

# **IDRAULICA APPLICATA**

## **PARTE 1 – Correnti in pressione**

### **Capitolo 1 – Lunghe condotte**

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE



## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE - INTRODUZIONE

Convogliare un fluido a grandi distanze dove non è disponibile, es. oleodotti. Sono caratterizzate da grandi diametri e da sviluppo longitudinale pari a decine di migliaia di volte il loro diametro, in questo caso si parla di **lunghe condotte**.

In questo caso i calcoli idraulici possono essere semplificati con le seguenti assunzioni:

- Le perdite locali sono trascurabili rispetto alle continue (imbocco, sbocco, cambio sezione)
- Le altezze cinetiche sono trascurabili rispetto a quelle piezometriche
- Si può considerare la proiezione orizzontale della condotta anziché la lunghezza effettiva

Per le perdite locali si può ricorrere alla lunghezza equivalente in termini di perdite continue.

$$L_e = \frac{K_T}{\lambda} D$$

Se consideriamo  $K_T$  la somma delle perdite locali, ad esempio  $K_{\text{imbocco}}=0,5$ ,  $K_{\text{sbocco}}=1$  ed un indice di resistenza  $\lambda=0,025$

$$L_e = 60D$$

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE - INTRODUZIONE

Se considero accettabile un errore del 4%

$$L_e = 40K_T D \leq 0,04L = 0,04nD$$

Con la lunghezza L della condotta espressa in termini di diametri. Perché l'errore sia accettabile serve che la lunghezza minima sia:

$$L_{min} = n_{min}D = \frac{40}{0,04}K_T D = 1000K_T D$$

Le lunghe condotte sono contraddistinte da velocità dell'ordine di qualche metro al secondo → altezze cinetiche di ordine di qualche decina di cm. Mentre di norma le quote geodetiche dei serbatoi messi in comunicazione determinano altezze piezometriche dell'ordine delle decine di metri.

Le condotte sono di norma interrate e seguono l'altimetria, difficilmente si hanno pendenze maggiori del 10-20%. Considerano una pendenza del 10% ed una lunghezza orizzontale L=100m la lunghezza effettiva sarà di 100,5m introducendo un errore dello 0,5%.

Si deve invece tenere conto che lungo le condotte ci possono essere erogazioni di portata

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE - INTRODUZIONE

Le condotte lunghe hanno lunghe durate di esercizio → cambiano le caratteristiche idrauliche e la scabrezza.

Per garantire l'esercizio in fase progettuale le condotte vanno calcolate in condizione di tubi usati, ed eventualmente verificarne il funzionamento a tubi nuovi.

Tipologia di calcoli:

- Verifica di sistema esistente (calcolo delle portate)
- Progetto, dimensionamento del sistema per soddisfare certi criteri (determinazione dei diametri)

In diversi casi le lunghe condotte possono combinarsi in un sistema a rete, per i calcoli bisogna appoggiarsi a valutazione di natura economica, pertanto fra le soluzioni idraulicamente possibili si adotta quella economicamente più vantaggiosa.

E di uso comune nei calcoli appoggiarsi alle formule pratiche del tipo:

$$J = k \frac{Q^m}{D^n}$$

# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – EROGAZIONE CONTINUA

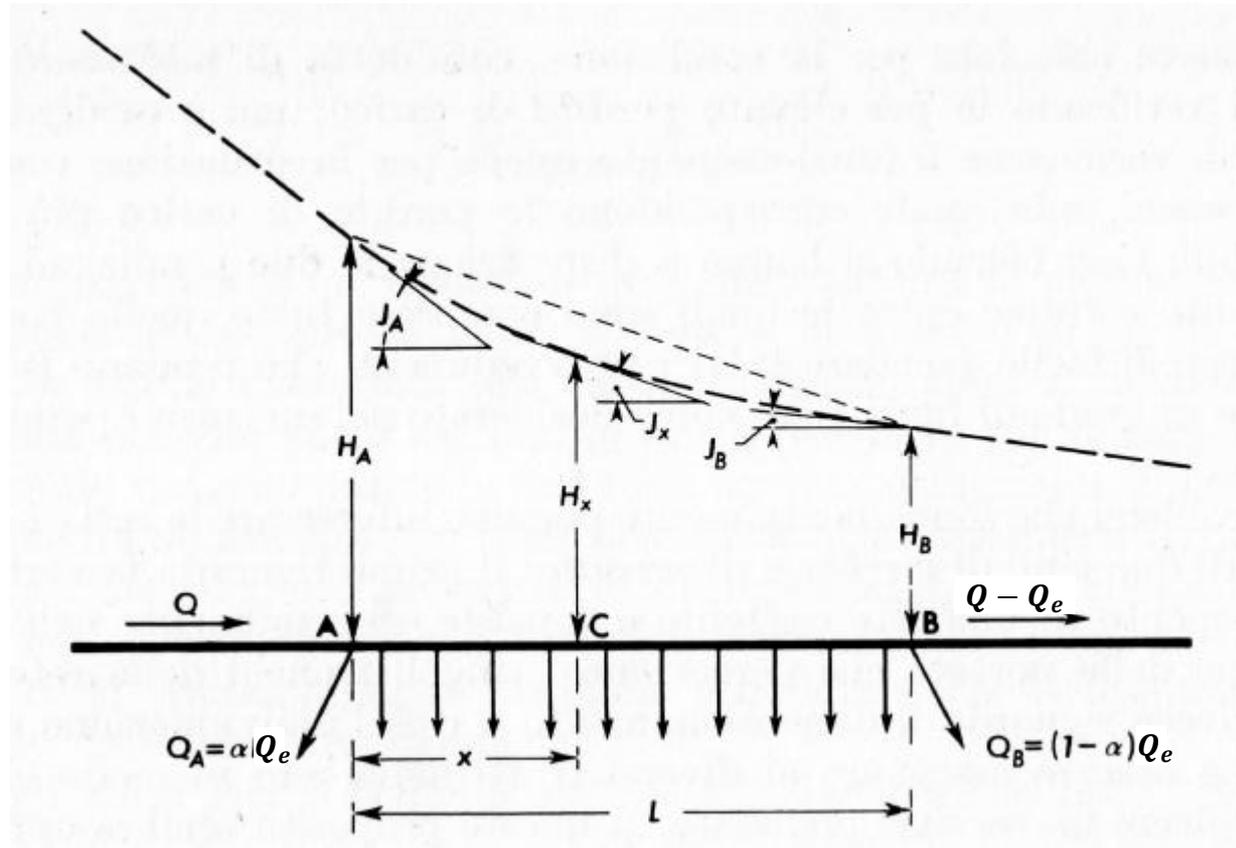
## Condotta con erogazione continua

Condotta a diametro costante  $D$ , dove è inserito un tratto  $AB$  di lunghezza  $L$  dove avvengono erogazioni.

Le erogazioni si considerano uniformemente distribuite con portata  $q$  per unità di lunghezza.

$Q_E = qL$ ,  
 $Q > Q_E$  in A con carico  $H_A$ .

Andamento piezometrica in  $AB$  e carico  $H_B$ ?



Alla sezione  $C$  la portata è  $Q - qx$ , in una sezione successiva a  $dx$  da quella considerata avremo

$$dH = J_x dx = k(Q - qx)^2 D^{-n} dx$$

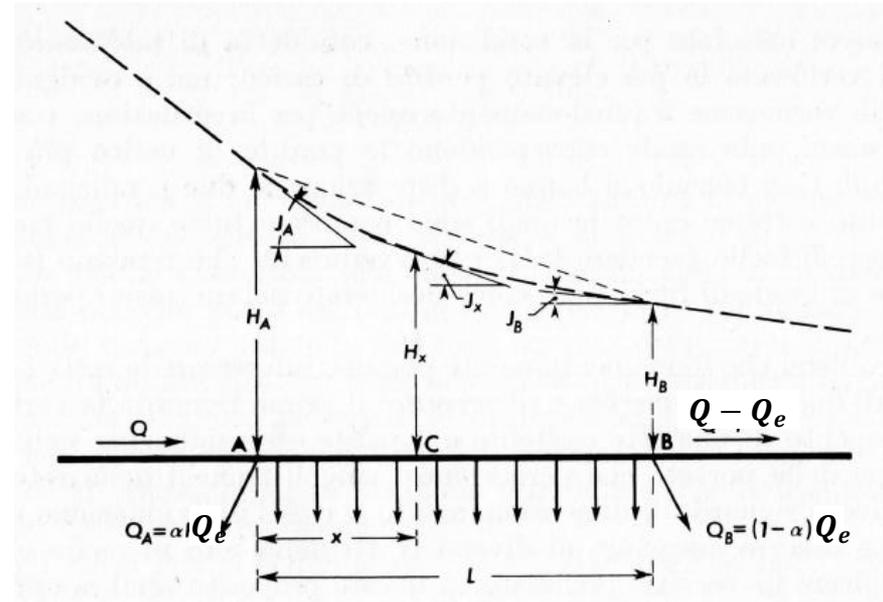
## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – EROGAZIONE CONTINUA

Il carico  $H_x$  in C

$$H_x = H_A - \int_0^x dH$$

$$H_x = H_A - \int_0^x kD^{-n}(Q^2 - 2Qqx + q^2x^2)dx$$

$$H_x = H_A - kD^{-n} \left[ Q^2x - Qqx^2 + \frac{1}{3}q^2x^3 \right]$$



La piezometrica ha una forma ad arco di parabola cubica , agli estremi A e B la tangente è pari alla cadente:

$$J_A = kQ^2D^{-n}$$

$$J_B = k(Q - Q_E)^2D^{-n}$$

Il carico in B

$$H_B = H_A - kD^{-n}L \left[ Q^2 - QQ_E + \frac{1}{3}Q_E^2 \right]$$

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – EROGAZIONE CONTINUA

Se la portata  $Q$  viene completamente erogata  $Q=Q_E$

Perdita pari ad  $1/3$  di quella senza erogazione

$$H_B = H_A - \frac{1}{3}kQ^2D^{-n}L$$

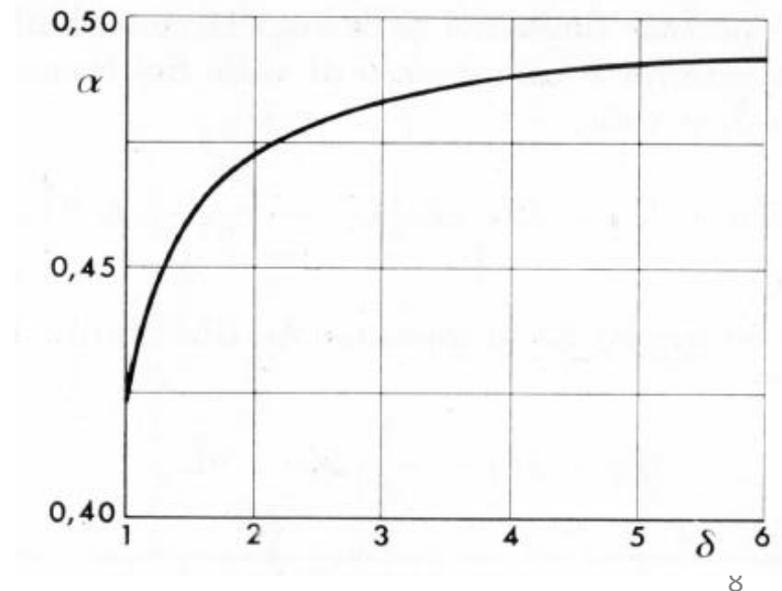
A livello pratico anziché considerare l'erogazione continua si considera una erogazione concentrata alle due estremità tale da comportare la stessa perdita di carico. Se in A eroga la portata  $\alpha Q_E$  nel tratto  $L$  transiterà  $Q-\alpha Q_E$ . Questa portata mi deve fornire una perdita di carico analoga al caso di erogazione continua, per cui:

$$\left[ Q^2 - QQ_E + \frac{1}{3}Q_E^2 \right] = (Q - \alpha Q_E)^2 \quad \text{da} \quad H_B = H_A - kD^{-n}L \left[ Q^2 - QQ_E + \frac{1}{3}Q_E^2 \right]$$

Otengo dividendo per  $Q_E^2$

$$\alpha^2 - 2\frac{Q}{Q_E}\alpha - \frac{1}{3} + \frac{Q}{Q_E} = 0$$

$$\alpha = \delta - \sqrt{\delta^2 - \delta + \frac{1}{3}} \quad \text{con} \quad \delta = \frac{Q}{Q_E}$$



# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

## Introduzione

Reti di tubazioni collegate in serie e in parallelo, contraddistinte da diverse fonti di alimentazione ed erogazioni.

