F(x_\perp, v_\parallel)$$

osservabile

$x_\parallel = \hat{s}\cdot\vec{x}$ $\quad \vec{x}_\perp = \vec{x} - x_\parallel \hat{s}$

$v_\parallel = \hat{s}\cdot\vec{v}$ $\quad \vec{v}_\perp = \vec{v} - v_\parallel \hat{s}$

nel piano del cielo

$\hat{s}$

OSSERV.

distanza ∞ → raggi di luce paralleli

$$\overline{v_i v_j - v_i \overline{v}_j - \overline{v}_i v_j + \overline{v}_i \overline{v}_j} =$$

$$\overline{v_i v_j} - \overline{v}_i \overline{v}_j - \cancel{\overline{v}_i \overline{v}_j} + \cancel{\overline{v}_i \overline{v}_j}$$

streaming motion

moto medio

moto random dovuto al fatto che stelle non hanno lo stesso velocità

(5) DEFINISCO

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \overline{v}_i)(v_j - \overline{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \overline{v}_i \overline{v}_j$$

$$\overline{v_i v_j} = \overline{v}_i \overline{v}_j + \sigma_{ij}^2$$

che sorge perché non tutte le stelle in $\boxed{\vec{x}}$ hanno la stessa velocità

σ^2 è ovviamente simmetrico un tensore / TENSORE DELLA DISPERSIONE DI VELOCITÀ

e quindi possiamo scegliere un set di assi $\hat{e}_i(\vec{x})$ in cui σ^2 è diagonale $\quad \sigma_{ij}^2 = \sigma_{ii}^2 \delta_{ij}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

L'elissoide che ha i $\hat{e}_i(\vec{x})$ come assi principali e $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ i suoi semi assi è chiamato ELLISOIDE DELLE VELOCITÀ in $\vec{x}$

→ serve x ~~introdurre~~ l'eq. di Jeans

COORDINATE CANONICHE

f è il # stelle per unità di volume nello spazio delle fasi

set di coordinate arbitrario $\vec{W}$

coordinate cartesiane $\vec{w} = (\vec{x}, \vec{v})$

$\frac{1}{2}v^2 - \phi$

di stelle in $d^6 W$ $\quad N(\vec{W})\, d^6\vec{W} = f(\vec{w})\, d^6\vec{w}$

Se le coordinate $\vec{W}$ sono canoniche $\left\{ \begin{array}{l} \vec{q}, \vec{p} \quad p = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)_{\vec{q}, t} \\ \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \end{array} \right.$

$d^6\vec{W} = d^6\vec{w} \Rightarrow N = f$

densità delle coordinate = densità dello spazio delle fasi

trasformazione canonica

si conserva $\oint \vec{p}\, d\vec{q}$

in particolare le $(\vec{q}, \vec{p})$ soddisfano ~~delle~~ relazioni canoniche commutative

$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0 \qquad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$

$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial A}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \vec{q}}$ parentesi di Poisson

Eq. di Boltzmann in coordinate cilindriche

potrei partire da $(\vec{x},\vec{v})$ ma è noioso, visto che $\frac{df}{dt}=0$ è vero, uso le

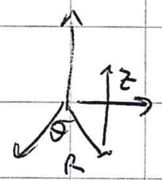
Parto da $\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{6}\dot{w}_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}=0}$ (4,11) però in coordinate cilindriche invece che cartesiane (R,ϕ,z)

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{R}\frac{\partial f}{\partial R}+\dot{\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi}+\dot{z}\frac{\partial f}{\partial z}+\dot{v}_R\frac{\partial f}{\partial v_R}+$$

$$+\dot{v}_\phi\frac{\partial f}{\partial \phi}+\dot{v}_z\frac{\partial f}{\partial v_z}=0$$

~~dove $v_\alpha=\dot{R}$~~

dove (da appunti Marconi)



$$\dot{R}=v_R\ ,\quad \dot{\phi}=\frac{v_\phi}{R}\ ,\quad \dot{z}=v_z$$

potenziale

$$\dot{v}_R=-\frac{\partial\Phi}{\partial R}+\frac{v_\phi^2}{R}\ ,\quad \dot{v}_\phi=-\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}-\frac{v_R v_\phi}{R}\ ,\quad \dot{v}_z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

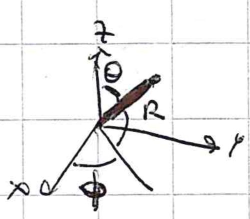
$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_R\frac{\partial f}{\partial R}+\frac{v_\phi}{R}\frac{\partial f}{\partial\phi}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\frac{v_\phi^2}{R}-\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)\frac{\partial f}{\partial v_R}+$$

$$-\frac{1}{R}\left(v_R v_\phi+\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\frac{\partial f}{\partial v_\phi}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial v_z}=0$$

Eq di Boltzmann in coordinate sferiche (r, θ, ϕ)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \dot{\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \dot{v}_r \frac{\partial f}{\partial v_r} + \dot{v}_\theta \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + \dot{v}_\phi \frac{\partial f}{\partial v_\phi} = 0$$

$$\dot{r} = v_r \qquad \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} \qquad \dot{\phi} = \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen}\theta}$$



$$\dot{v}_r = -\frac{d\Phi}{dr} + \frac{(v_\theta^2 + v_\phi^2)}{r}$$

$$\dot{v}_\theta = \frac{(v_r v_\theta - \operatorname{cotg}\theta \, v_\phi^2)}{r}$$

da Marino
o da Mamon

$$\dot{v}_\phi = -\frac{(v_r v_\phi + \operatorname{cotg}\theta \, v_\theta v_\phi)}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \left(\frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} - \frac{d\Phi}{dr}\right)\frac{\partial f}{\partial v_r} +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(v_\phi^2 \operatorname{cotg}\theta - v_r v_\theta\right)\frac{\partial f}{\partial v_\theta} - \frac{1}{r}\left[v_\phi\left(v_r + v_\theta \operatorname{cotg}\theta\right)\right]\frac{\partial f}{\partial v_\phi} = 0$$