

IDRAULICA APPLICATA

PARTE 1 – Correnti in pressione

Capitolo 2 – Moto vario

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE

Istante per istante e sezione per sezione variano le grandezze fondamentali, pressione, velocità e portata

MOTO VARIO

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

Linea piezometrica e dei carichi variabile

L'energia specifica non necessariamente si riduce da monte a valle, lungo una traiettoria la particella può aumentare la propria energia meccanica.

Nel moto vario la conservazione dell'energia viene mantenuta globalmente → energia elastica del fluido e della condotta

Il moto vario può essere contraddistinto da zone con aumenti/riduzioni notevoli di pressione velocità e portata.

MOTO PERMANENTE

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

Linea piezometrica e dei carichi costante

Progressiva diminuzione di energia specifica da monte a valle che dipende solo dagli effetti di resistenza

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE

Variazione di portata in una generica sezione si propaga lungo la corrente sotto forma di onda.

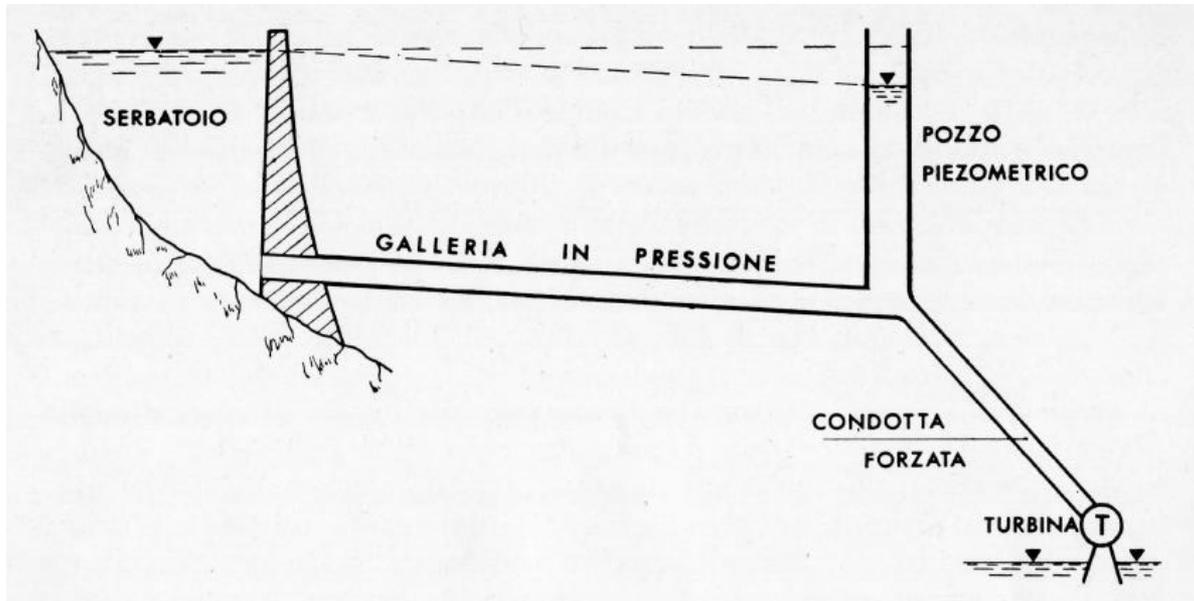
Il passaggio dell'onda determina variazioni di pressione → compressione o dilatazione della massa di liquido.

Celerità: velocità di spostamento della perturbazione.

La perturbazione lungo il suo percorso può variare e riflettersi in relazione al cambiamento delle condizioni al contorno. Di particolare interesse è la situazione in cui la perturbazione incontra una parete oppure una superficie libera.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE

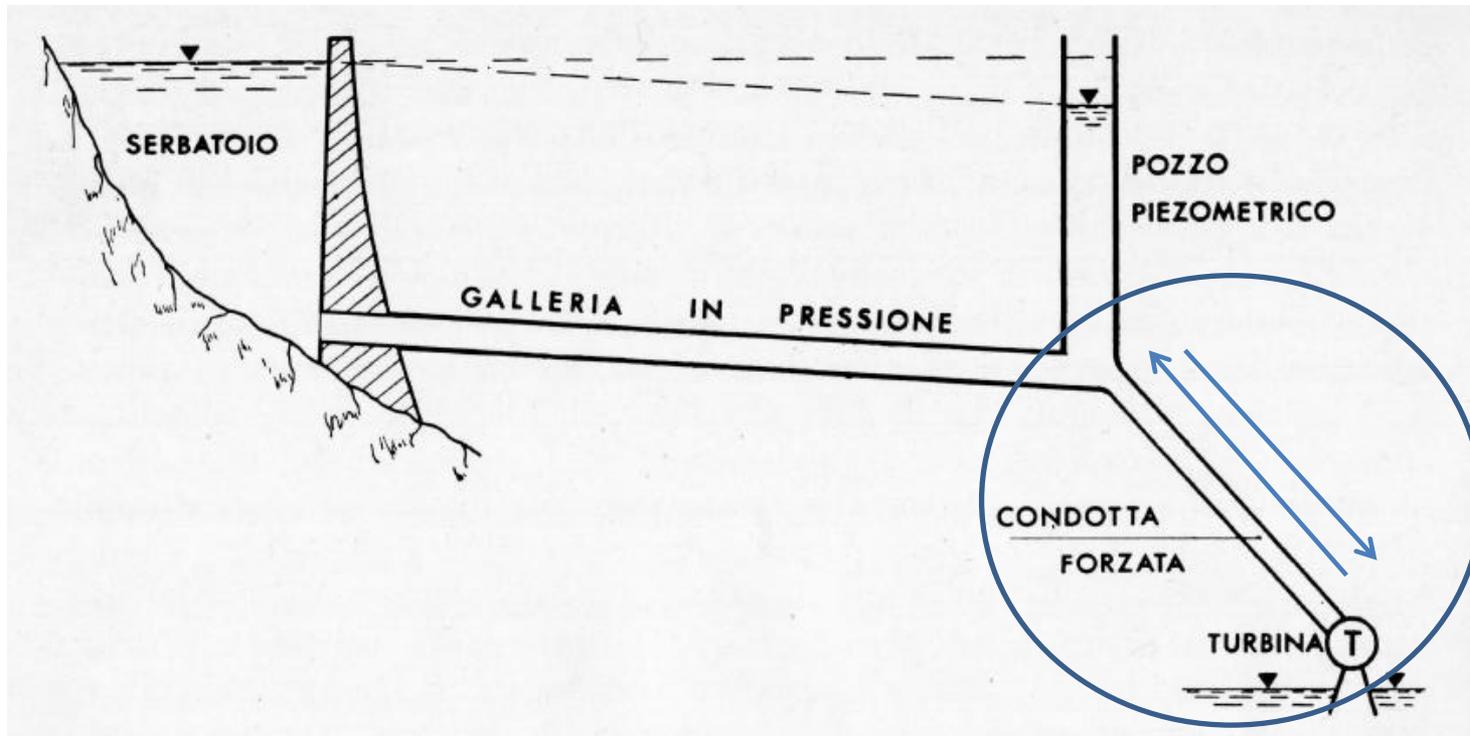
Esempi di moto vario nel funzionamento impianto produzione energia



Elementi costitutivi:

- Serbatoio di grande capacità
- Condotta in pressione, lunga estensione e basse pressioni
- Pozzo piezometrico
- Condotta forzata, breve estensione, alto dislivello
- Regolatore di portata
- Turbina

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE

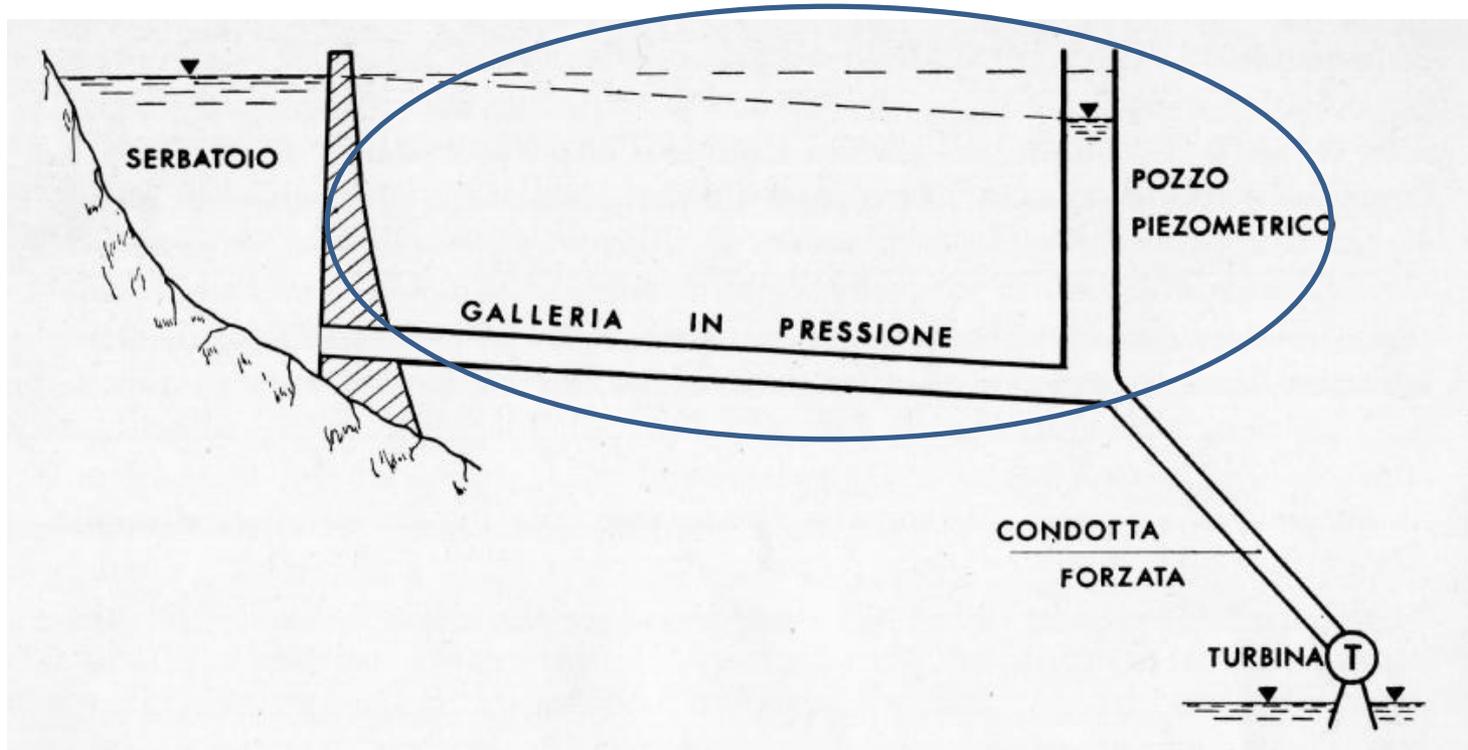


Il regolatore di portata determina la formazione di perturbazioni che si propagano verso monte fino al pozzo piezometrico.

Il pozzo agisce come fosse un serbatoio di grandi dimensioni mantenendo costante la pressione alla sezione di ingresso della condotta forzata → riflessione negativa della perturbazione.

La perturbazione arrivata al regolatore si riflette rimanendo nella condotta forzata.
→ Il processo prosegue alternativamente determinando variazioni periodiche di pressione e di velocità

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE



Altra tipologia di moto vario.

Sistema condotta in pressione – pozzo piezometrico, si adatta più lentamente alla nuova portata presente nella condotta forzata.