Tipologie di intervento:

- Nuovo impianto
- Ampliamento di impianto esistente
- Manutenzione e relativa chiusura di tratti

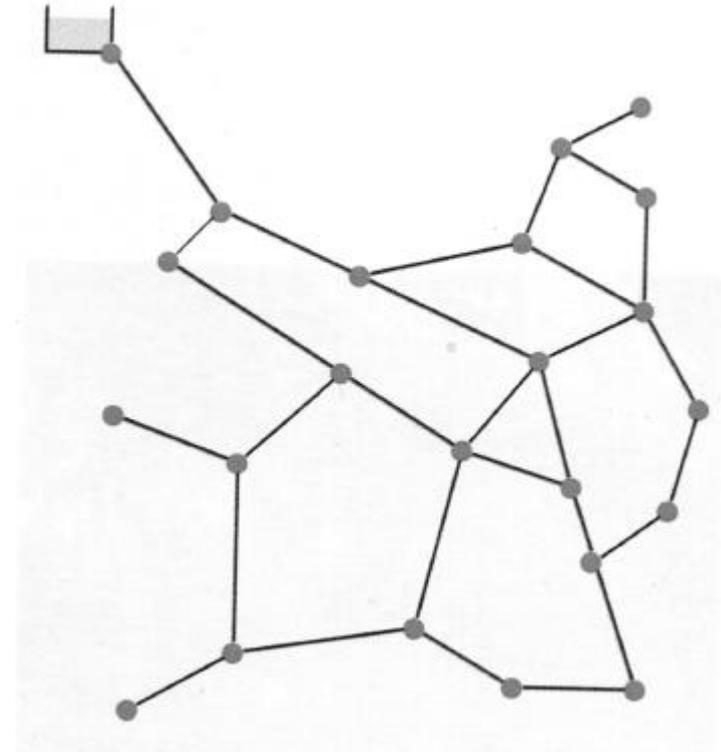
**Obiettivo: erogazione delle portate richieste mantenendo un valore minimo di pressione.**

E' un calcolo complesso che richiede appropriati algoritmi e l'utilizzo di macchine di calcolo e software.

Schematizzazione del sistema definendo:

- **nodi**: punto di variazione delle caratteristiche idrauliche o geometriche della rete;
- **lato**: tubazione che congiunge due nodi → ha caratteristiche idrauliche e geometriche uniformi;
- **maglia**: successione di lati che partendo da un generico nodo torni a chiudersi sul nodo di partenza

Possibili incognite principali: H, Q, D



# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

## Problemi di verifica

Calcolo di verifica richiede di conoscere:

ad ogni nodo  $j$ :

- La quota geodetica  $z_j$
- La portata  $Q_j$  (positiva se immessa, negativa se erogata)

ad ogni lato  $i$ :

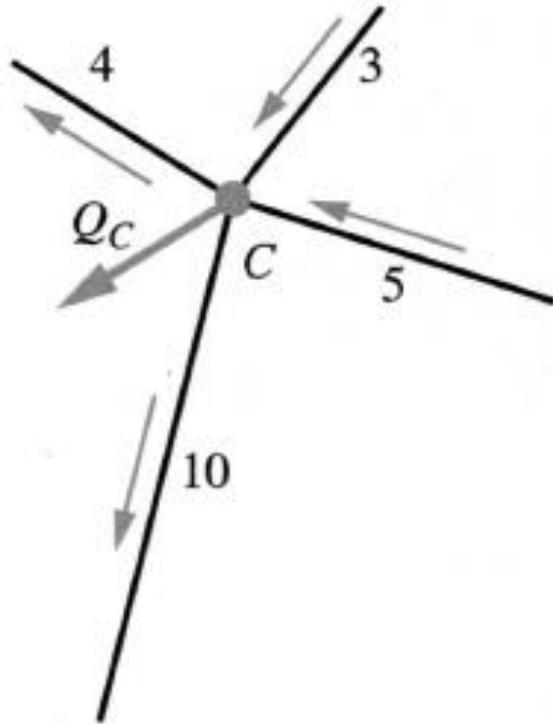
- La lunghezza  $L_i$
- Il diametro  $D_i$
- L'indice di scabrezza  $\varepsilon_i$

L'incognita del sistema è  $H_j$  ai nodi, e  $Q_i$  ai lati, le prime possono essere determinate una volta note le seconde. Richiede la soluzione di un sistema di equazioni alcune delle quali non lineari.

Principi di analisi:

- La conservazione della massa deve essere rispettata ad ogni nodo; ad ogni nodo la somma delle portate in arrivo deve essere uguale a quelle in uscita.
- La perdita di carico tra due nodi deve essere la stessa per tutti i possibili percorsi esistenti tra i due nodi – per qualunque maglia la somma algebrica delle perdite di carico è nulla.

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE



**Primo principio**

$$\sum Q_i = 0$$

Equazione di continuità ai nodi, la somma delle portate entranti al nodo (positive) con quella delle portate uscenti (negative) deve essere nulla.

$$Q_5 + Q_3 - Q_4 - Q_{10} - Q_C = 0$$

# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

## Secondo principio

Per lato  $i$  che congiunge nodo  $j$  al nodo  $j+1$ :  $H_j - H_{j+1} = J_i L_i$

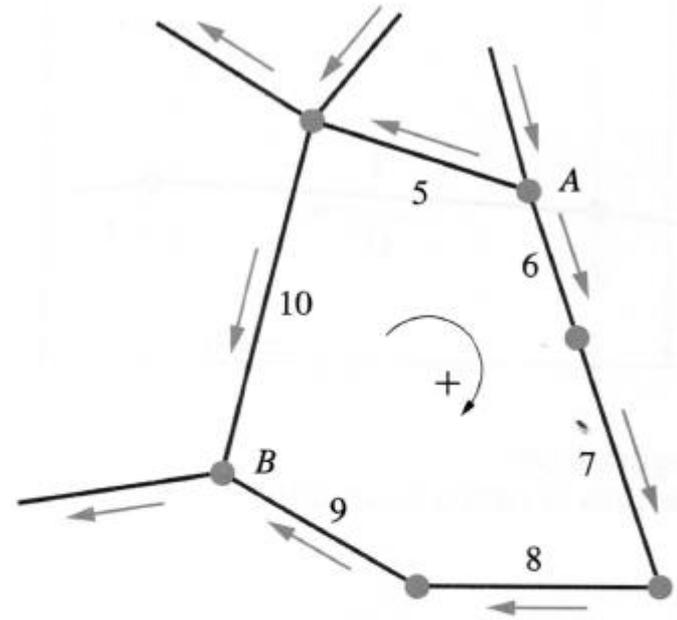
considero solo le perdite continue,  
per Darcy-Weisbach:

$$H_j - H_{j+1} = \frac{8L_i}{g\pi^2 D_i^5} \lambda_i Q_i^2 = \beta_i \lambda_i Q_i^2$$

Per la generica maglia avremo:

$$\sum \Delta H_i = \sum \beta_i \lambda_i Q_i^2 = 0$$

Avendo definito un verso di movimento e considerato segno positivo se la portata si muove in modo concorde al verso di orientamento, e segno negativo in caso opposto.



$$\begin{aligned} H_A - H_B &= J_5 L_5 + J_{10} L_{10} = \\ &= J_6 L_6 + J_7 L_7 + J_8 L_8 + J_9 L_9 \end{aligned}$$

$$J_6 L_6 + J_7 L_7 + J_8 L_8 + J_9 L_9 - J_{10} L_{10} - J_5 L_5 = 0$$

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

**Sistema di verifica per una maglia:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum Q_i = 0 \\ \sum \Delta H_i = \sum \beta_i \lambda_i Q_i^2 = 0 \end{array} \right.$$

In aggiunta per la scabrezza  $\lambda_i(Q_i, Re)$  Formula di Colebrook

N incognite H ai nodi  
L incognite Q ai lati

} N+L incognite

N equazioni dal primo principio ai nodi  
L equazioni ai lati del tipo  $\Delta H = JL$

} N+L equazioni

SISTEMA  
RISOLVIBILE

Nota: per la risoluzione del sistema e semplificare il problema abbiamo ipotizzato che il fluido sia ovunque puramente turbolento, esponente per la portata  $n=2$ .

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

### Problemi di progetto

Le incognite in questo caso sono i carichi  $H$  ai nodi e per i lati le portate transitanti  $Q$  ed i diametri  $D$ . Si utilizzano i due principi evidenziati precedentemente.

$N$  incognite  $H$  ai nodi  
 $L$  incognite  $Q$  ai lati  
 $L$  incognite  $D$  ai lati

}  $N+2L$  incognite

SISTEMA  
INDETERMINATO

$N$  equazioni dal primo principio ai nodi  
 $L$  equazioni ai lati del tipo  $\Delta H = JL$

}  $N+L$  equazioni

Caso di **calcolo di progetto** anziché **calcolo di verifica** → problema indeterminato  
Il numero di equazioni è inferiore al numero di incognite

Si riduce la complessità considerando un numero limitato di diametri disponibili.  
Per arrivare ad una soluzione si adottano principi di natura economica, scegliendo tra le molteplici possibilità quella che comporta un costo minore a parità delle altre condizioni.

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

Principio di minima passività, con passività la spesa necessaria annualmente per mantenere il sistema.

La passività è data dalla somma della quota di ammortamento del capitale impiegato per realizzare l'impianto e degli interessi maturati sul capitale, del costo di manutenzione e del costo di esercizio.

Passività o costo annuo per unità di lunghezza  $C_A$ :

$$C_A = rC_T + C_E$$

$C_T$  il costo della tubazione (costo reale e messa in opera),  $r$  la quota di ammortamento/manutenzione,  $C_E$  il costo di esercizio.

Il costo della messa in opera in generale è costante, mentre il costo reale della tubazione dipende dalla classe della tubazione (in termini di pressioni di esercizio). Nel caso di tubazioni appartenente alla stessa classe il costo dipende dal diametro:

$$C_T = c_0 + c_1 D^c$$

I coefficienti variano a seconda del tipo di tubo e della classe di pressione.

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

Costo di esercizio, dipende dalla presenza o meno di macchine e quindi dal consumo di energia elettrica.

$$C_E = \eta c_k E_d = \frac{1}{3600} \eta c_k \int_{t_A} P_d dt$$

Con

$\eta$  il rendimento della macchina

$c_k$  il costo del chilowattora

$E_d$  l'energia [kWh] dissipata in un anno per unità di lunghezza

$P_d$  la potenza dissipata [kW]

$t_A$  l'intervallo di tempo anno [s]

La potenza dissipata è data dalla portata in peso  $\rho g Q$  per la perdita di carico unitaria  $J$ . Consideriamo una formula pratica di tipo monomio

$$J = k \frac{Q^m}{D^n}$$

Considero  $m=2$  moto puramente turbolento

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

Sostituendo:

$$P_d = \frac{1}{1000} \rho g Q J = \frac{1}{1000} \rho g Q k \frac{Q^2}{D^n} = \frac{1}{1000} \rho g k \frac{Q^3}{D^n}$$

Riconsiderando il costo di esercizio:

$$C_E = \frac{1}{3,6} 10^{-6} \eta c_k \frac{\rho g k}{D^n} \int_{t_A} Q^3 dt$$

Nota: per  $m=2$  nella formula monomia ho il caso limite  $n=5,33$  (Gauckler-Strickler)

Ho riformulato i costi di manutenzione e esercizio in termini di diametro D e portate Q.  
Integro il mio sistema di soluzione con tante condizioni di passività quanti sono i gradi di indeterminatezza.

$$\text{Sistema di progetto: } \left\{ \begin{array}{l} \sum Q_i + Q_j = 0 \\ \sum \Delta H_i = \sum \beta_i \lambda_i Q_i^2 = 0 \\ C_A = r C_T + C_E \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} C_T = c_0 + c_1 D^c \\ C_E = \frac{1}{3,6} 10^{-6} \eta c_k \frac{\rho g k}{D^n} \int_{t_A} Q^3 dt \end{array} \right.$$

In aggiunta per la scabrezza  $\lambda_i(Q_i, Re)$  Formula di Colebrook

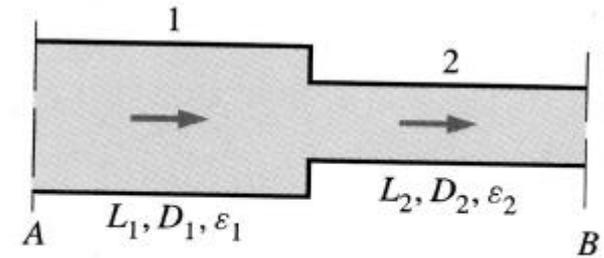
# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

## Condotte in serie

Serie di tubazioni collegate in serie, la portata si mantiene costante. La perdita di carico totale è dato dalla sommatoria delle perdite di carico in ciascuna tubazione.

