Corso propedeutico - esercizi 3

Parole chiave: relazioni tra due insiemi, relazioni su un insieme, riflessività, simmetria, antisimmetria, transitività, relazioni di equivalenza, partizione di un insieme, classi di equivalenza, insieme quoziente di una relazione di equivalenza, relazioni d'ordine, assioma della scelta, lemma di Zorn.

1) Sia A un insieme. Si consideri la relazione $\subseteq$ su $\mathcal{P}(A)$. Si dica se $\subseteq$ è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale. $\subseteq$ è relazione di equivalenza? $\subseteq$ è relazione d'ordine?

2) Sia A un insieme. Si consideri la relazione ρ su $\mathcal{P}(A)$ così definita

$$B \,\rho\, C \quad \text{significa} \quad B \setminus C = \emptyset \vee C \setminus B = \emptyset$$

Si dica se ρ è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale. ρ è relazione di equivalenza? ρ è relazione d'ordine?

3) Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali. Si consideri la relazione ρ su $\mathbb{N}$ così definita

$$m \,\rho\, n \quad \text{significa} \quad m + n \text{ è un numero pari.}$$

Si dica se ρ è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale. ρ è relazione di equivalenza? ρ è relazione d'ordine?

4) Si consideri la relazione ρ su $\mathbb{N}$ così definita

$$m \,\rho\, n \quad \text{significa} \quad mn \text{ è un numero pari.}$$

Si dica se ρ è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale. ρ è relazione di equivalenza? ρ è relazione d'ordine?

5) Sia $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei numeri interi. Sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Si consideri la relazione $\equiv_m$ su $\mathbb{Z}$ così definita

$$k \equiv_m h \quad \text{significa} \quad k - h \text{ è un multiplo intero di } m.$$

Si provi che $, \equiv_m$ è relazione di equivalenza e se ne determini l'insieme quoziente.

6) Con riferimento alla notazione dell'esercizio 5), si provi che

$$(k_1 \equiv_m h_1) \wedge (k_2 \equiv_m h_2) \Rightarrow (k_1 + k_2 \equiv_m h_1 + h_2) \wedge (k_1 k_2 \equiv_m h_1 h_2).$$

7) Si consideri la relazione $\big|$ su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ così definita

$$m \,\big|\, n \quad \text{significa} \quad \text{esiste } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tale che } mk = n.$$

Si provi che $\big|$ è relazione d'ordine. Dati i numeri 12 e 15, si determini l'insieme degli elementi $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $(k \,\big|\, 12) \wedge (k \,\big|\, 15)$ e l'insieme degli elementi $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $(12 \,\big|\, h) \wedge (15 \,\big|\, h)$.