La differenza di portata viene assorbita dal pozzo piezometrico attraverso il suo livello liquido che induce a sua volta la formazione di perturbazioni. Le propagazioni hanno tempi molto piccoli rispetto ai tempi di evoluzione della superficie. Si può considerare la loro celerità come infinita → liquido incomprimibile e condotta indeformabile. In questo caso siamo in presenza di oscillazioni di massa.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE

Esempi di rotture condotte causate dal colpo d'ariete



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE

Il fenomeno descritto nella condotta forzata viene denominato colpo d'ariete (water hammer), questo, tende a smorzarsi velocemente, a causa delle dissipazioni nella trasformazione dell'energia cinetica in pressione/compressione-dilatazione fluido-condotta e viceversa.

A causa della celerità e della lunghezza del sistema tale alternanza avviene innumerevoli volte.

Di rilevanza idraulica sono le fasi temporali iniziali del colpo d'ariete (ordine dei secondi o sue frazioni), quando si manifesta con maggiore intensità.

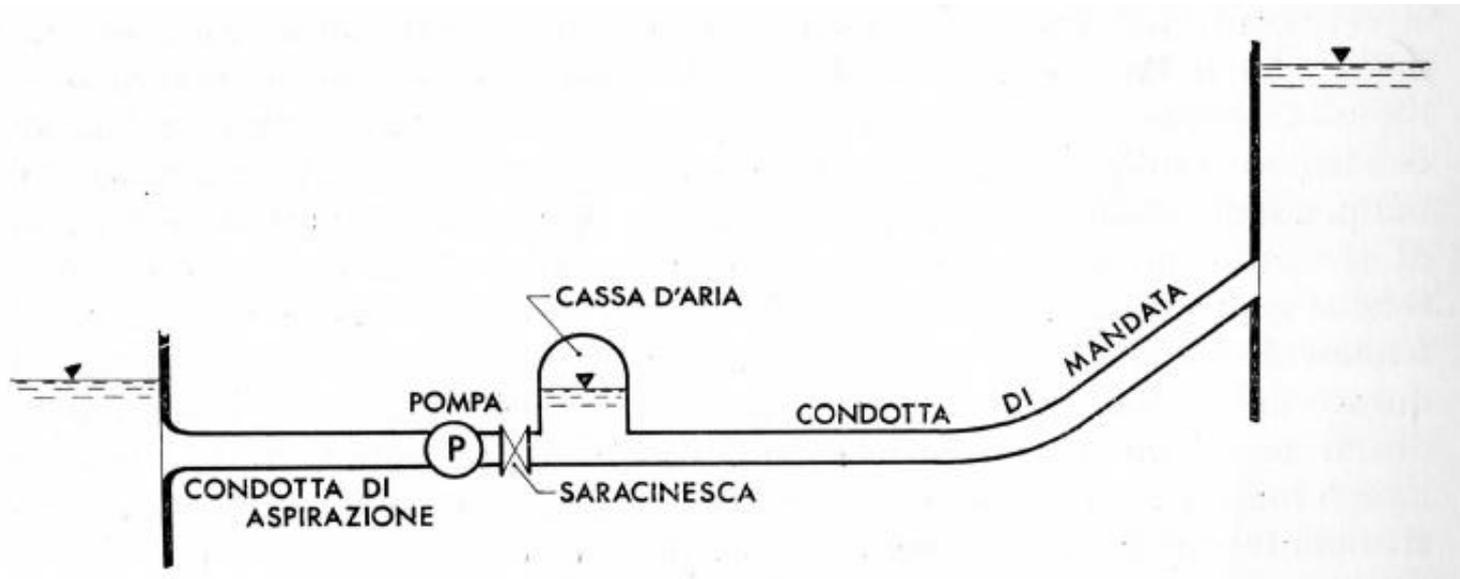
Alcune considerazioni:

Condotte brevi → trascurabili gli effetti di resistenza dati i tempi brevi del fenomeno (es. condotta forzata)

Condotte lunghe → gli effetti di resistenza non sono trascurabili (es oleodotti)

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE

Esempi di moto vario per un impianto di sollevamento.



Elementi:

- Serbatoi di monte e valle
- Condotte di aspirazione e mandata
- Pompa
- Regolatore di portata
- Cassa d'espansione

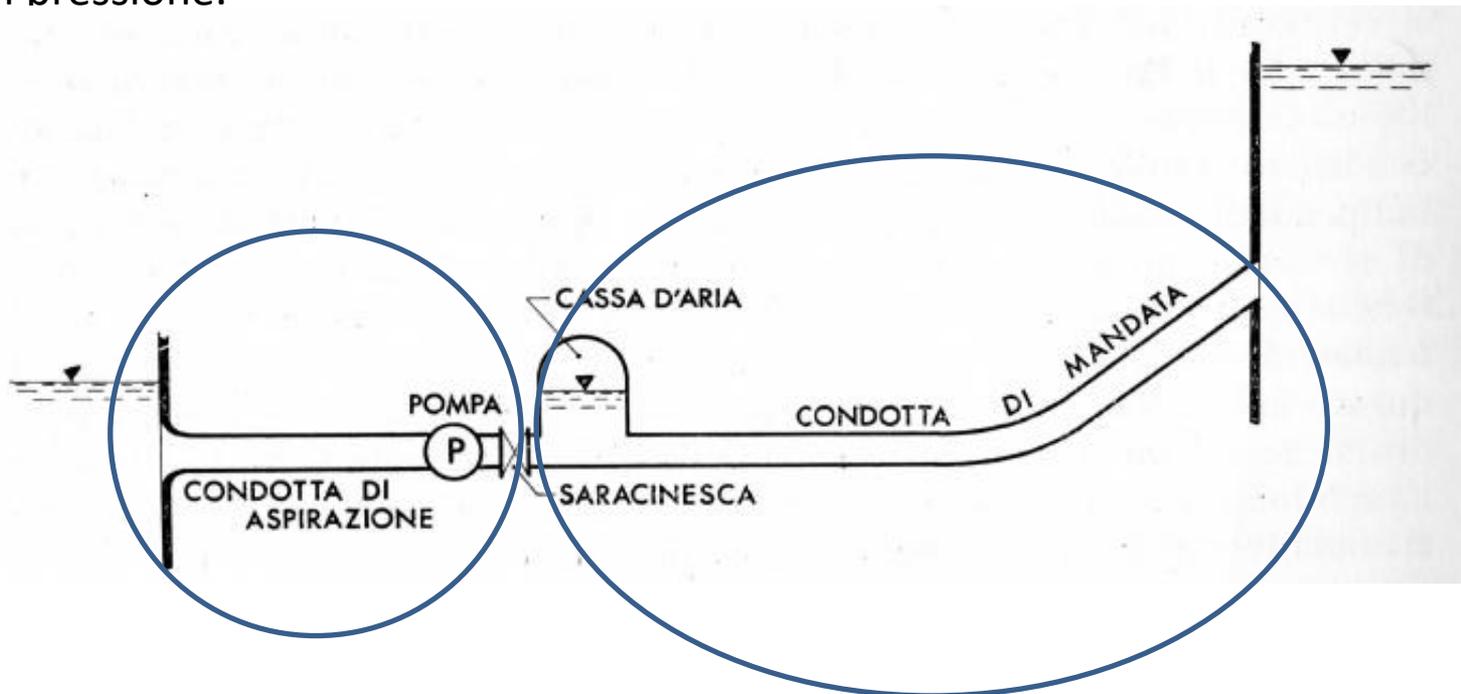
Moto vario indotto da arresto e avviamento pompa.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE

Le manovre sono di norma eseguite in tempi lunghi

→ Si possono considerare nulli i tempi di propagazione per cui liquido incompressibile e condotta indeformabile, vanno considerate le resistenze.

In caso di brusco arresto del sistema, colpo d'ariete nel tratto di aspirazione, mentre nel tratto di mandata avremo un moto vario simile al caso pozzo piezometrico-galleria in pressione.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - INTRODUZIONE

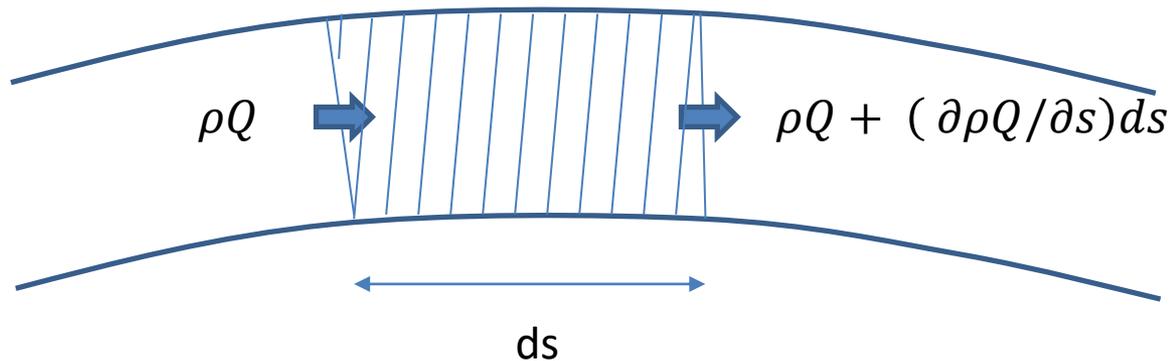
Tipologie di moto vario in condotte in pressione di interesse pratico:

- Liquido incompressibile e condotta indeformabile. Caso di variazioni di portate lente o condotte brevi
- Liquido comprimibile e condotta deformabile, caso di variazioni di portata veloci, imprescindibile dai tempi di propagazione delle onde (colpo d'ariete)
- Moto vario per condotta in comunicazione con superficie a pelo libero (oscillazioni di massa), condizioni di liquido incompressibile e condotta indeformabile

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - EQUAZIONI

Deriviamo le equazioni che descrivono il moto vario nelle condotte in pressione, considerando che le variabili (anche geometriche) variano nello spazio e nel tempo. Consideriamo il fluido comprimibile e la condotta elastica.

Equazioni di continuità



Considero ora l'equazione di continuità. Prendiamo un tratto di fluido tra due sezioni poste a distanza ds . Considero la portata in massa transitante alla sezione di ingresso e di uscita in un intervallo di tempo dt , la differenza risulta:

$$[\rho Q + (\partial \rho Q / \partial s) ds - \rho Q] dt = (\partial \rho Q / \partial s) ds dt$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - EQUAZIONI

Abbiamo una differenza

$$(\partial \rho Q / \partial s) ds dt$$

La differenza di portata in massa in un tempo dt tra le sezioni, deve corrispondere per la conservazione della massa ad una diminuzione di massa nel tratto considerato pari a:

$$-[\partial \rho A / \partial t] ds dt$$

Otteniamo:

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt = -\frac{\partial \rho A}{\partial t} ds dt$$

Per cui

$$\boxed{\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0}$$

Se il fluido è incomprimibile

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

nel moto permanente $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ Per cui $\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$ La portata è costante nello spazio

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - EQUAZIONI

Se esprimo la portata in termini di sezione e velocità

$$\frac{\partial AV}{\partial s} = A \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial A}{\partial s} = 0 \quad \text{In moto uniforme} \quad \frac{\partial A}{\partial s} = 0$$

Per cui $\frac{\partial V}{\partial s} = 0$ La velocità rimane costante nello spazio

Riconsidero l'equazione di continuità nella sua formula generale considerando la portata Q espressa in termini di A e V ed esplodo le derivate:

$$V \frac{\partial \rho A}{\partial s} + \rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Considero che area A e densità variano nello spazio e nel tempo in funzione della pressione, quindi $A=A(p)$ e $\rho=\rho(p)$. Posso allora riscrivere l'equazione come:

$$V \frac{\partial \rho A}{\partial s} + \rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \left(\rho \frac{dA}{dp} + A \frac{d\rho}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - EQUAZIONI

Equazione del moto

Considero l'equazione di Eulero per un punto di fluido, trascurando quindi gli effetti viscosi

$$\rho(F - A) = \text{grad } p$$

Dove F rappresentano le forze di massa e A l'accelerazione. Considerando solo il peso per le forze di massa, avrò:

$$-\rho g \text{ grad } z - \frac{dV}{dt} = \text{grad } p$$

Lungo una traiettoria s avremo

$$-\rho g \frac{\partial z}{\partial s} - \rho \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \frac{\partial V^2}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s}$$

dove abbiamo esploso la derivata totale dV/dt . Dividendo poi per il peso specifico $\gamma = \rho g$ e raccogliendo:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO - EQUAZIONI

Con il peso specifico da considerare come una variabile e quindi non potendolo portare all'interno della derivata della pressione.