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$

$$\Delta H = J_1 L_1 + J_2 L_2 + \dots + J_n L_n$$



$$Q_1 = Q_2$$

$$\Delta H_{AB} = J_1 L_1 + J_2 L_2$$

## Condotte in parallelo

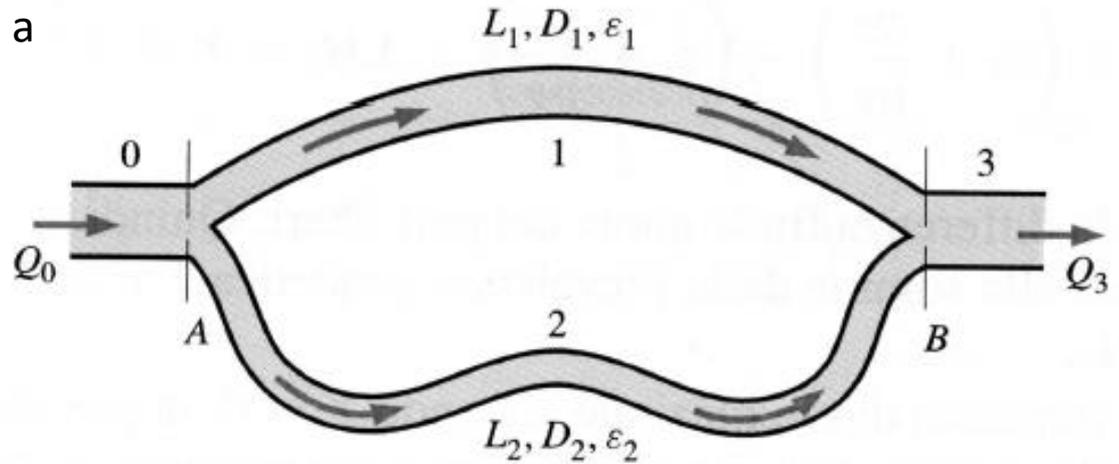
Per tubazione che si divide in due o più rami paralleli e poi si riuniscono a valle in un nodo, la portata totale è data dalla somma delle portate delle singole tubazioni. La perdita di carico è la stessa in ciascuna tubazione in parallelo, dato che congiungono due nodi che sono in comune a tutti i rami.

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

A prescindere dal percorso da A a B il carico in B non può essere diverso:

$$\Delta H_1 = \Delta H_2$$

$$\lambda_1 L_1 \frac{V_1^2}{2gD_1} = \lambda_2 L_2 \frac{V_2^2}{2gD_2}$$



Il rapporto tra le portate

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{A_1 V_1}{A_2 V_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \sqrt{\frac{\lambda_2 L_2 D_1}{\lambda_1 L_1 D_2}} = \sqrt{\frac{\lambda_2 L_2 D_1^5}{\lambda_1 L_1 D_2^5}}$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$\Delta H_{AB} = J_1 L_1 = J_2 L_2$$

Dati n rami in parallelo la portata della tubazione i-esima:

$$Q_i = Q_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 L_1 D_i^5}{\lambda_i L_i D_1^5}} \quad \longrightarrow \quad Q = \sum_{i=1}^n Q_i \quad \longrightarrow \quad Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{\frac{\lambda_1 L_1}{D_1^5} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{D_i^5}{\lambda_i L_i}}}}$$

Eq. Continuità ai nodi

# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

## Metodo di Cross

Caso di maglia chiusa con erogazione ai nodi

Considero noti:

- La portata  $Q_0$  immessa ed il carico  $H_0$
- Le portate  $Q_j$  erogate ai nodi
- Le caratteristiche dei lati, lunghezza, diametri, scabrezza

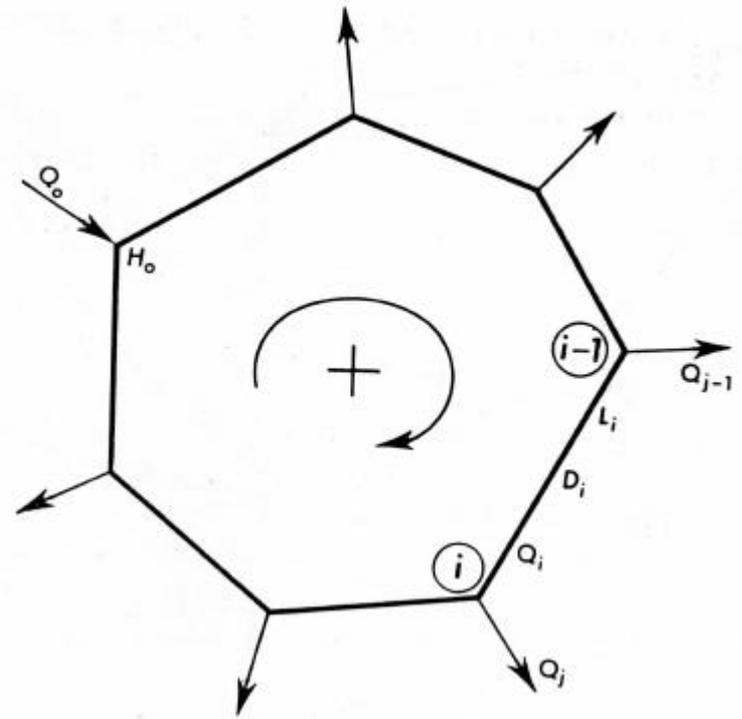
Incognite:

- I carichi  $H_j$  ai nodi
- Le portate  $Q_i$  ai lati

Equazioni disponibili:

ai nodi 
$$\sum Q_i + Q_j = 0 \quad \text{con} \quad Q_0 = \sum_1^{n-1} Q_j$$

Nella maglia 
$$\sum \beta_i Q_i^2 = 0$$



## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

Considero una soluzione di tentativo  $Q_i'$  che verifichi la continuità ai nodi

$$\sum Q_i' + Q_j = 0$$

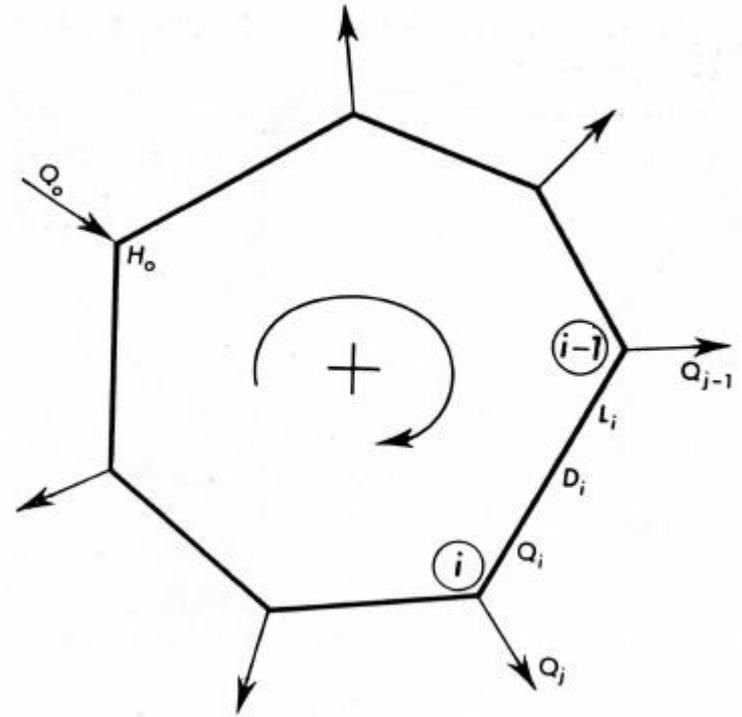
Andando a verificare la soluzione di tentativo  $Q_i'$  con l'equazione della maglia otterrò

$$\sum \beta_i Q_i'^2 \neq 0$$

Ipotesizzo che la soluzione di tentativo  $Q_i'$  differisca da  $Q_i$  di una quantità  $Q_e$  con  $Q_e < Q_i'$

$$Q_i = Q_i' + Q_e$$

Siccome  $Q_i'$  soddisfa l'equazione di continuità, necessariamente la quantità  $Q_e$  deve risultare costante nell'intera maglia per mantenere il rispetto dell'equazione di continuità, risulta una portata che circonda la maglia nel verso di percorrenza che abbiamo scelto.



## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – RETI DI DISTRIBUZIONE

Pertanto per il primo principio risulta

$$\sum (Q'_i + Q_e) + Q_j = 0$$

Mentre per il secondo principio avremo

$$\sum \beta_i (Q'_i + Q_e)^2 = 0$$

$$\sum \beta_i (Q_i'^2 + 2Q_i'Q_e + Q_e^2) = 0$$

Se per ipotesi  $Q_e < Q_i'$  allora  $Q_e^2 \ll Q_i'^2$

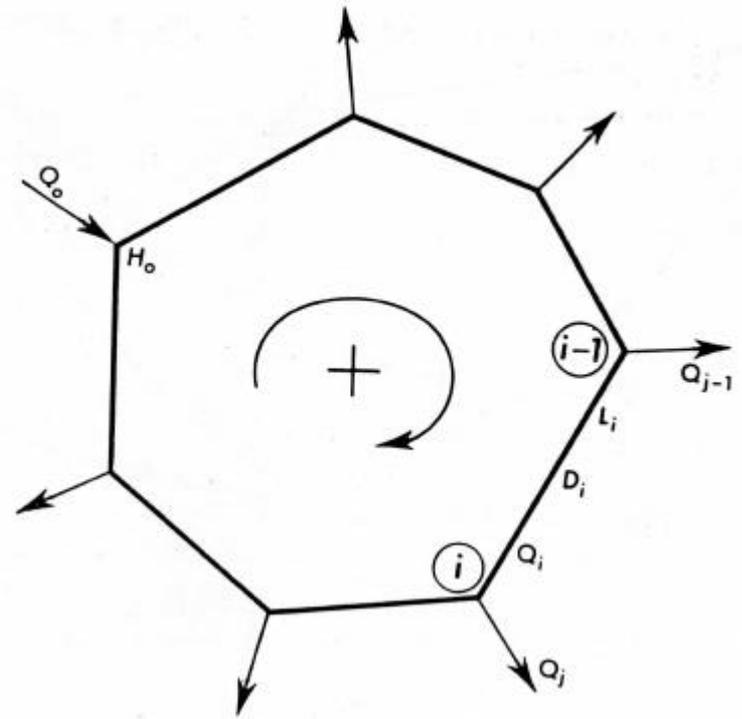
$$\sum \beta_i (Q_i'^2 + 2Q_i'Q_e + \cancel{Q_e^2}) = 0$$

Pertanto posso calcolare  $Q_e$  come

$$Q_e = -\frac{\sum \beta_i Q_i'^2}{2 \sum \beta_i Q_i'}$$

Otteniamo una nuova soluzione

$$Q_i'' = Q_i' + Q_e$$



Itero il processo fino ad ottenere una soluzione che soddisfi entrambi i principi

# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (VERIFICA)

## Verifica – due serbatoi

Consideriamo una lunga condotta a dislivello costante che congiunge due serbatoi a superficie libera.

Sono note  $L$ ,  $D$  e scabrezza, tipologie di problemi:

- Noto il dislivello  $Y$  tra due superfici libere calcolare la portata  $Q$  che viene convogliata
- Nota la portata  $Q$  che viene convogliata determinare il dislivello  $Y$  tra le due superfici.

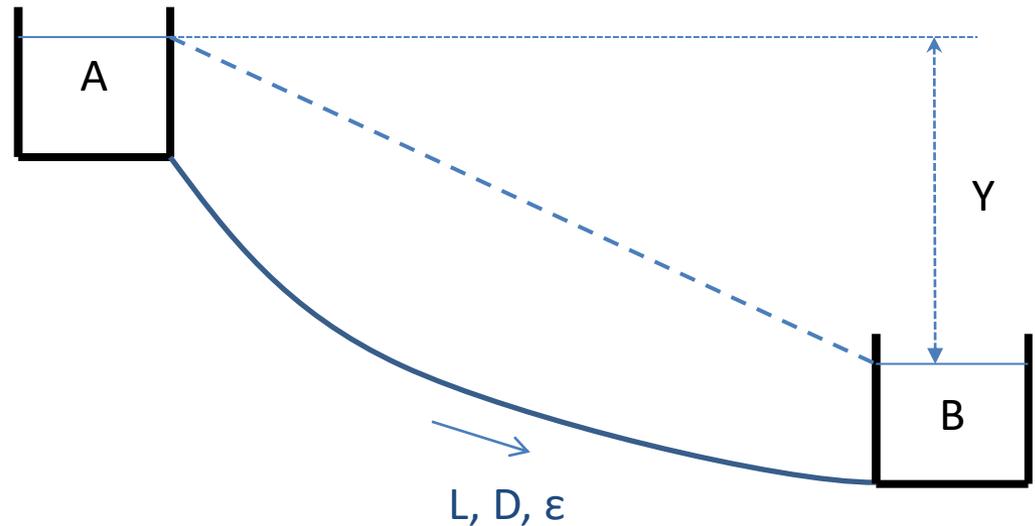
Dalle assunzioni fatte l'intero dislivello si trasforma in perdite continue

$$Y = JL$$

Usando le formule monomie

$$Y = JL = k \frac{Q^2}{D^n} L$$

$$J = \frac{Y}{L} = k \frac{Q^2}{D^n} \quad Q = \sqrt{\frac{JD^n}{k}}$$



## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (VERIFICA)

### Verifica a invecchiamento – due serbatoi

Problema legato alla progressivo incrostamento della tubazione e al conseguente aumento della scabrezza.