Considero però che:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s} \frac{1}{\gamma} + \frac{p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

Sostituendo il termine, e considerando anche le perdite di carico continue espresse in termini della cadente J otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0$$

Il primo termine a sinistra è funzione della variazione nello spazio del carico idraulico. Ricapitolando, il sistema di equazioni che descrivono il moto vario sarà:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0$$

$$V \frac{\partial \rho A}{\partial s} + \rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \left(\rho \frac{dA}{dp} + A \frac{d\rho}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$A = A(p)$$

$$\rho = \rho(p)$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Considero il sistema di equazioni appena descritto per il moto vario, nelle applicazioni pratiche, come quelle viste nell'introduzione. Le equazioni si possono semplificare in funzione delle seguenti assunzioni:

1) Considero liquidi poco comprimibili ad elevato modulo di comprimibilità ϵ

$$\epsilon = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

che considero costante al variare della pressione. Se a grandi variazioni di pressione corrispondono piccole variazioni di densità, significa che ϵ è molto grande.

2) Considero condotte circolari di spessore costante e limitata deformabilità e quindi valori elevati del modulo di elasticità E (discorso analogo al punto 1 ma per la sezione A)

3) La velocità media è dell'ordine di qualche metro al secondo con relative altezze cinetiche trascurabili rispetto alle piezometriche

4) A meno di condotte lunghe, i tempi caratteristici per il colpo d'ariete hanno tempi scala piccoli e si possono considerare trascurabili le resistenze

In particolare i punti 1 e 2 determinano $\frac{\partial \rho}{\partial s} = 0$ $\frac{\partial A}{\partial s} = 0$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Semplifico l'equazione del moto in funzione delle assunzioni fatte. In considerazione del punto 1 a variazioni notevoli di pressione corrispondono variazioni ridotte di ρ

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0$$

Considerando il punto 3

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0$$

Considerando il punto 4

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0$$

pertanto

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{con} \quad h = z + \frac{p}{\gamma} \quad \text{Il carico piezometrico}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Considero ora l'equazione di continuità

$$V \frac{\partial \rho A}{\partial s} + \rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \left(\rho \frac{dA}{dp} + A \frac{d\rho}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Per il punto 1 e 2

$$\cancel{V \frac{\partial \rho A}{\partial s}} + \rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \left(\rho \frac{dA}{dp} + A \frac{d\rho}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Divido per ρA e ricordando che $\epsilon = \rho dp/dp$

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Esprimo p in funzione di h

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \cancel{\frac{\partial z}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} \right) = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{p}{\gamma} \frac{d\gamma}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \cancel{\frac{p}{\epsilon}} \right) \frac{\partial p}{\partial t}$$

Avendo considerato per il punto 1 che $p/\epsilon \ll 1$. Sostituendo

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \gamma \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Ricapitolando il sistema diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial s} + \gamma \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

Se considero come verso per s quello contrario alla direzione del moto

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial s} = \gamma \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \end{array} \right.$$

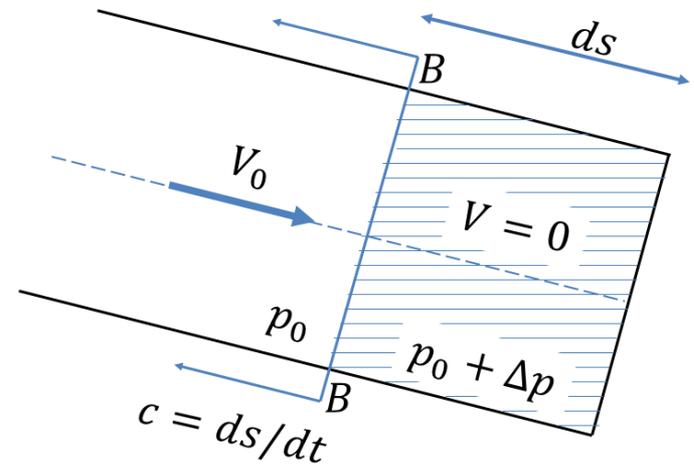
Più la relazione $A=A(p)$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Considero che ad otturatore aperto, esista una condizione di moto permanente con velocità V_0 . Ad un certo istante che considero come $t=0$, viene effettuata una chiusura istantanea dell'otturatore.

Per il teorema degli impulsi, la variazione di quantità di moto deve essere in equilibrio con l'impulso, ovvero con le forze (pressione x area) integrate nel tempo. Quindi la variazione nel tempo della quantità di moto per unità d'aria è in equilibrio con le variazioni di pressione. Se il fluido si arrestasse istantaneamente ne deriverebbe pertanto un aumento infinito di pressione, mentre le evidenze pratiche dimostrano che l'aumento è finito.

Consideriamo la zona dell'otturatore, si veda la figura a lato, ad un istante dt dalla chiusura istantanea, avremo che si è arrestato solo un volume Ads di fluido. Avremo pertanto una sezione BB che divide la condotta in due tronconi, a destra in condizioni di velocità nulla, mentre a sinistra saremo ancora con la velocità di moto permanente V_0 . La sezione BB si sposterà allora verso valle di una quantità $V_0 dt$, determinando una riduzione del volume di fluido arrestato pari a $AV_0 dt$. Tale riduzione di volume determina un aumento di pressione Δp , che possiamo calcolare col teorema degli impulsi.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Applicando il teorema degli impulsi avremo:

$$\overbrace{\rho A ds}^{\text{massa}} \underbrace{V_0}_{\text{volume}} = \underbrace{A \Delta p}_{\text{forza}} dt$$

Variazione q.d.m.
da V_0 a 0

pertanto

$$\Delta p = \rho \frac{ds}{dt} V_0$$

$$\Delta p = \rho c V_0$$

Avendo definito

$$c = ds/dt$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

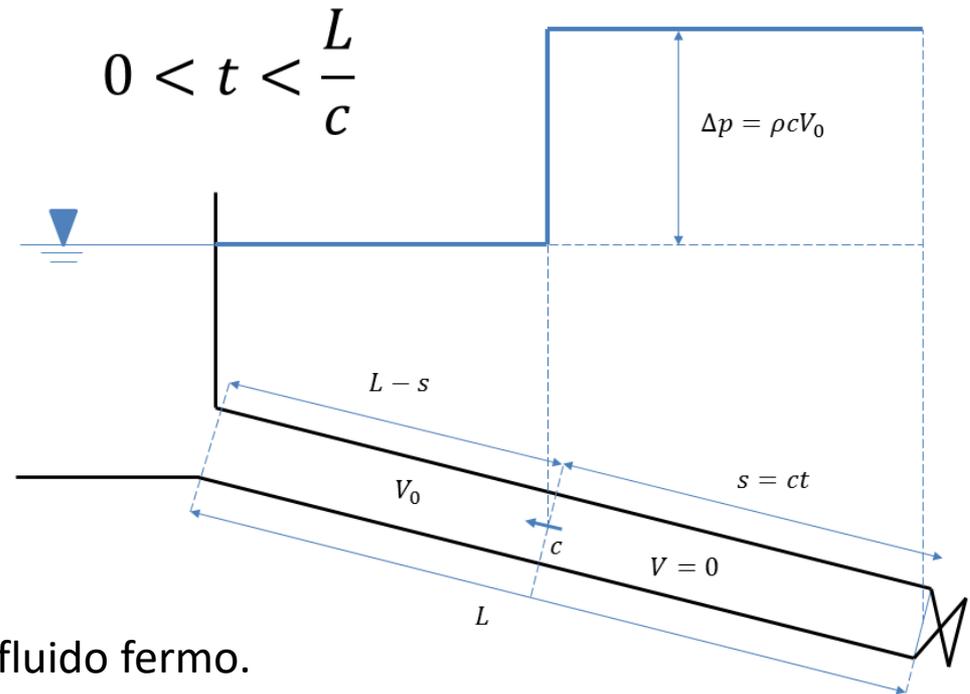
Ad un istante successivo, un'altra zona di fluido si sarà arrestata, e la zona di separazione tra fluido in moto con velocità V_0 e zona con $V=0$ si sarà spostata verso monte. L'interfaccia tra queste due condizioni si sposta lungo la condotta con velocità c , detta celerità. Questa, come si vedrà in seguito, dipende dalle caratteristiche di deformabilità della condotta e di comprimibilità del fluido.

Dopo un tempo finito t , avremo una condizione come in figura, con una zona di lunghezza s a fluido fermo e con sovrappressione Δp , ed un'altra di lunghezza $L-s$ ancora in condizioni di moto permanente. Da notare che la sovrappressione, non dipende dalle condizioni di carico iniziali. Il fronte copre l'intera lunghezza L in un tempo:

$$t_1 = \frac{L}{c}$$

Al tempo t_1 l'intera lunghezza L sarà a fluido fermo.

FASE 1: perturbazione ascendente positiva



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

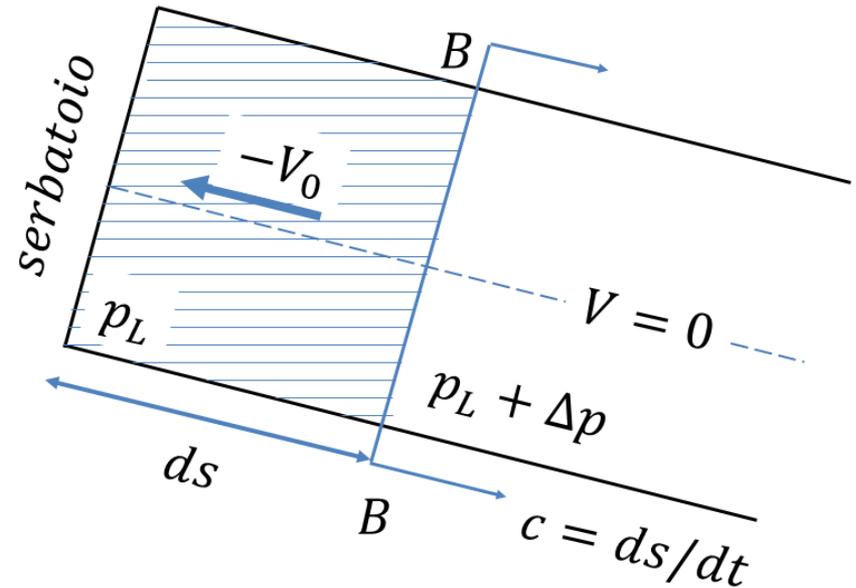
La nuova condizione stabilitasi nella condotta, fluido fermo e sovrappressione Δp non è una condizione stabile.

Consideriamo un volume infinitesimale di fluido alla sezione di imbocco.

L'ipotesi iniziale di serbatoio a quota Z_A costante determina che la pressione all'imbocco col serbatoio rimanga costante e pari a p_L .