I calcoli di progetto vanno fatti per tubatura usata, con valore di scabrezza massimo che il tipo di tubazione può assumere → bisogna verificare il sistema quando funzionerà con tubature nuove.

Sia  $Q_N$  la portata a tubatura nuova e  $Q_U$  a tubatura usata abbiamo  $Q_N > Q_U$  essendo  $Y$  costante. Il coefficiente  $k$  è crescente con la scabrezza avremo:

$$\frac{Q_N}{Q_U} = \sqrt{\frac{k_U}{k_N}}; \quad k_U = 2k_N \quad \rightarrow \quad Q_N = \sqrt{2}Q_U$$

ipotesi

La condizione a tubi nuovi richiederebbe che il serbatoio di alimentazione abbia un immissione di portata  $Q_A > Q_N$ . Di norma è invece vero che  $Q_A \geq Q_U$ .

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (VERIFICA)

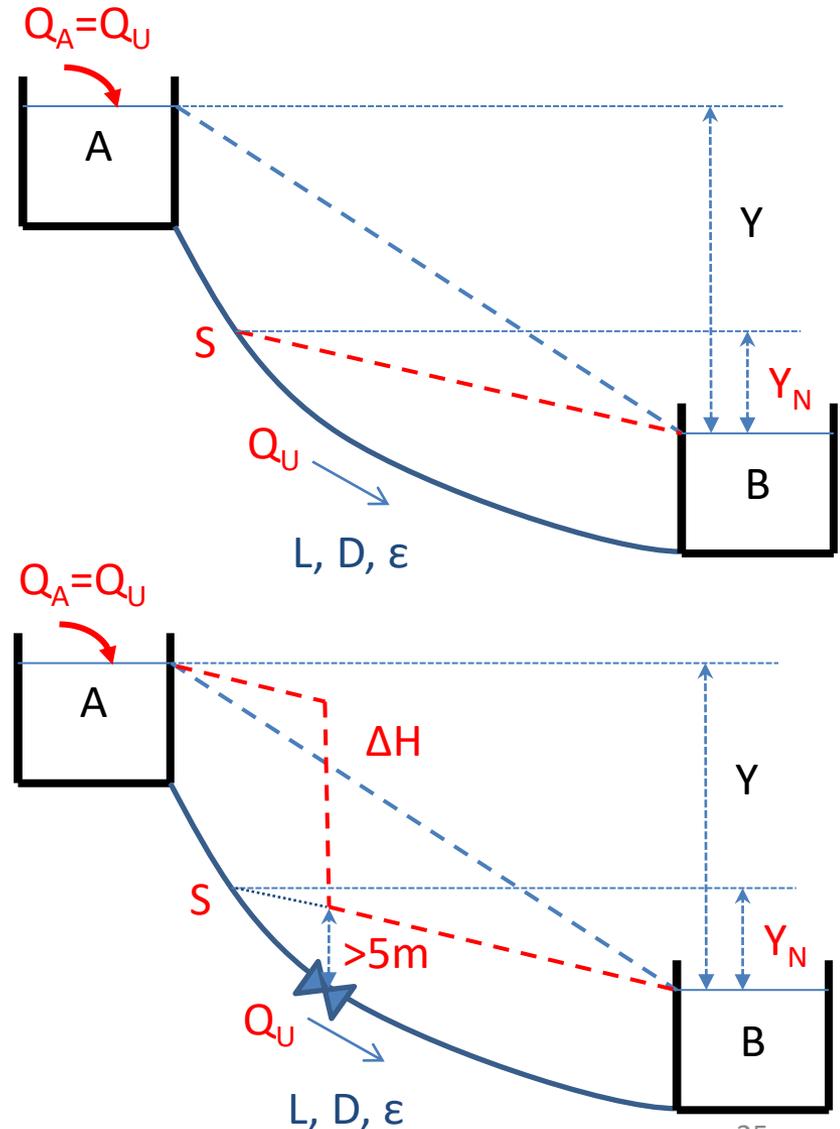
Se  $Q_A < Q_N$  il serbatoio inizierà a svuotarsi → diminuisce  $Y$  quindi  $J$  e di conseguenza  $Q_N$  fino ad una condizione stazionaria  $Q = Q_A = Q_U$

$$J_N = \frac{Y_N}{L} = k_N \frac{Q_U^2}{D^n}$$

Si può arrivare ad una condizione in cui la linea piezometrica taglia la condotta in una sezione  $S$  → a monte della sezione abbiamo deflusso a pelo libero.

Nel caso di trasporto di acqua potabile è una condizione da scongiurare, per il potenziale ingresso di inquinanti dall'esterno → inserisco una perdita locale (valvola regolabile) a valle rispetto alla sezione  $S$

$$\Delta H = Y - J_N L = Y - \frac{k_N Q_U^2}{D^n} L$$



# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (VERIFICA)

## Verifica - 3 serbatoi

Consideriamo note le quote dei peli liberi dei serbatoi, i diametri le lunghezze e le scabrezze delle condotte

→ calcolare la portata nei tre lati ed il carico al nodo M.

**4 incognite  $H_M, Q_1, Q_2, Q_3$**

Nuovamente richiamiamo le reti di distribuzione per cui al nodo e sui lati valgono:

$$\sum Q_i + Q_j = 0$$

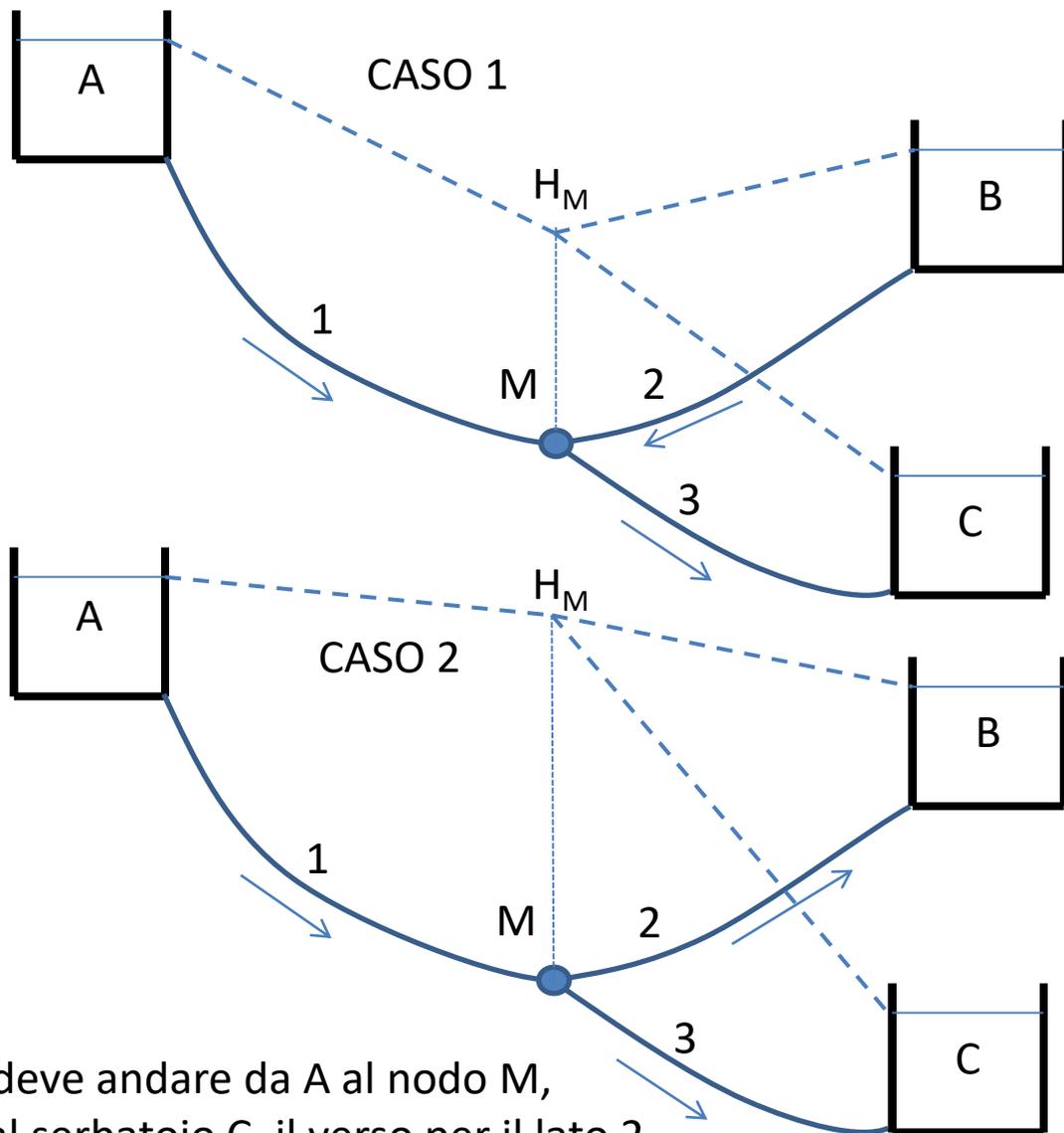
$$H_j - H_{j+1} = J_i L_i$$

4 equazioni → sistema risolvibile

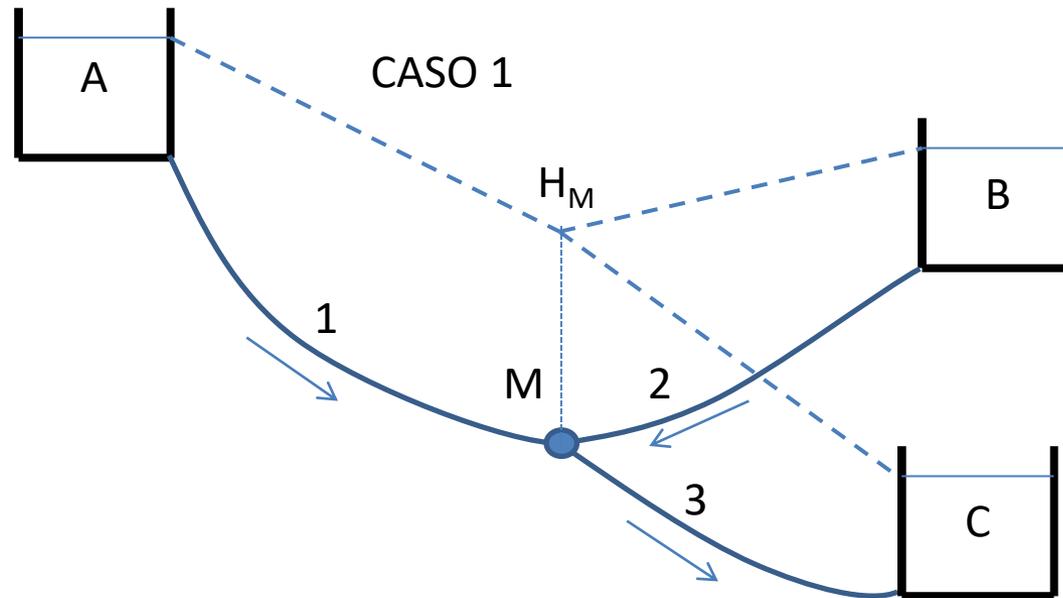
**Definire il verso.** Per il lato A il flusso deve andare da A al nodo M, per il lato 3 deve andare dal nodo M al serbatoio C, il verso per il lato 2 non è noto a priori.

caso 1:  $H_M < z_B$  → verso dal serbatoio B al nodo M

caso 2:  $H_M > z_B$  → verso dal nodo M al serbatoio B



## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (VERIFICA)



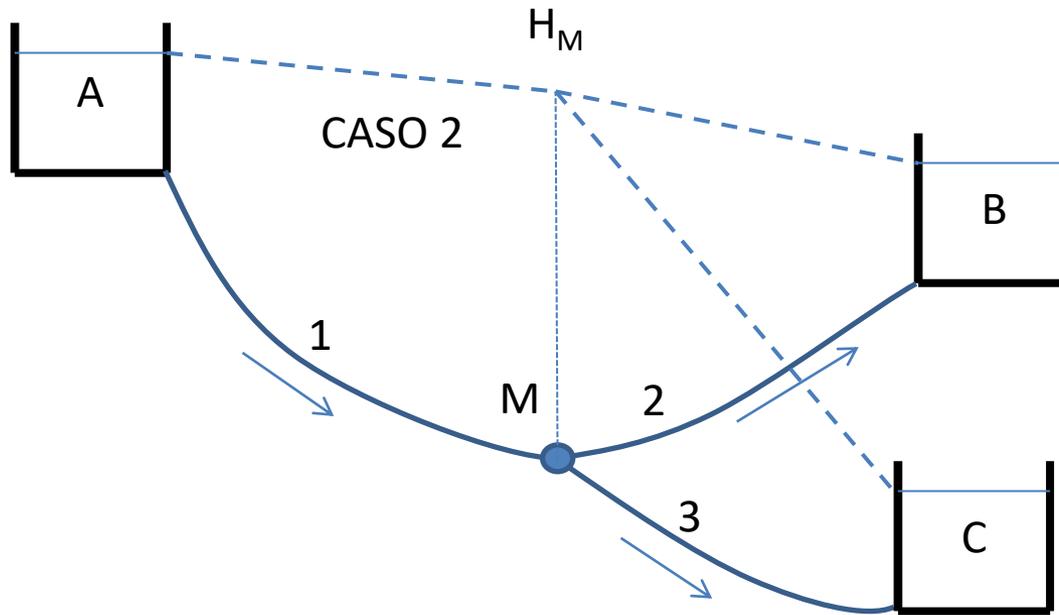
Caso 1 abbiamo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} z_A - H_M = J_1 L_1 = \beta_1 Q_1^2 \\ z_B - H_m = J_2 L_2 = \beta_2 Q_2^2 \\ H_M - z_C = J_3 L_3 = \beta_3 Q_3^2 \\ Q_1 = Q_2 + Q_3 \end{array} \right.$$

Con  $\beta = kD^{-n}L$  dalle  
formule monomie

Se l'ipotesi è sbagliata non si ottiene un valore reale per  $Q_2$

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (VERIFICA)



Caso 2 abbiamo il sistema

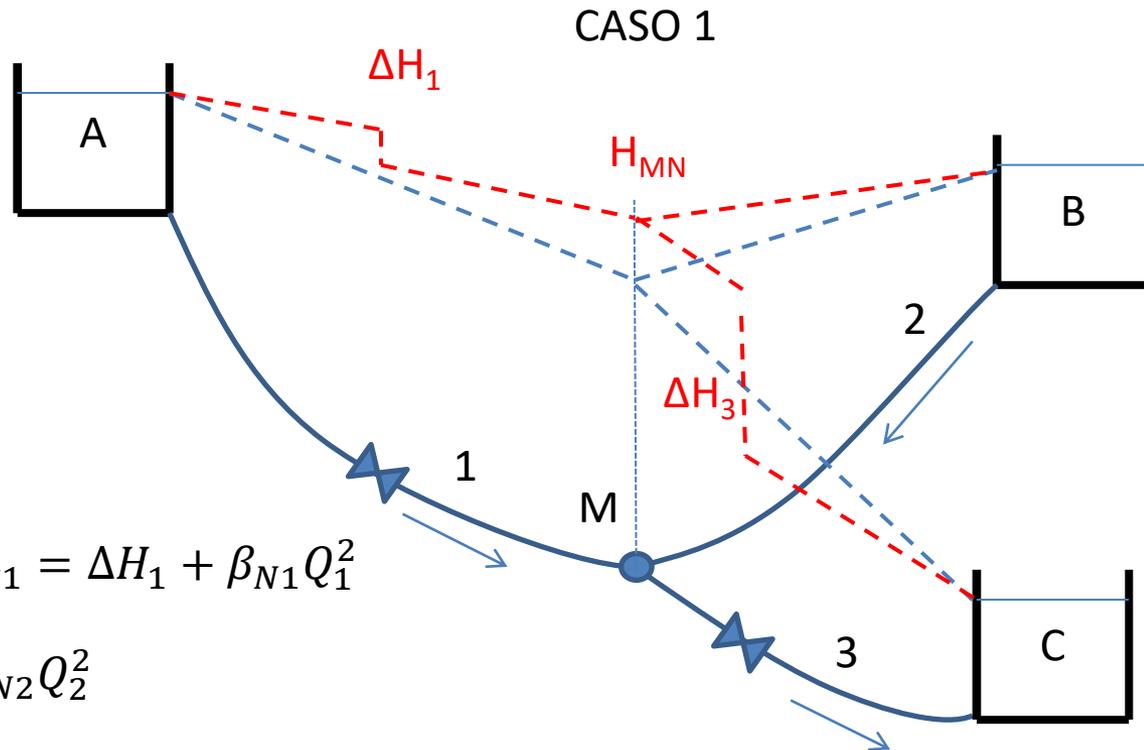
$$\left\{ \begin{array}{l} z_A - H_M = J_1 L_1 = \beta_1 Q_1^2 \\ H_M - z_B = J_2 L_2 = \beta_2 Q_2^2 \\ H_M - z_C = J_3 L_3 = \beta_3 Q_3^2 \\ Q_1 = Q_2 + Q_3 \end{array} \right.$$

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (VERIFICA)

### Verifica a tubi nuovi - 3 serbatoi

Ad inizio di funzionamento, l'impianto deve operare in regime di esercizio. Consideriamo note le portate di progetto, vanno determinate le perdite di carico indotte dalle valvole.

Analogamente al caso di collegamento semplice di collegamento tra due serbatoi, al lato 1 va inserita una valvola che dissipi il carico  $\Delta H_1$ , e permetta alla piezometrica dal nodo M di risalire alla quota del serbatoio A.



$$\text{Lato 1} \quad z_A - H_{MN} = \Delta H_1 + J_{N1}L_1 = \Delta H_1 + \beta_{N1}Q_1^2$$

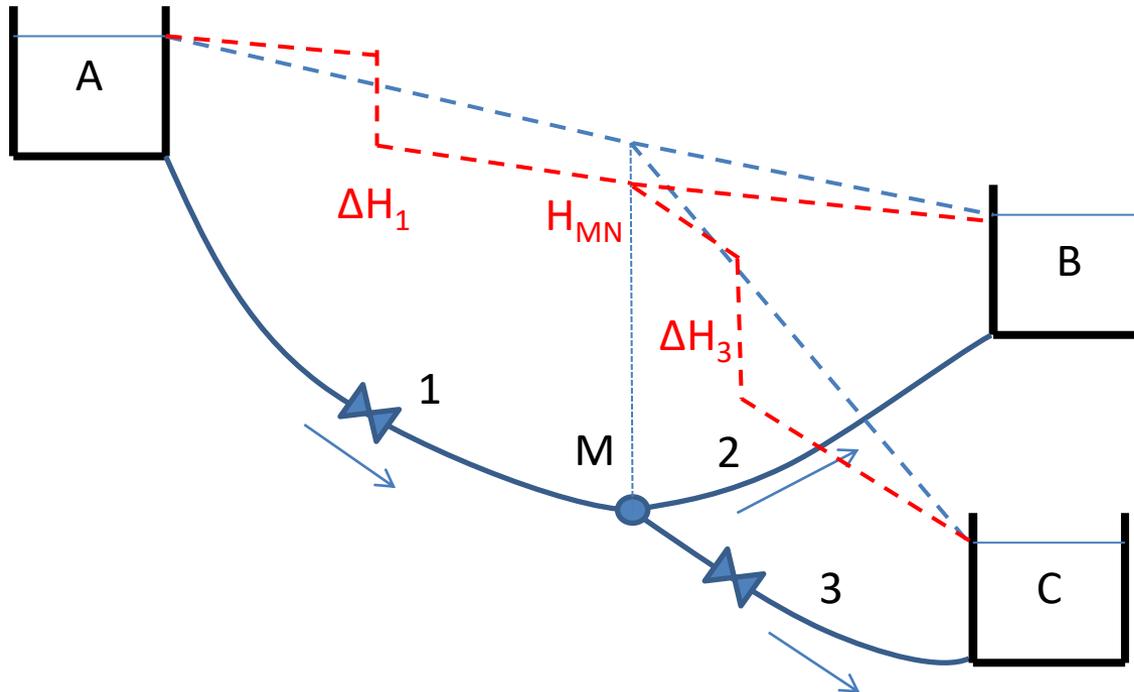
$$\text{Lato 2} \quad z_B - H_{MN} = J_{N2}L_2 = \beta_{N2}Q_2^2$$

$$\text{Lato 3} \quad H_{MN} - z_C = \Delta H_3 + J_{N3}L_3 = \Delta H_3 + \beta_{N3}Q_3^2$$

Ottengo  $H_{MN}$ ,  $\Delta H_1$  e  $\Delta H_3$

# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (VERIFICA)

## CASO 2



Lato 1  $z_A - H_{MN} = \Delta H_1 + J_{N1}L_1 = \Delta H_1 + \beta_{N1}Q_1^2$

Lato 2  $H_{MN} - z_B = J_{N2}L_2 = \beta_{N2}Q_2^2$

Lato 3  $H_{MN} - z_C = \Delta H_3 + J_{N3}L_3 = \Delta H_3 + \beta_{N3}Q_3^2$

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (PROGETTO)

### Dimensionamento – due serbatoi

Di norma il sistema per una condizione di progetto è indeterminato e servono condizioni aggiuntive. Fa eccezione il caso di due serbatoi collegati da condotta.

Nota la differenza di quota tra i serbatoi e la lunghezza della condotta  $L \rightarrow J=Y/L$   
Rimane il calcolo del diametro da assegnare a tubazione di scabrezza nota perché convogli la portata  $Q$  con cadente  $J$

Ricorrendo a formule pratiche, in ipotesi di moto puramente turbolento

$$D = \left( k \frac{Q^2}{J} \right)^{1/n}$$

Trovato il diametro teorico  $D \rightarrow$  diametro commerciale immediatamente superiore  $D_1$

Ne segue  $J_1 < J$  ed è necessario inserire una valvola per dissipare il carico residuo.

Usare un diametro  $D_2$  inferiore porterebbe ad avere una portata minore.

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (PROGETTO)