Alla sezione BB di valle sarà invece $p_L + \Delta p$

Al tempo $t=t_1+dt$ all'impulso $A\Delta p dt$ deve corrispondere una variazione di quantità di moto $\rho A ds V_0 \rightarrow$ si instaura allora una velocità $-V_0$, Mentre nel tratto ds la pressione torna a p_L

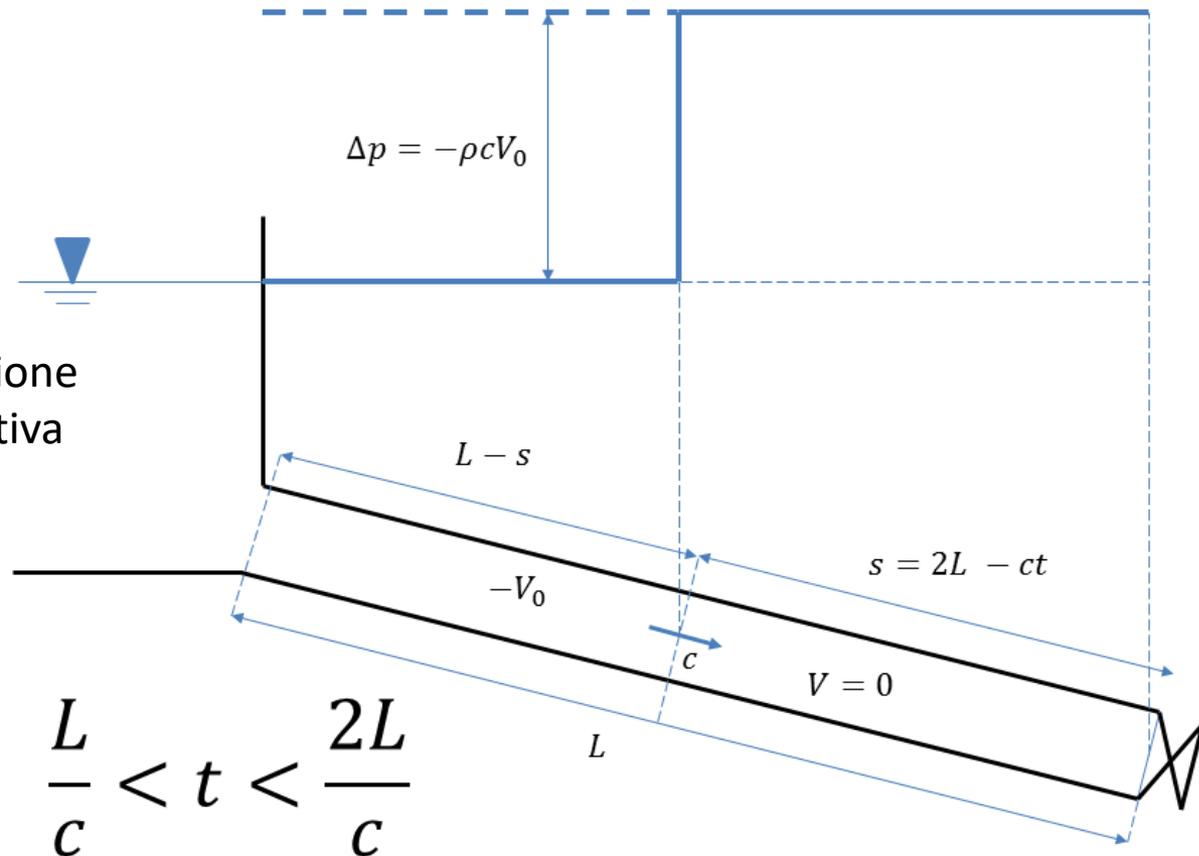


CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Alla sezione di monte, abbiamo pertanto una riflessione della perturbazione che aveva risalito la condotta, ottenendo una propagazione negativa discendente.

Questa si caratterizza per una sottopressione $-\Delta p$ che riporta le condizioni di carico a quelle di moto permanente, quindi al valore imperturbato, mentre la velocità diventa negativa. Al tempo $t_2=2L/c$ l'intera colonna è in moto permanente con velocità $-V_0$

FASE 2: perturbazione discendente negativa

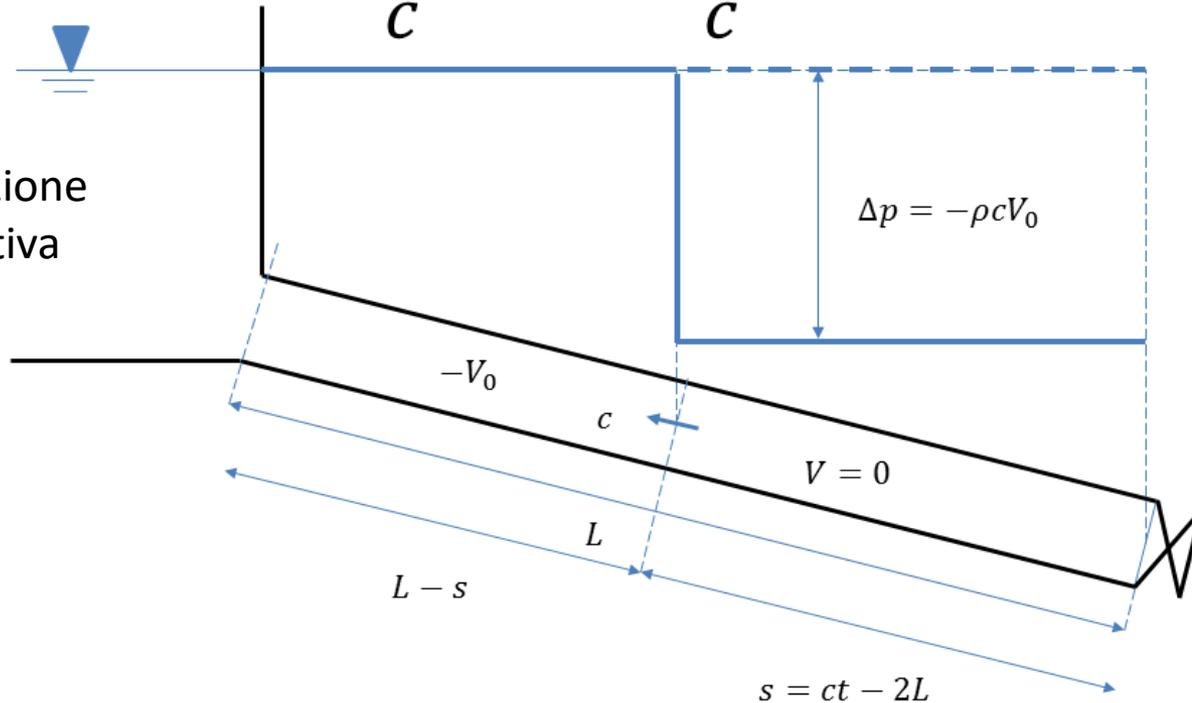


CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Al tempo $t_2=2L/c$ l'intera colonna è in moto permanente con velocità $-V_0$ e pressione indisturbata. All'otturatore però la condizione è di velocità nulla, pertanto si genera una situazione analoga a quella vista durante la fase 1, in questo caso però, essendo la velocità $-V_0$ avremo una depressione $-\rho cV_0$. Alla sezione dell'otturatore si determina una nuova riflessione, quindi una perturbazione negativa ascendente che si propagherà nella condotta.

$$\frac{2L}{c} < t < \frac{3L}{c}$$

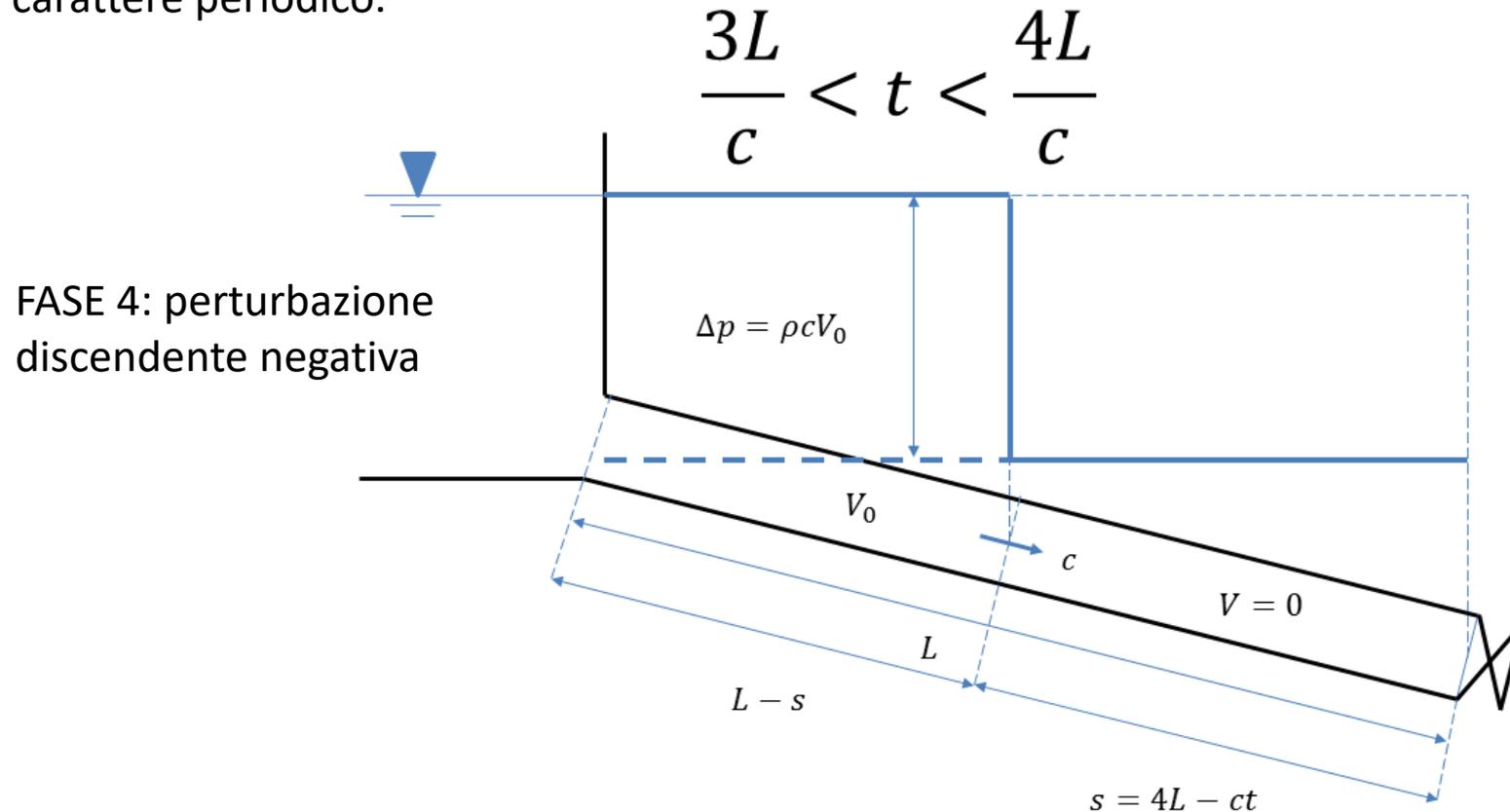
FASE 3: perturbazione ascendente negativa



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Al tempo $t_3=3L/c$ l'intera colonna è ferma con depressione $-\rho cV_0$