### Soluzione alternativa

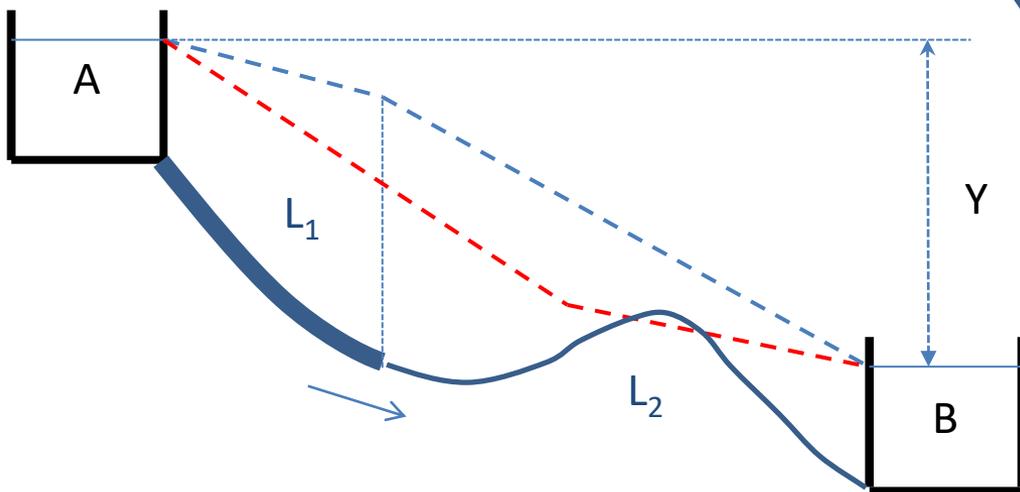
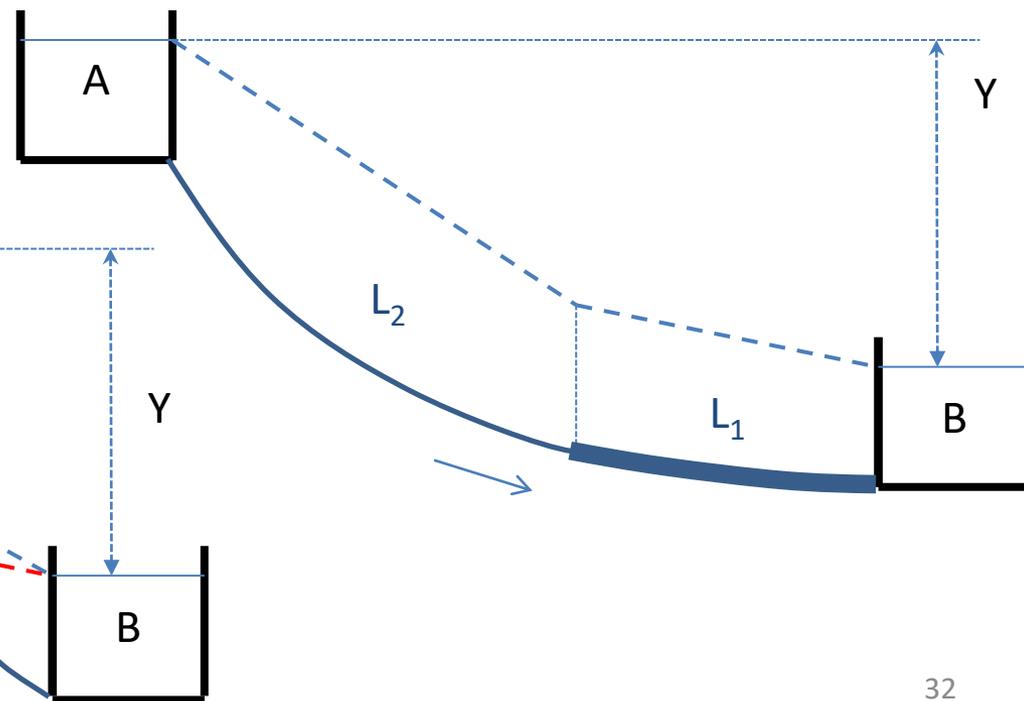
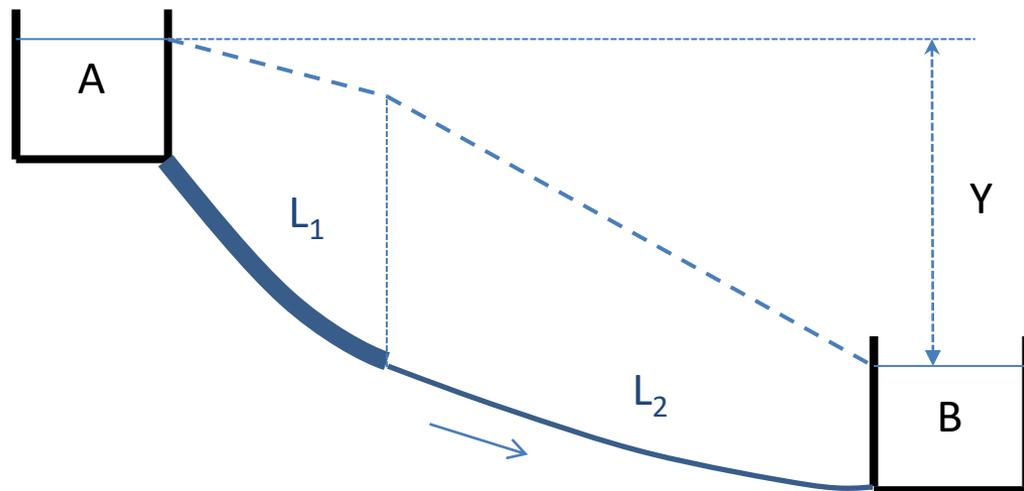
Usare sia il diametro  $D_1$  che  $D_2$  con opportuni tratti di tubazione per dare una perdita complessiva pari a  $Y$

$L_1$  con  $D_1 > D$        $L_2$  con  $D_2 < D$

Per determinare le lunghezze

$$J_1 L_1 + J_2 L_2 = Y \quad L_1 + L_2 = L$$

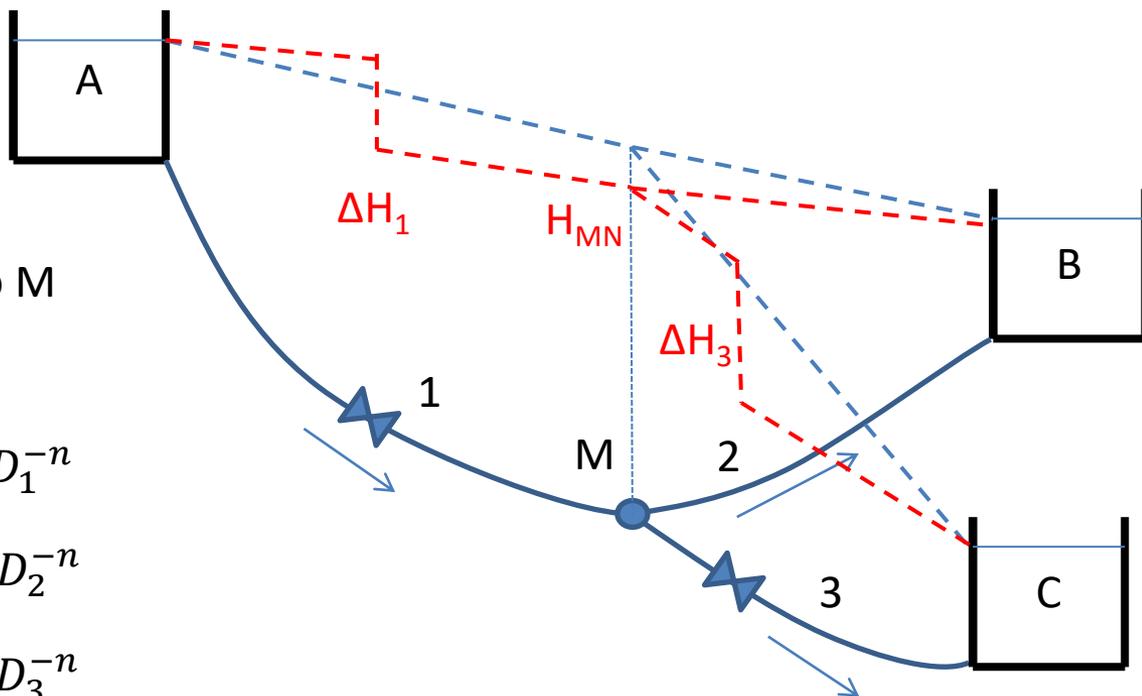
Economicamente ha senso solo se non  $L_1 \ll L_2$  o viceversa



# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (PROGETTO)

## Dimensionamento – tre serbatoi

Noti portate e lunghezze dei 3 lati e i carichi ai serbatoi, incognite diametri e carico al nodo M



$$z_A - H_M = J_1 L_1 = \beta_1 Q_1^2 = \alpha_1 D_1^{-n}$$

$$H_M - z_B = J_2 L_2 = \beta_2 Q_2^2 = \alpha_2 D_2^{-n}$$

$$H_M - z_C = J_3 L_3 = \beta_3 Q_3^2 = \alpha_3 D_3^{-n}$$

~~$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$~~

con  $\alpha_i = k Q_i^2 L_i$

3 equazioni per 4 incognite. Mi appoggio al principio di minima passività

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (PROGETTO)

Passività data dalla somma delle passività di tutti i lati che insistono sul nodo

$$C_A = rC_T + C_E$$

$$C_T = c_0 + c_1 D^c$$

Ipotesi che le tubazioni siano della stessa classe, per cui  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c$  costanti

$$r(c_0 + c_1 D_1^c)L_1 + r(c_0 + c_1 D_2^c)L_2 + r(c_0 + c_1 D_3^c)L_3 = \min$$



$$D_1 = \left( \frac{\alpha_1}{z_A - H_M} \right)^{1/n}$$

$$z_A - H_M = J_1 L_1 = \beta_1 Q_1^2 = \alpha D_1^{-n}$$

$$rL_1 \left[ c_0 + c_1 \left( \frac{\alpha_1}{z_A - H_M} \right)^{c/n} \right]$$

Derivo rispetto ad  $H_M$

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (PROGETTO)

$$\begin{aligned}
 -rL_1 c_1 \alpha_1^{\frac{c}{n}} \frac{\frac{c}{n} (z_A - H_M)^{\frac{c}{n}-1}}{(z_A - H_M)^{\frac{2c}{n}}} &= -rL_1 c_1 \alpha_1^{\frac{c}{n}} \frac{c}{n} \frac{1}{(z_A - H_M)^{\frac{c}{n}+1}} = \\
 &= -rL_1 c_1 \frac{c}{n} \alpha_1^{\frac{c}{n}-1} \alpha_1 \frac{1}{(z_A - H_M)^{\frac{c}{n}-1}} \frac{1}{(z_A - H_M)^2} = \\
 &= -rL_1 c_1 \frac{c}{n} \frac{1}{\alpha_1} \frac{\alpha_1^{\frac{c}{n}-1}}{(z_A - H_M)^{\frac{c}{n}-1}} \frac{\alpha_1^2}{(z_A - H_M)^2} = -rL_1 c_1 \frac{c}{\alpha_1 n} D_1^{c+n}
 \end{aligned}$$

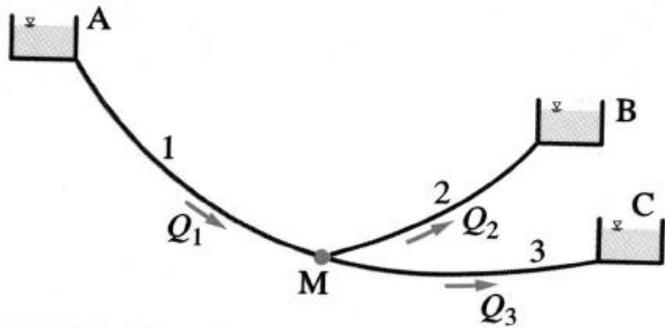
Applico lo stesso metodo agli altri due termini

$$D_1 = \left( \frac{\alpha_1}{z_A - H_M} \right)^{1/n}$$

$$\frac{1}{\alpha_1} L_1 D_1^{c+n} = \frac{1}{\alpha_2} L_2 D_2^{c+n} + \frac{1}{\alpha_3} L_3 D_3^{c+n}$$

# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (PROGETTO)

Sistema risolutivo



$$\left\{ \begin{aligned} z_A - H_M &= J_1 L_1 = \beta_1 Q_1^2 = \alpha_1 D_1^{-n} \\ H_M - z_B &= J_2 L_2 = \beta_2 Q_2^2 = \alpha_2 D_2^{-n} \\ H_M - z_C &= J_3 L_3 = \beta_3 Q_3^2 = \alpha_3 D_3^{-n} \\ \frac{1}{\alpha_1} L_1 D_1^{c+n} &= \frac{1}{\alpha_2} L_2 D_2^{c+n} + \frac{1}{\alpha_3} L_3 D_3^{c+n} \end{aligned} \right.$$

4 equazioni 4 incognite  $\rightarrow D_1 D_2 D_3 H_M$

Generalizzazione della condizione di minima passività:

$$\sum_{n_e} \frac{1}{\alpha_i} L_i D_i^{c+n} = \sum_{n_u} \frac{1}{\alpha_i} L_i D_i^{c+n}$$

Per condotte dello stesso tipo  $k=\text{cost}$  da

$$\frac{\alpha}{L} = kQ^2$$

Si ottiene 
$$\sum_{n_e} \frac{1}{Q_i^2} D_i^{c+n} = \sum_{n_u} \frac{1}{Q_i^2} D_i^{c+n}$$

Portata entrante  
al nodo

Portata uscente  
dal nodo

Rapportata al caso con nodo ad una sola immissione ed una erogazione con portate diverse:

$$\frac{D_e^{c+n}}{Q_e^2} = \frac{D_u^{c+n}}{Q_u^2}$$

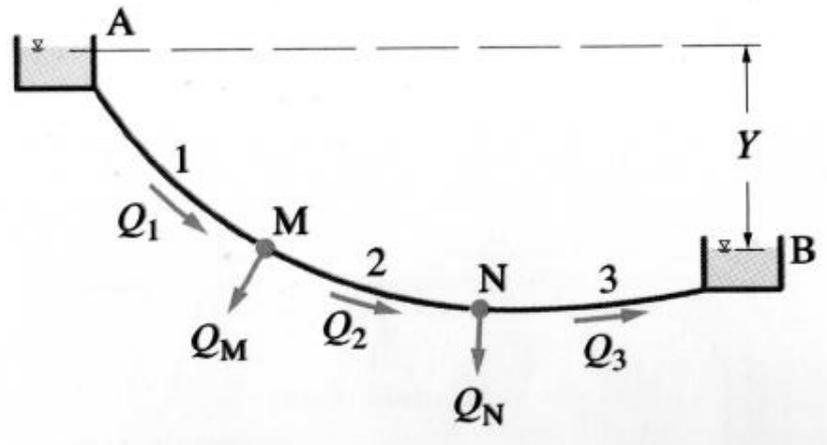
## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – CASI PARTICOLARI (PROGETTO)

Caso due serbatoi con due erogazioni concentrate

$$Y = \alpha_1 D_1^{-n} + \alpha_2 D_2^{-n} + \alpha_3 D_3^{-n} \quad \text{Carichi laterali}$$

$$\frac{D_1^{c+n}}{Q_1^2} = \frac{D_2^{c+n}}{Q_2^2} \quad \text{Nodo M}$$

$$\frac{D_2^{c+n}}{Q_2^2} = \frac{D_3^{c+n}}{Q_3^2} \quad \text{Nodo N}$$



Per caso generale di tubazioni di diverso tipo con valori differenti di scabrezza, e dei parametri di costo  $c_0$  etc., la condizione di minima passività si riscrive come:

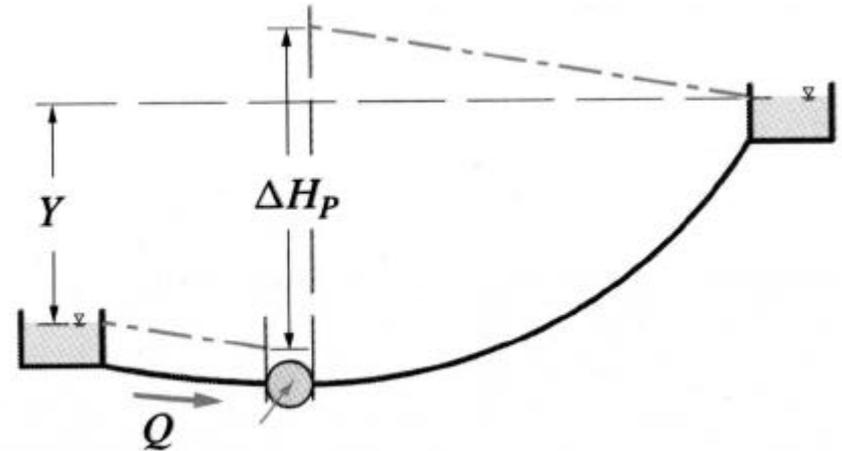
$$\sum_{n_e} \frac{c_{1i} c_i}{\alpha_i n_i} L_i D_i^{c+n} = \sum_{n_u} \frac{c_{1i} c_i}{\alpha_i n_i} L_i D_i^{c+n}$$

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – IMPIANTI DI SOLLEVAMENTO

Dimensionamento impianto di sollevamento

Noti  $L$ ,  $Q$  e prevalenza geodetica  $Y \rightarrow \Delta H_p$

La prevalenza della Pompa deve essere pari alla prevalenza geodetica più le perdite (continue per lunghe condotte)



$$\Delta H_p = Y + JL = Y + k \frac{Q^2}{D^n} L$$

Nota  $\Delta H_p$  permette il calcolo di  $D$

La presenza della sorgente esterna permette di adottare qualsiasi diametro per la tubazione.

Energia dalla pompa tanto maggiore quanto sono le perdite continue e quanto è più piccolo il diametro.

$D$  minore  $\rightarrow$  minor costo tubazione e maggior costo energia

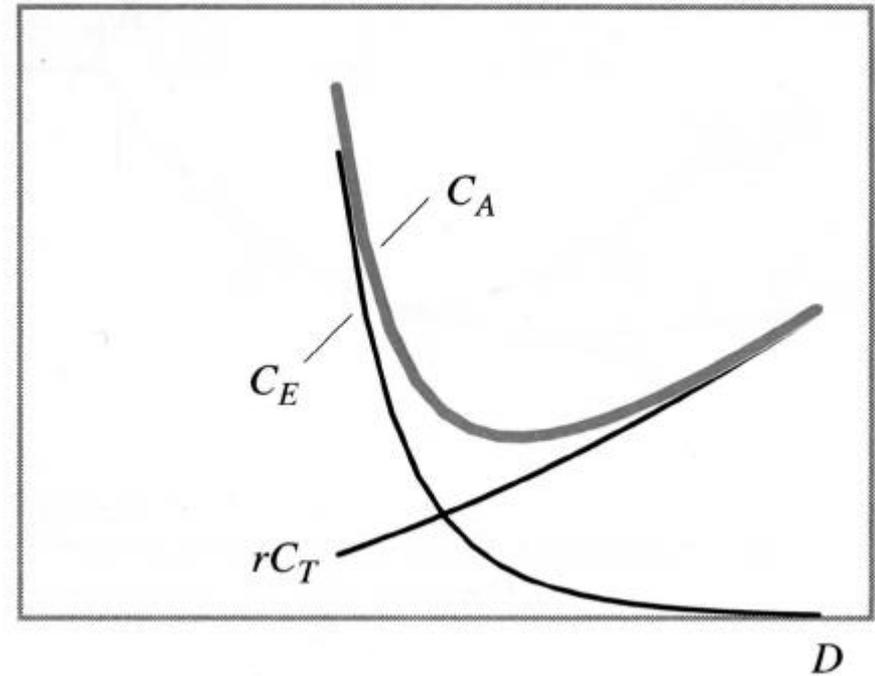
## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – IMPIANTI DI SOLLEVAMENTO

Grafico da

$$C_T = c_0 + c_1 D^c$$

$$C_E = \frac{1}{3,6} 10^{-6} \eta c_k \frac{\rho g k}{D^n} \int_{t_A} Q^3 dt$$

$$C_E = \varphi \overline{Q^3} D^{-n} \quad \text{con} \quad \overline{Q^3} = \frac{1}{T} \int_0^T Q^3 dt$$



All'aumentare del costo di esercizio il minimo si sposta verso i diametri maggiori.

Il costo è funzionale al tempo di funzionamento dell'impianto

- Impianto irrigazione uso 4 mesi/anno → diametri piccoli
- Impianto acquedotto uso continuo → diametri più grandi
- Impianto antincendio → diametri piccoli

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – IMPIANTI DI SOLLEVAMENTO

Per scegliere il migliore diametro secondo il criterio di minima passività:

$$L[r(c_0 + c_1 D^c) + \varphi \overline{Q^3} D^{-n}] = \min$$

Si deriva rispetto a D e si pone =0

$$rLc_1cD^{c-1} = -L\varphi\overline{Q^3}(-n)D^{-n-1}$$

$$rc_1cD^{c-1} = n\varphi\overline{Q^3}D^{-n-1}$$

$$\frac{D^{c-1}}{D^{-n-1}} = D^{c+n} = \frac{n\varphi\overline{Q^3}}{rc_1c}$$

$$D = \left[ \frac{n\varphi\overline{Q^3}}{rc_1c} \right]^{\frac{1}{c+n}}$$

Diametro di massimo tornaconto:

- non dipende dalla lunghezza L della tratta e si può fare riferimenti in termini dei costi per unità di lunghezza
- Diametro maggiore per costi di esercizio maggiori rispetto a quelli delle tubazioni

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – IMPIANTI DI SOLLEVAMENTO

Dipendenza del diametro di massimo tornaconto dalle portate sollevate.

Si consideri due impianti identici con portata  $Q^*$ , uno che funzioni per l'intero anno, mentre l'altro per un tempo  $\alpha T$  con  $\alpha < 1$ . Sarà:

$$\overline{Q^3} = Q^{*3} \quad e \quad \overline{Q^3} = \alpha Q^{*3}$$

Si ha

$$\frac{D_{e2}}{D_{e1}} = \alpha^{\frac{1}{c+n}}$$

Ad impianto 2 conviene utilizzo di diametro minore a parità di portata sollevata.

$$V_e = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{rc_1c}{n\varphi} \right]^{\frac{2}{c+n}} \frac{Q^{*(1-\frac{6}{c+n})}}{\alpha^{2/(c+n)}}$$

La velocità corrispondente al diametro di minima passività viene chiamata *velocità di massimo tornaconto* e sarà funzione del tempo di funzionamento dell'impianto. Ha valori crescenti al diminuire del tempo di funzionamento dell'impianto.

Di norma  $6 < c+n < 7 \rightarrow$  esponente portata è circa zero e la  $V_e$  risulta indipendente dalla portata.

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – IMPIANTI DI SOLLEVAMENTO

il rapporto dei costi di materiale e dell'energia rimane relativamente costante, pertanto fissato il periodo di funzionamento dell'impianto la  $V_e$  è invariante  $\rightarrow V_e$  quantità utile per il dimensionamento di massimo di un impianto.

$V_e$  dell'ordine di qualche metro al secondo per impianti funzionanti tutto l'anno, ha valori inferiori per impianti a funzionamento ridotto.

## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – IMPIANTI DI SOLLEVAMENTO

### Condotte forzate per impianti idroelettrici

Grandi variazioni di pressione e necessità di adottare tubazioni con spessori variabili in funzione delle altezze piezometriche.

Dato un tratto a cui corrisponde l'altezza piezometrica  $h$  il costo della tubazione in termini di altezza piezometrica può essere espresso come

$$C_T = c_0 + c_1 h D^c$$

Avendo usato la formula di Mariotte per il peso  $G$  di un tratto di condotta

$$\gamma_f \pi s D = \gamma \gamma_f \pi \frac{h D^2}{2\sigma} \qquad C_T = c_0 + \frac{c_f \gamma \gamma_f \pi}{2\sigma} h D^2$$

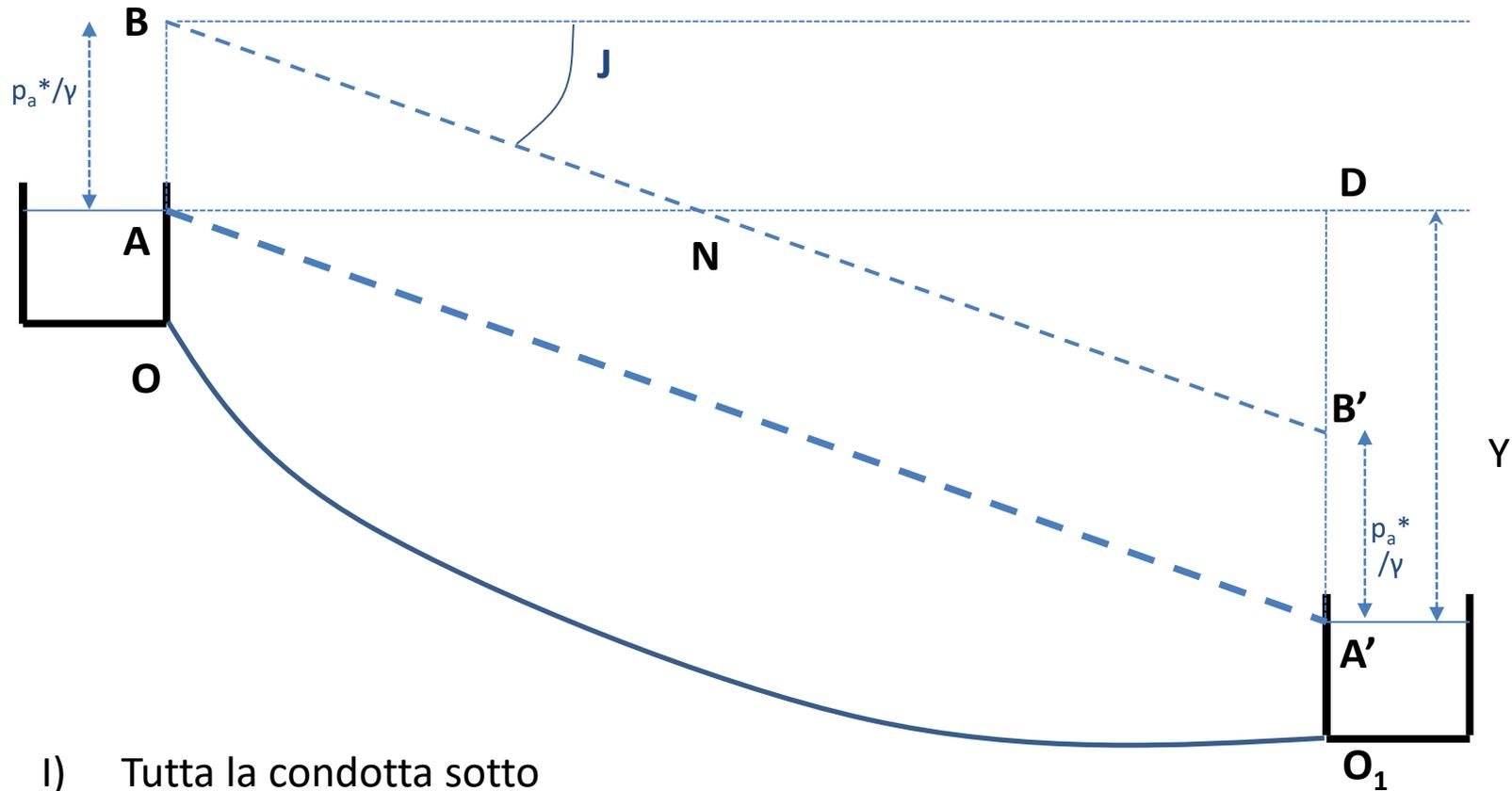
Con  $s$  lo spessore della condotta,  $\gamma_f$  e  $\gamma$  il peso specifico del materiale e del fluido,  $\sigma$  il carico di sicurezza del materiale,  $c_f$  il costo dell'unità di peso del materiale

$$D = \left[ \frac{n \varphi \overline{Q^3}}{r c_1 2} \frac{1}{h} \right]^{\frac{1}{2+n}}$$