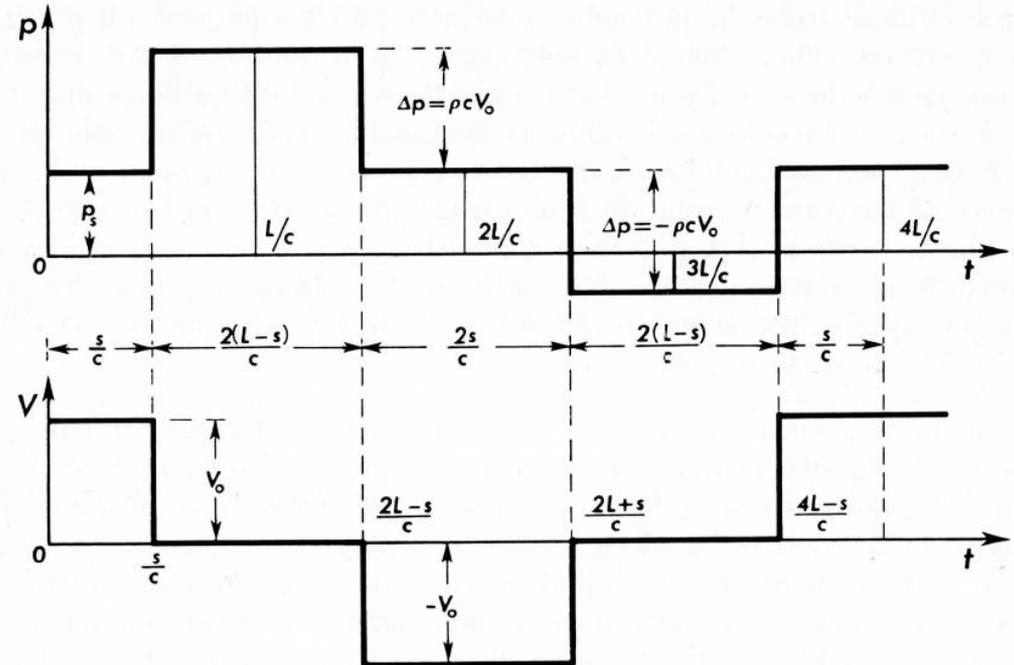
Alla sezione di monte per $t>t_3$, data la condizione di carico costante imposta dal serbatoio, si forma una perturbazione positiva discendente che si muove con celerità c riportando il moto a condizioni di moto permanente con velocità V_0 e pressione indisturbata. Al tempo $t_4=4L/c$ ci ritroviamo alle condizioni iniziali ed il fenomeno appena descritto si ripeterà con carattere periodico.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Il moto vario appena descritto si riproduce in una condizione periodica con periodo $T=4L/c$. Ad una sezione generica s , se osserviamo l'andamento di pressione e velocità nel tempo, otterremo un grafico come in figura.

Fino ad un tempo s/c la sezione rimane nelle condizioni indisturbate di moto permanente. All'arrivo della perturbazione ascendente positiva la pressione sale di Δp e la velocità diventa nulla. Rimane in queste condizioni per un intervallo di tempo $2(L-s)/c$, ovvero il tempo necessario alla perturbazione per risalire la rimanente parte di condotta $(L-s)$, riflettersi, e tornare indietro, portando la pressione a quella indisturbata e a velocità negativa.

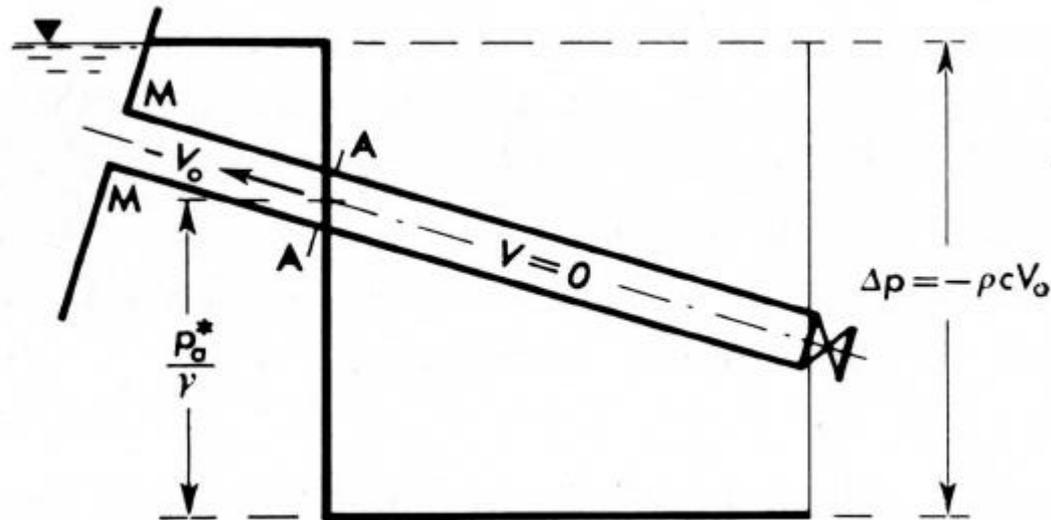


In questa nuova condizione, la sezione rimarrà per un tempo $2s/c$, ovvero il tempo necessario all'onda discendente di arrivare all'otturatore, riflettersi, e tornare alla sezione. Le successive fasi saranno caratterizzate da questi intervalli temporali appena descritti.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Le oscillazioni si smorzano nel tempo per effetto delle perdite di energia nei processi di trasformazione da elastica in cinetica e viceversa. Prove sperimentali dimostrano che le prime oscillazioni si comportano come da modello teorico.

Osservazione sulla terza fase contraddistinta da perturbazione negativa



Caso particolare in cui la depressione porti in una sezione la pressione relativa a $-p_a$ e quindi una pressione assoluta nulla.

La perturbazione non può propagarsi oltre.

Troncone AA-O fluido fermo

Troncone MM-AA continua col moto

Si determina una situazione di cavitazione con grande dissipazione di energia

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Celerità della perturbazione

Fondamentale nei processi di colpo d'ariete, ne definiamo la dipendenza dalle caratteristiche elastiche di fluido e condotta.

1) Condotta indeformabile

A dt dalla chiusura la sezione BB si sposta verso valle di $V_0 dt$, il volume $W=Ads$ diminuisce di:

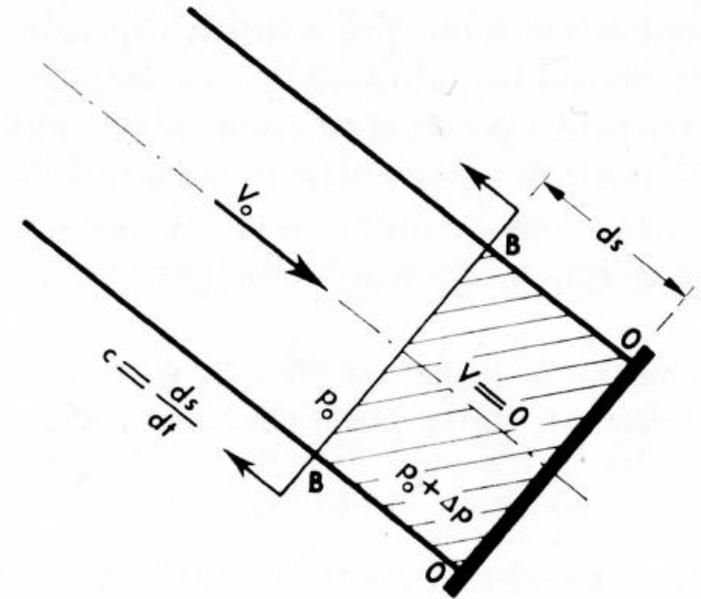
$$dW = -AV_0 dt$$

Alla differenza di quantità di moto nel volume di controllo a fluido fermo, corrisponde un aumento di pressione $\Delta p = \rho c V_0$ che determina una riduzione del volume fluido. Considero le proprietà elastiche del fluido.

$$\epsilon = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

Se il volume W varia, comunque la massa ρW si mantiene costante ($d(\rho W)=0$), pertanto

$$\rho dW + W d\rho = 0 \quad ; \quad \frac{\rho}{d\rho} = -\frac{W}{dW} \quad dW = -\frac{W \Delta p}{\epsilon} = -\frac{A \rho c V_0}{\epsilon} ds$$



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Uguagliando i due decrementi di volume ottenuti (stesso fenomeno ma osservato in modo diverso) ricaviamo:

$$AV_0 dt = \frac{A\rho c V_0}{\epsilon} ds \qquad 1 = \frac{\rho c}{\epsilon} \frac{ds}{dt}$$

Ma per definizione

$$c = \frac{ds}{dt}$$

quindi

$$\frac{\rho c^2}{\epsilon} = 1$$

$$c = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

La celerità risulta la velocità del suono in un fluido, ed ha valori dell'ordine 10^3 m/s

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

2) Condotta deformabile

Analogamente al caso precedente, dallo spostamento della sezione BB

$$dW = -AV_0 dt$$

Per l'incremento di pressione avremo una componente legata alla comprimibilità del fluido

$$dW_1 = -\frac{A\rho cV_0}{\epsilon} ds$$

Ed una componente legata alla dilatazione della condotta (segno opposto)

$$dW_2 = dA ds$$

Considerando che le variazioni di area sono funzione delle variazioni di pressione possiamo scrivere

$$dW_2 = \frac{dA}{dp} \Delta p ds = \rho cV_0 \frac{dA}{dp} ds$$

Eguagliando le formulazioni per i volumi $dW = dW_1 - dW_2$

$$AV_0 dt = \frac{A\rho cV_0}{\epsilon} ds + \rho cV_0 \frac{dA}{dp} ds$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Divido per $AV_0 dt$

$$1 = \frac{\rho c ds}{\epsilon dt} + \rho c \frac{1}{A} \frac{dA ds}{dp dt}$$

Essendo $c=ds/dt$

$$\frac{1}{c^2} = \rho \left[\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\epsilon} \right] = \frac{\rho}{\epsilon} \left[\frac{\epsilon}{A} \frac{dA}{dp} + 1 \right]$$

$$c^2 = \frac{1}{\frac{\rho}{\epsilon} \left[\frac{\epsilon}{A} \frac{dA}{dp} + 1 \right]} = \frac{\frac{\epsilon}{\rho}}{\left[\frac{\epsilon}{A} \frac{dA}{dp} + 1 \right]}$$

pertanto

$$c = \frac{c^*}{\sqrt{\frac{\epsilon}{A} \frac{dA}{dp} + 1}}$$

Dove con C^* considero la celerità per condotta indeformabile. Analizziamo il denominatore: a $dp>0$ corrisponde $dA>0$ (a sovrappressione \rightarrow dilatazione), invece a $dp<0$ corrisponde $dA<0$ (a sottopressione \rightarrow contrazione), pertanto il rapporto $dA/dp>0$, come anche il rapporto ϵ/A . Quindi il denominatore è sempre >1 e se ne deduce che $C<C^*$, la celerità in una condotta deformabile è inferiore ad una indeformabile.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

La dilatazione della tubazione ha effetti analoghi ad un aumento della comprimibilità del fluido, quindi riduzione di ϵ , e pertanto una riduzione della celerità

Da questa analogia si può definire un modulo di elasticità fittizia

$$\frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dp}$$

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{A} \frac{dA}{dp}}$$

Divido per la densità e ne prendo la radice

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon}{A} \frac{dA}{dp}}} = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\rho}}$$

Ciò significa che l'analisi condotta precedentemente per il fenomeno del colpo d'ariete in una condotta indeformabile, rimane valida anche nel caso di condotta deformabile, è sufficiente considerare un fluido a modulo di comprimibilità ϵ' anziché ϵ

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Riformuliamo la celerità in considerazione dell'utilizzo di condotte circolari di diametro D e spessore e di materiale elastico, che risponda alla legge di Hook, con E il modulo di elasticità

$$E = D \frac{d\sigma}{dD}$$

Lo sforzo σ per unità di superficie si può esprimere attraverso la formula di Mariotte, nell'ipotesi che $e \ll D$

$$\sigma = \frac{pD}{2e}$$

Sostituendo ed esprimendo in funzione di dD otteniamo

$$dD = \frac{D^2}{2eE} dp$$

Considerando il rapporto di deformazione dell'area in relazione alla pressione, tenendo conto dell'area in funzione del diametro

$$\frac{dA}{dp} = \frac{dA}{dD} \frac{dD}{dp} = \frac{d}{dD} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \frac{D^2}{2eE} = \frac{2\pi D}{4} \frac{D^2}{2eE} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{D}{eE} = A \frac{D}{eE}$$

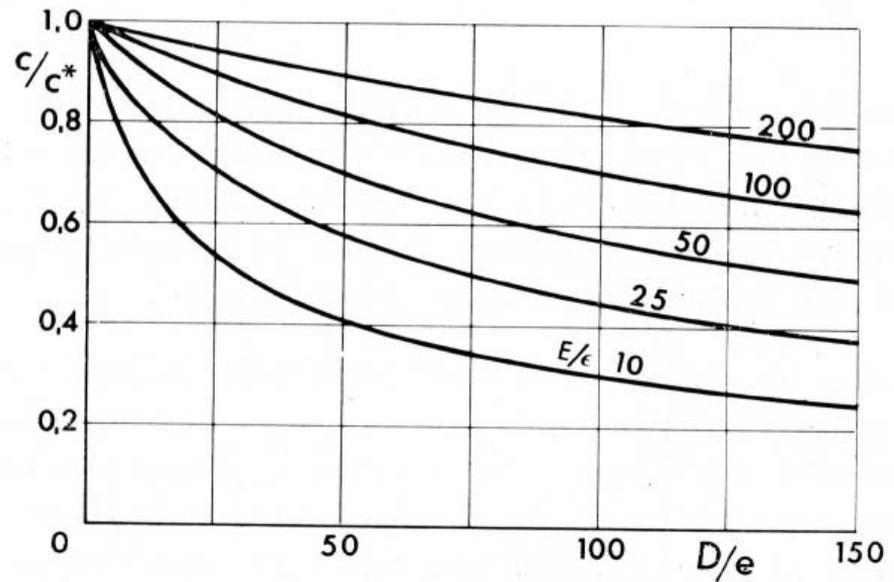
CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Il modulo di comprimibilità ϵ' diventa

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{A} \frac{dA}{dp}} = \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon D}{eE}}$$

La celerità

$$c = \frac{c^*}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon D}{eE}}}$$



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Equazioni moto in funzione della celerità

Il sistema di equazioni per il moto vario, per lo studio del fenomeno del colpo d'ariete era stato determinato come

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial s} = \gamma \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \end{array} \right.$$

Durante l'analisi sulla celerità, avevamo trovato la seguente relazione

$$\frac{1}{c^2} = \rho \left[\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\epsilon} \right]$$

Ricordando che $\gamma = \rho g$ e sostituendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} \end{array} \right.$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Analisi del colpo d'ariete attraverso le equazioni del moto

Voglio derivare una forma delle equazioni del moto che mi permetta lo studio del colpo d'ariete

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} \end{array} \right.$	<p>Derivo in s</p> <p>Derivo in t</p>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial s} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} g \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial s} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \end{array} \right.$	$g \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$	
		$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}$	<p>Eq. Diff. 2° ordine in h</p>		
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} \end{array} \right.$	<p>Derivo in t</p> <p>Derivo in s</p>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{c^2}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s} \end{array} \right.$	$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{c^2}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$	
		$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$	<p>Eq. Diff. 2° ordine in V</p>		

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Sono passato da un sistema costituito da due equazioni alle derivate parziali del primo ordine sia in V che in h , a due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, ciascuna in una sola variabile, V o h . Entrambe le equazioni hanno la stessa forma del tipo

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}$$

Questa tipologia di equazioni, è nota come equazione di D'Alembert e descrive l'andamento delle onde. In un mezzo non dispersivo e con onde di piccola ampiezza, ammette la seguente soluzione:

$$\beta = f(s - ct) + g(s + ct)$$

Con f e g funzioni arbitrarie. Per verificare che effettivamente quella sopra sia una soluzione dell'equazione di D'Alembert, è sufficiente considerare un cambio di variabile $\eta = s - ct$ e $\xi = s + ct$, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta \partial \xi} = 0$$

Integrando prima in η mantenendo costante ξ e poi integrando in ξ si ottiene

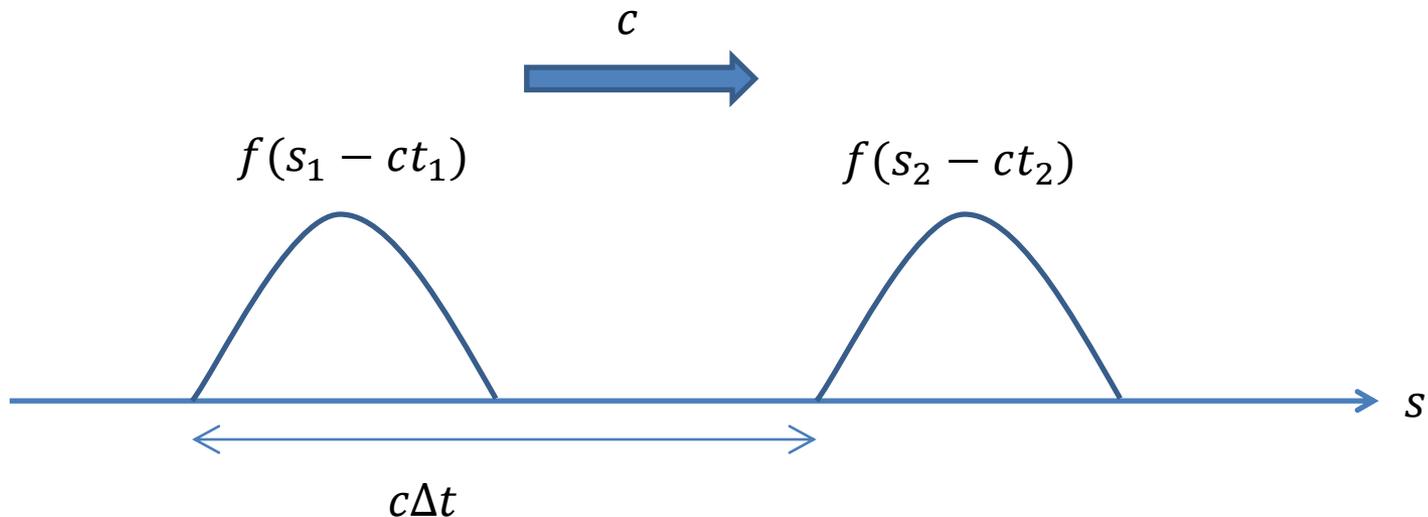
$$\beta = f(\eta) + g(\xi) = f(s - ct) + g(s + ct)$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

f rappresenta una perturbazione che si propaga in direzione positiva per s con velocità c , mentre g è una perturbazione che si propaga in direzione negativa s con velocità sempre c . La f e la g non cambiano forma propagandosi nel mezzo con celerità c .
Se considero ad esempio la funzione f al tempo t_1 nella posizione s_1 , al tempo t_2 questa dovrà trovarsi nella posizione s_2 per cui

$$s_1 - ct_1 = s_2 - ct_2$$

$$s_2 - s_1 = c(t_2 - t_1)$$



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Per la prima equazione

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}$$

Avremo pertanto

$$\Delta h = h - h_0 = f(s - ct) + g(s + ct)$$

Dove h_0 deriva dalla condizione iniziale. L'andamento della piezometrica risulta quindi definita dalle funzioni f e g , mentre per la pressione si può semplicemente considerare $\Delta p = \gamma \Delta h$, in quanto non ci saranno variazioni di quota z .

Le funzioni f e g sono da definirsi secondo la condizione iniziale e le condizioni al contorno.

Condizione iniziale:

- Al tempo $t=0$ valgono le condizioni di moto permanente $V=V_0$ e $h=h_0$

Condizioni al contorno:

- $s=L$ zona sezione all'imbocco col serbatoio, vale per ogni t che $h=h_0=costante$
- $s=0$ zona sezione all'otturatore, considero la legge con cui varia la velocità media $V=V(t)$, in funzione della chiusura dell'otturatore.

Ora voglio dimostrare che le stesse funzioni f e g sono anche soluzioni per la 2a equazione

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

$$\Delta h = h - h_0 = f(s - ct) + g(s + ct)$$

Derivo in s

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{df}{d(s - ct)} \frac{\partial(s - ct)}{\partial s} = \frac{df}{d(s - ct)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d(s - ct)} \frac{\partial(s - ct)}{\partial t} = -c \frac{df}{d(s - ct)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{dg}{d(s + ct)} \frac{\partial(s + ct)}{\partial s} = \frac{dg}{d(s + ct)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{dg}{d(s + ct)} \frac{\partial(s + ct)}{\partial t} = c \frac{dg}{d(s + ct)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t}$$

Ho trovato due relazioni che legano le derivate spaziali a quelle temporali, sostituendo:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \right) \quad \text{essendo} \quad \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{c}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial f(s - ct)}{\partial t} - \frac{\partial g(s + ct)}{\partial t}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Integro nel tempo e considero $\Delta V = V_0 - V$ con V_0 derivante dalle condizioni iniziali

$$\frac{c}{g}(V_0 - V) = \frac{c}{g}\Delta V = f(s - ct) - g(s + ct)$$

Abbiamo quindi ottenuto la soluzione per l'andamento della velocità con le stesse funzioni arbitrarie f e g , soluzioni per l'andamento del carico h .

Ricapitolando, $f(s-ct)$ è una perturbazione che si propaga nelle s positive con velocità c . Ad un tempo $t_2 > t_1$ la distanza s_2 deve essere maggiore di s_1 per garantire lo stesso valore di $(s-ct)$, ovvero l'argomento della funzione. Lungo la s la funzione f mantiene la stessa forma ma dislocata di una quantità ct . f è la perturbazione dall'otturatore all'imbocco, g dall'imbocco all'otturatore.

Valutiamo ora alcune importanti relazioni che si possono derivare a partire dalle condizioni iniziali e al contorno. Considero la soluzione per il carico:

$$\Delta h = h - h_0 = f(s - ct) + g(s + ct)$$

All'imbocco $s=L$ abbiamo $h=h_0=cost$ e Δh quindi risulta nullo, pertanto:

$$f(L - ct) + g(L + ct) = 0 \qquad g(L + ct) = -f(L - ct)$$

Quindi f e g assumono ad ogni istante valore uguale ma segno contrario, all'arrivo alla sezione di imbocco di una perturbazione f ascendente, ne nasce una g di valore assoluto uguale ma di segno opposto che si propaga in modo discendente.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Considero ora la generica sezione s interessata dall'arrivo di una perturbazione discendente $g(s+ct)$, questa era passata all'imbocco al tempo

$$t_1 = t - (L - s)/c$$

Senza cambiare forma, quindi:

$$g(s + ct) = g(L + ct_1)$$

Ma all'imbocco, la perturbazione g si è creata per riflessione di una funzione f ascendente, la relazione l'abbiamo trovata prima e avremo