Diametro in funzione della piezometrica

# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – TRACCIATI ALTIMETRICI

## TRACCIATO I

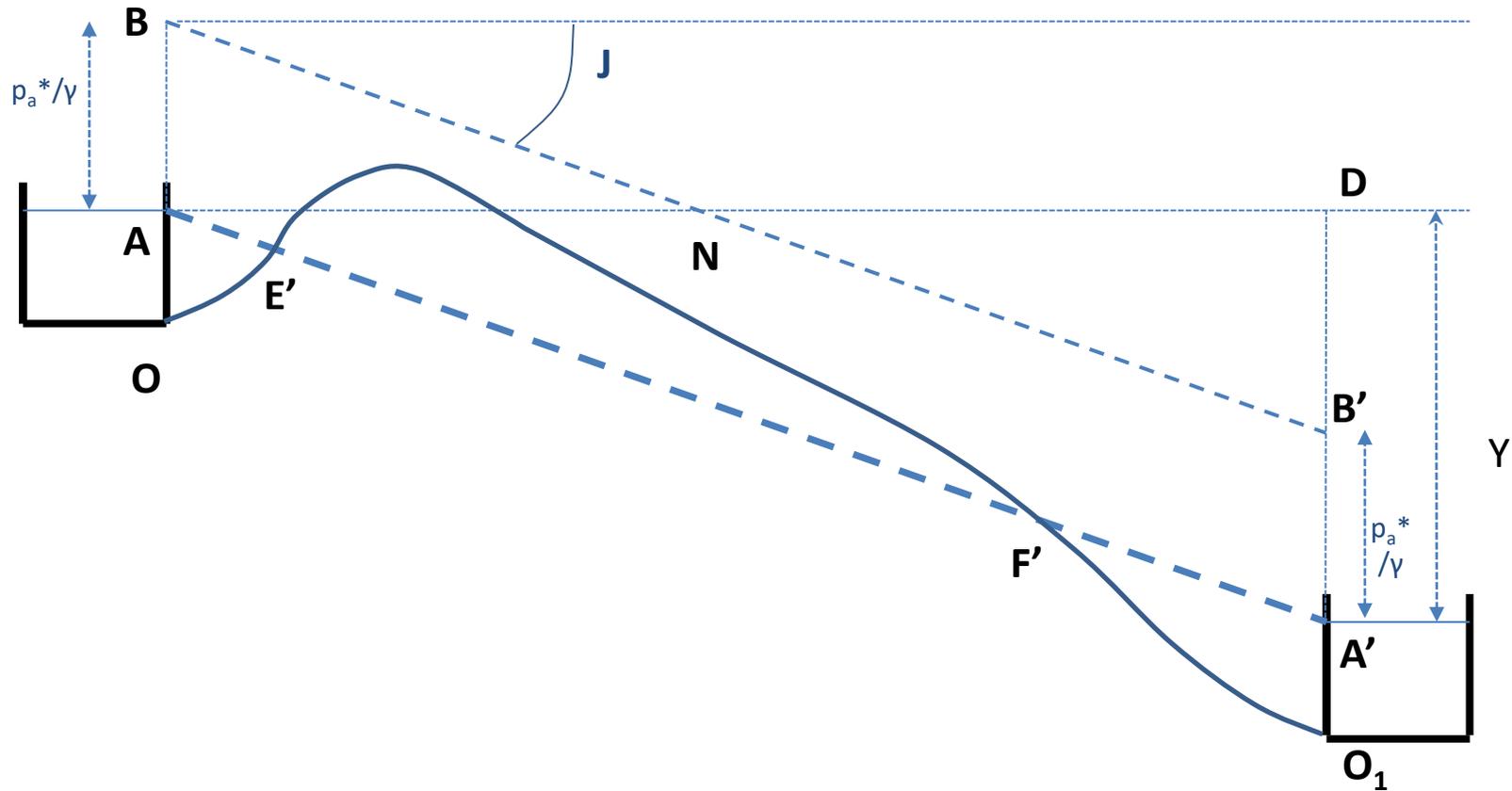


- 1) Tutta la condotta sotto la piezometrica relativa AA', funzionamento regolare.



# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – TRACCIATI ALTIMETRICI

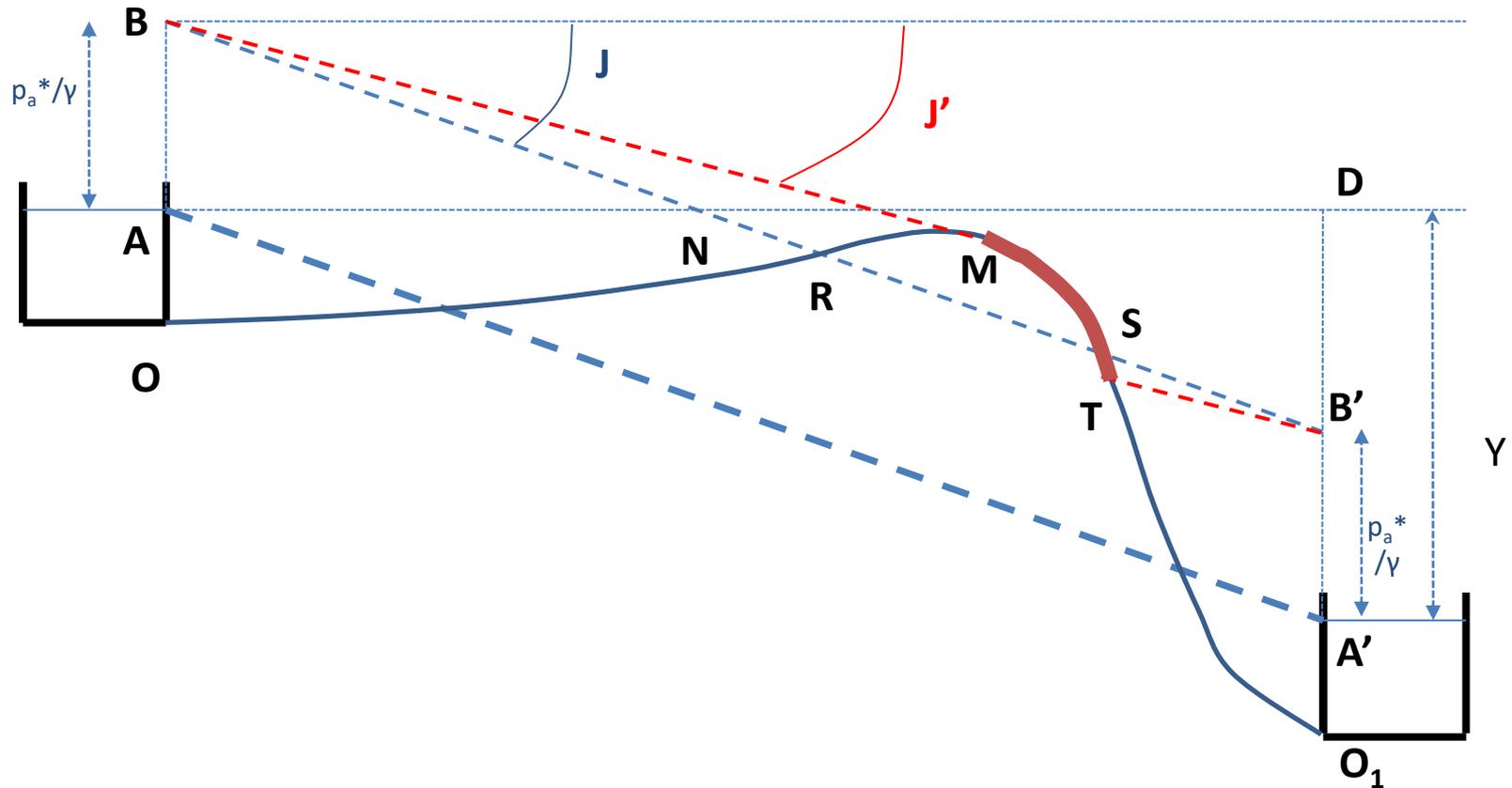
## TRACCIATO III



III) Condotta sotto la piezometrica assoluta ma supera in un tratto i carichi idrostatici in C1. Nel trono E'F' le pressioni assolute sono positive. Siamo in condizioni di moto analoghe a II ma è richiesto l'avviamento.

# CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – TRACCIATI ALTIMETRICI

## TRACCIATO IV

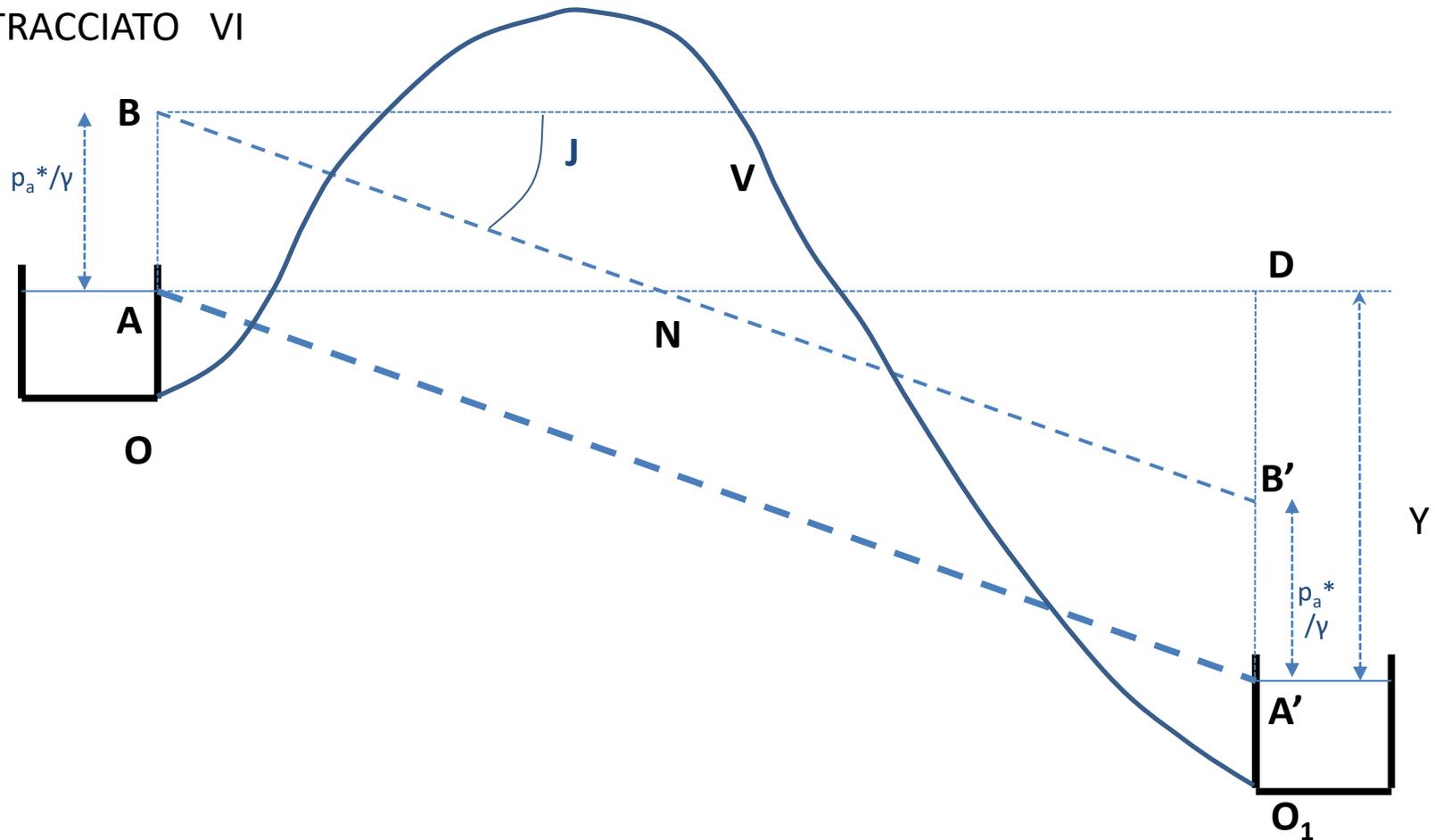


IV) Il tratto RS è superiore alla piezometrica assoluta BB'. Al moto corrispondente una nuova cadente  $J' < J$ . Tratti OM e O<sub>1</sub>T moto in pressione, tratto MT moto a canaletta. Avviamento automatico.



## CORRENTI IN PRESSIONE – LUNGHE CONDOTTE – TRACCIATI ALTIMETRICI

TRACCIATO VI



VI) Parte condotta superiore all'orizzontale per B, non è possibile il moto ed è impossibile l'addescamento.