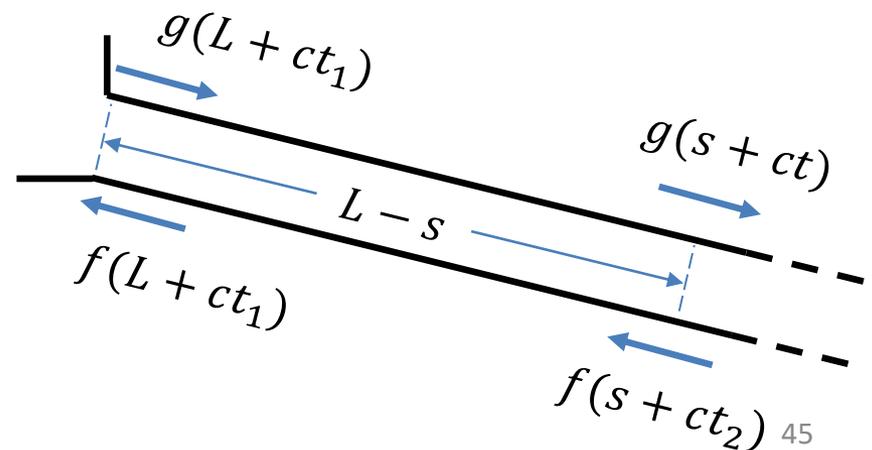
$$g(L + ct_1) = -f(L - ct_1)$$

La funzione f passata a t_1 all'imbocco era alla sezione s ad un tempo t_2 precedente a t_1

$$t_2 = t_1 - \frac{L - s}{c} = t - \frac{2(L - s)}{c}$$

quindi

$$f(L - ct_1) = f(s - ct_2)$$



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Ricapitolando le relazioni trovate, alla generica sezione s varrà che:

$$g(s + ct) = g(L + ct_1) = -f(L - ct_1) = -f(s - ct_2)$$

quindi

$$g(s + ct) = -f \left[s - c \left(t - \frac{2(L - s)}{c} \right) \right]$$

Data un'onda g discendente, passata in s al tempo t , questa sarà uguale, ma di segno contrario, a quella ascendente f che è passata alla sezione s con un anticipo pari a

$$\tau_s = \frac{2(L - s)}{c}$$

Ma sfruttando questa relazione, le formulazioni trovate per h e V in funzione di f e g possono essere riscritte in funzione della sola perturbazione ascendente f

$$\Delta h = f(s - ct) + g(s + ct) \quad \longrightarrow \quad \Delta h = f(s - ct) - f(s - c(t - \tau_s))$$

$$\frac{c}{g} \Delta V = f(s - ct) - g(s + ct) \quad \longrightarrow \quad \frac{c}{g} \Delta V = f(s - ct) + f(s - c(t - \tau_s))$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Fase di colpo diretto

Considero ora una fase di manovra all'otturatore che porterà in un tempo finito ad una variazione di velocità nella condotta (se chiusura completa la velocità finale sarà nulla), per quanto già visto si verrà a generare una serie di onde ascendenti.

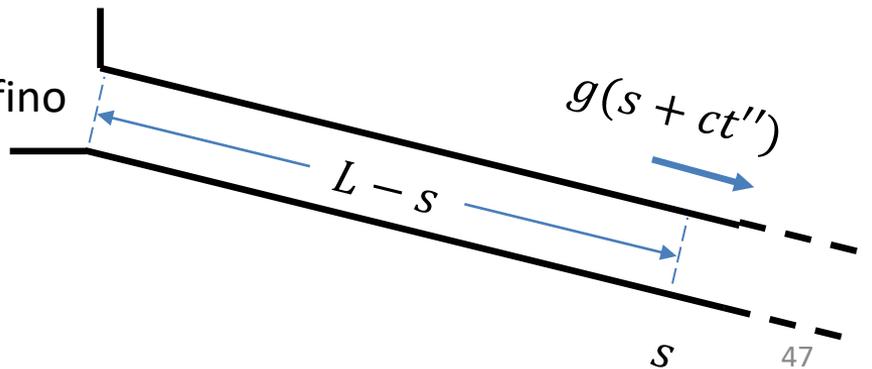
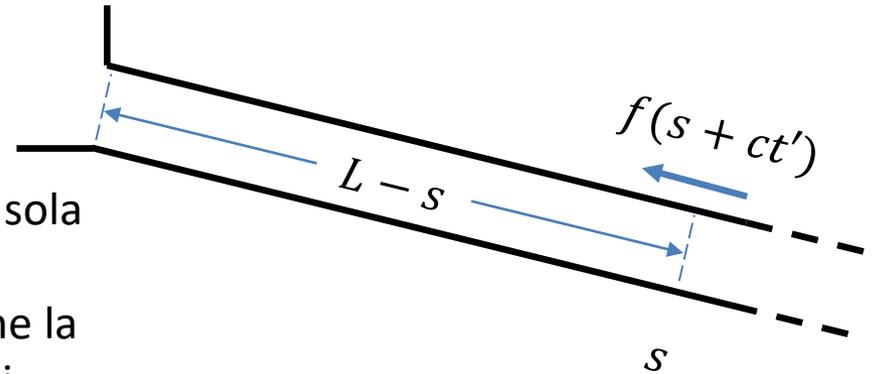
Alla generica sezione s , le prime perturbazioni ascendenti arriveranno al tempo:

$$t' = s/c$$

La sezione rimarrà interessata dagli effetti della sola onda ascendente f , per il tempo necessario alla perturbazione per coprire due volte lo spazio che la separa dall'imbocco (tempo τ_s), tornando quindi riflessa alla sezione s ad un tempo:

$$t'' = t' + \tau_s = \frac{s}{c} + \frac{2(L - s)}{c} = \frac{2L - s}{c}$$

Questo significa, che dall'inizio della manovra, fino al tempo t'' , la sezione risentirà solo dell'onda ascendente per un intervallo τ_s . Questa viene chiamata fase di colpo diretto.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Allora nell'intervallo $0 < t < t''$ possiamo semplificare la soluzione, non considerando le onde discendenti

$$\Delta h = f(s - ct) - \cancel{f(s - c(t - t_s))}$$

$$\frac{c}{g} \Delta V = f(s - ct) + \cancel{f(s - c(t - t_s))}$$

Combinandole, visto che a destra dell'uguale i termini sono identici, otteniamo:

$$\Delta h = \frac{c}{g} \Delta V$$

O in termini di pressione

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\rho g} ; \Delta p = \rho c \Delta V = \rho c (V_0 - V)$$

Fase di colpo diretto: la variazione di pressione in una sezione è proporzionale alla variazione di velocità che avviene in quella sezione, e non dipende da come è avvenuta tale variazione. La fase di colpo diretto alla sezione $s=0$, ovvero all'otturatore, vale

$$\tau_0 = t'' \Big|_{s=0} = \frac{2(L - s)}{c} = \frac{2L}{c}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

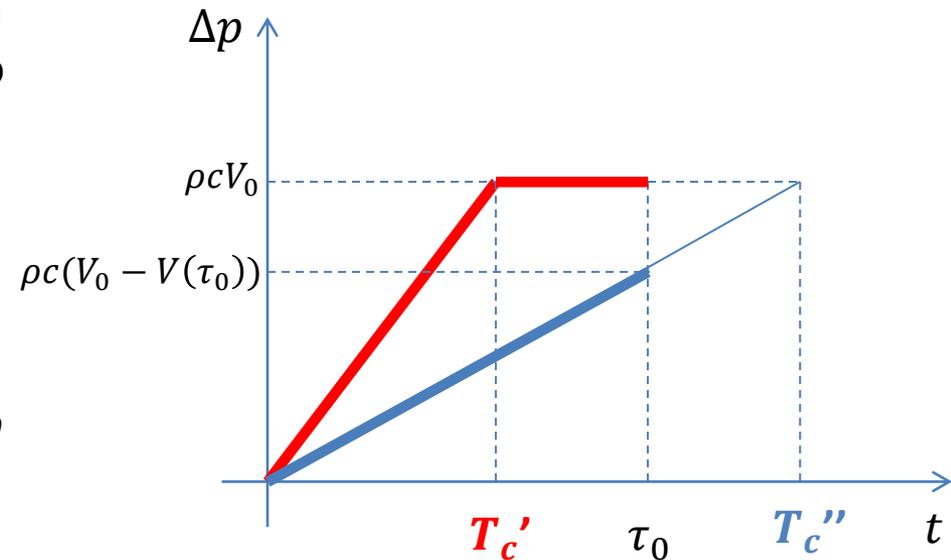
Consideriamo ora che la chiusura completa dell'otturatore avvenga in modo lineare in un tempo T_c , portando la velocità da V_0 a $V=0$. Pertanto la legge di variazione della velocità seguirà la seguente relazione.

$$V(t) = V_0 \left(1 - \frac{t}{T_c} \right)$$

Al tempo $t=0$ avremo la velocità indisturbata V_0 , al tempo $t=T_c$ la velocità sarà $V=0$. Ad ogni intervallo Δt avremo un variazione lineare di V e pertanto un variazione lineare di Δp .

Valutiamo adesso la fase di colpo diretto alla sezione dell'otturatore, a seconda del tempo di chiusura T_c rispetto a τ_0 .

Se $T_c' < \tau_0$ al tempo T_c' l'otturatore sarà chiuso, raggiungeremo un massimo di sovrappressione $\Delta p = \rho c V_0$, quindi la pressione rimarrà costante non essendoci più variazioni di velocità. Arrivati al tempo τ_0 la sezione sarà investita dall'onda discendente con sottopressione e dalla sua riflessa (anch'essa con sottopressione), con una conseguente diminuzione di Δp .



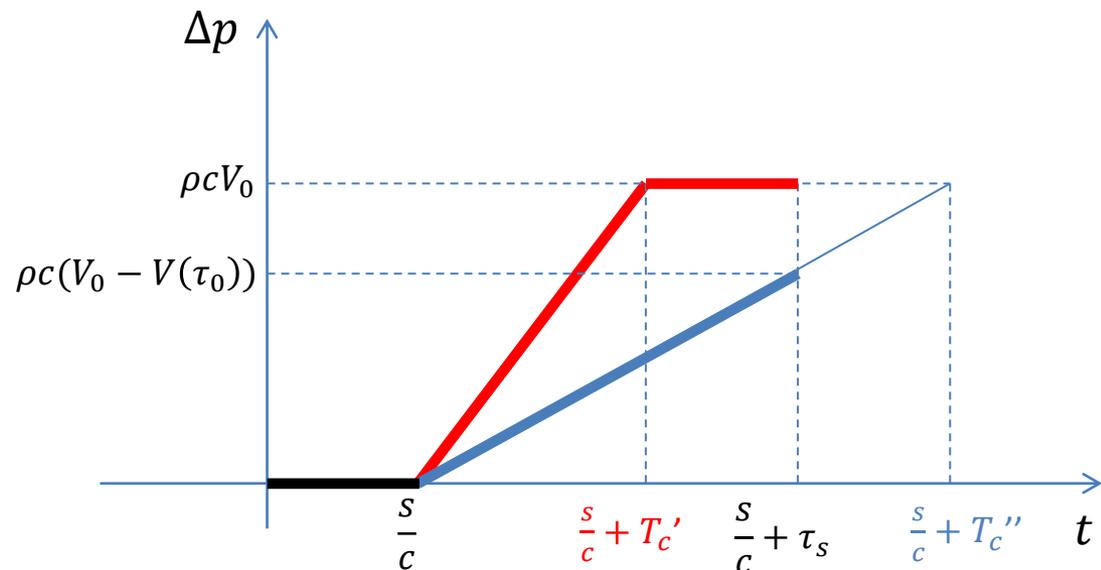
CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Se invece $T_c'' > \tau_0$, la variazione di velocità, e conseguentemente di pressione, avverrà con una pendenza inferiore rispetto al caso precedente. Al tempo τ_0 la velocità non si sarà ancora annullata all'otturatore, pertanto si sarà raggiunta una sovrappressione inferiore al caso precedente. Per $t > \tau_0$, la sovrappressione diminuirà a causa dell'arrivo delle perturbazioni discendenti.

In ambo i casi, la sovrappressione massima raggiunta avverrà entro il tempo τ_0 (T_c nel primo caso, τ_0 nel secondo), dopodiché questo valore potrà solo essere uguagliato, ma mai superato a causa della sovrapposizione con gli effetti delle altre onde.

Il caso $T_c < \tau_0$ che determina il raggiungimento della massima sovrappressione possibile $\rho c V_0$ viene chiamata **chiusura brusca**.

Un discorso analogo vale alla generica sezione s , ma in questo caso, a meno del tempo iniziale s/c , il confronto viene fatto tra il tempo T_c con τ_s .



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Fase di contraccolpo

È la fase successiva a quella di colpo diretto, si ha una sovrapposizione delle onde ascendenti con quelle discendenti.

$$\Delta h = f(s - ct) - f(s - c(t - t_s))$$
$$\frac{c}{g} \Delta V = f(s - ct) + f(s - c(t - t_s))$$

Considero la sezione all'otturatore

$$f(s - ct) \Big|_{s=0} = f(-ct)$$

Essendo funzione solo del tempo, per semplicità introduco una funzione f_0

$$f_0(t) = f(-ct)$$

Considero che la variazione di velocità all'otturatore sia funzione del tempo $V=V(t)$. Valuto inizialmente le perturbazioni di velocità, in particolare le voglio determinare ad un tempo generico t_n , caratterizzato da una V_n . Per $s=0$, $\tau_s = \tau_0$ quindi

$$\frac{c}{g} (V_0 - V_n) = f_0(t_n) + f_0(t_n - \tau_0) = f_0(t_n) + f_0(t_{n-1})$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Avendo definito

$$t_{n-1} = t_n - \tau_0$$

Per cui

$$f_0(t_n) = \frac{c}{g}(V_0 - V_n) - f_0(t_{n-1})$$

Abbiamo quindi trovato una relazione che lega il valore di f_0 a t_n , ad una f_0 al tempo t_{n-1} in funzione di un ritardo di tempo pari a τ_0

Ma lo stesso procedimento lo possiamo applicare nel valutare la f_0 al tempo t_{n-1}

$$\frac{c}{g}(V_0 - V_{n-1}) = f_0(t_{n-1}) + f_0(t_{n-1} - \tau_0) = f_0(t_{n-1}) + f_0(t_{n-2})$$

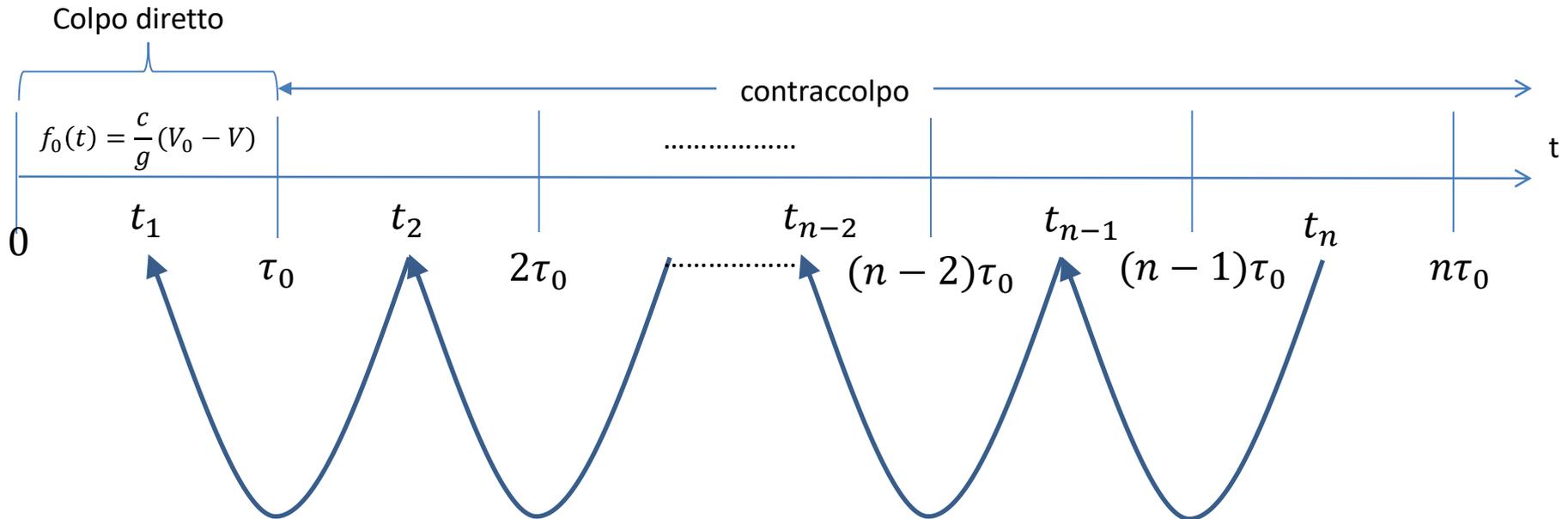
$$f_0(t_{n-1}) = \frac{c}{g}(V_0 - V_{n-1}) - f_0(t_{n-2})$$

Avendo definito

$$t_{n-2} = t_{n-1} - \tau_0$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

In questo modo stiamo procedendo legando di volta in volta la funzione f_0 ad un tempo precedente, con uno sfalsamento di τ_0 . Consideriamo allora il tempo come costituito da un serie di intervalli τ_0 , il tempo t_n cadrà in uno di questi intervalli, ed in successione anche i vari t_{n-1} , t_{n-2} etc. L'obiettivo è arrivare allora ad un tempo t_1 , che cadrà nel primo intervallo $0 < t_1 < \tau_0$, ovvero la fase di colpo diretto, dove la funzione f_0 è nota



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Procedendo in questo modo avremo

$$f_0(t_n) = \frac{c}{g}(V_0 - V_n) - f_0(t_{n-1})$$

$$f_0(t_{n-1}) = \frac{c}{g}(V_0 - V_{n-1}) - f_0(t_{n-2})$$

$$f_0(t_{n-2}) = \frac{c}{g}(V_0 - V_{n-2}) - f_0(t_{n-3})$$

.....

$$f_0(t_2) = \frac{c}{g}(V_0 - V_2) - f_0(t_1)$$

$$f_0(t_1) = \frac{c}{g}(V_0 - V_1)$$

Torno indietro sostituendo mano a mano
i valori calcolati

CORRENTI IN PRESSIONE MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Raccogliendo:

$$f_0(t_n) = \frac{c}{g} [(V_{n-1} - V_n) + (V_{n-3} - V_{n-2}) + \dots + (V_0 - V_1)]$$

Per numero
intervalli pari

$$f_0(t_n) = \frac{c}{g} [(V_{n-1} - V_n) + (V_{n-3} - V_{n-2}) + \dots + (V_1 - V_2)]$$

Per numero
intervalli dispari

$$f_0(t_{n-1}) = \frac{c}{g} [(V_{n-2} - V_{n-1}) + (V_{n-4} - V_{n-3}) + \dots + (V_0 - V_1)]$$

Per numero
intervalli pari

$$f_0(t_{n-1}) = \frac{c}{g} [(V_{n-2} - V_{n-1}) + (V_{n-4} - V_{n-3}) + \dots + (V_1 - V_2)]$$

Per numero
intervalli dispari

Per il carico

$$\Delta h = f(s - ct) - f(s - c(t - t_s))$$

$$\Delta_0 p = p - p_0 = \gamma(f_0(t_n) - f_0(t_{n-1}))$$

Dalle relazioni precedenti

$$\Delta_0 p = \rho c [(V_{n-1} - V_n) - (V_{n-2} - V_{n-1}) + \dots \pm (V_0 - V_1)]$$

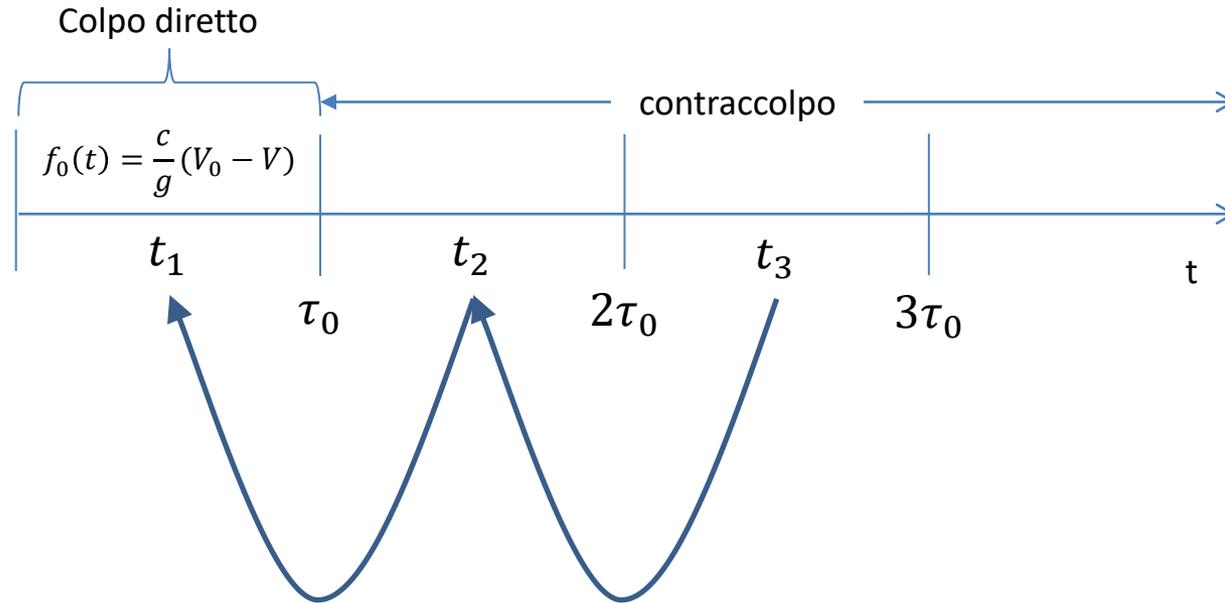
+ per n
dispari

Che nota $V(t)$ permette il calcolo delle sovrappressioni all'otturatore

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Esempio

considerando $n=3$



$$f_0(t_3) = \frac{c}{g}(V_0 - V_3) - f_0(t_2)$$

$$t_2 = t_3 - \tau_0$$

$$f_0(t_2) = \frac{c}{g}(V_0 - V_2) - f_0(t_1)$$

$$t_1 = t_2 - \tau_0 = t_3 - 2\tau_0$$

$$f_0(t_1) = \frac{c}{g}(V_0 - V_1)$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

sostituendo

$$f_0(t_1) = \frac{c}{g} (V_0 - V_1)$$

$$f_0(t_2) = \frac{c}{g} (V_0 - V_2) - \frac{c}{g} (V_0 - V_1)$$

$$f_0(t_3) = \frac{c}{g} (V_0 - V_3) - \frac{c}{g} (V_0 - V_2) + \frac{c}{g} (V_0 - V_1) = \frac{c}{g} [(V_2 - V_3) + (V_0 - V_1)]$$

Se ad esempio $T_c < t_1$, $V_1=V_2=V_3=0$

$$f_0(t_1) = \frac{c}{g} V_0$$

$$f_0(t_2) = 0$$

$$f_0(t_3) = \frac{c}{g} V_0$$

$$\Delta_0 p = p - p_0 = \rho g (f_0(t_3) - f_0(t_2)) = \rho c V_0$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Alla generica sezione s al tempo t_n

$$\Delta_s p = \gamma [f(s - ct_n) - f(s - c(t_n - t_s))]$$

$$\frac{c}{g} \Delta_s V = f(s - ct_n) + f(s - c(t_n - t_s))$$

Ha la stessa f che c'è all'otturatore al tempo $t_n - s/c$

$$f(s - ct_n) = f_0\left(t_n - \frac{s}{c}\right)$$

$$\begin{aligned} f(s - c(t_n - t_s)) &= f_0\left(t_n - \frac{s}{c} - \frac{2(L - s)}{c}\right) = f_0\left(t_n - \frac{2L}{c} + \frac{s}{c}\right) = f_0\left(t_n - \tau_0 + \frac{s}{c}\right) \\ &= f_0\left(t_{n-1} + \frac{s}{c}\right) \end{aligned}$$

sostituendo

$$\Delta_s p = \gamma \left[f_0\left(t_n - \frac{s}{c}\right) - f_0\left(t_{n-1} + \frac{s}{c}\right) \right]$$

$$\frac{c}{g} \Delta_s V = f_0\left(t_n - \frac{s}{c}\right) + f_0\left(t_{n-1} + \frac{s}{c}\right)$$

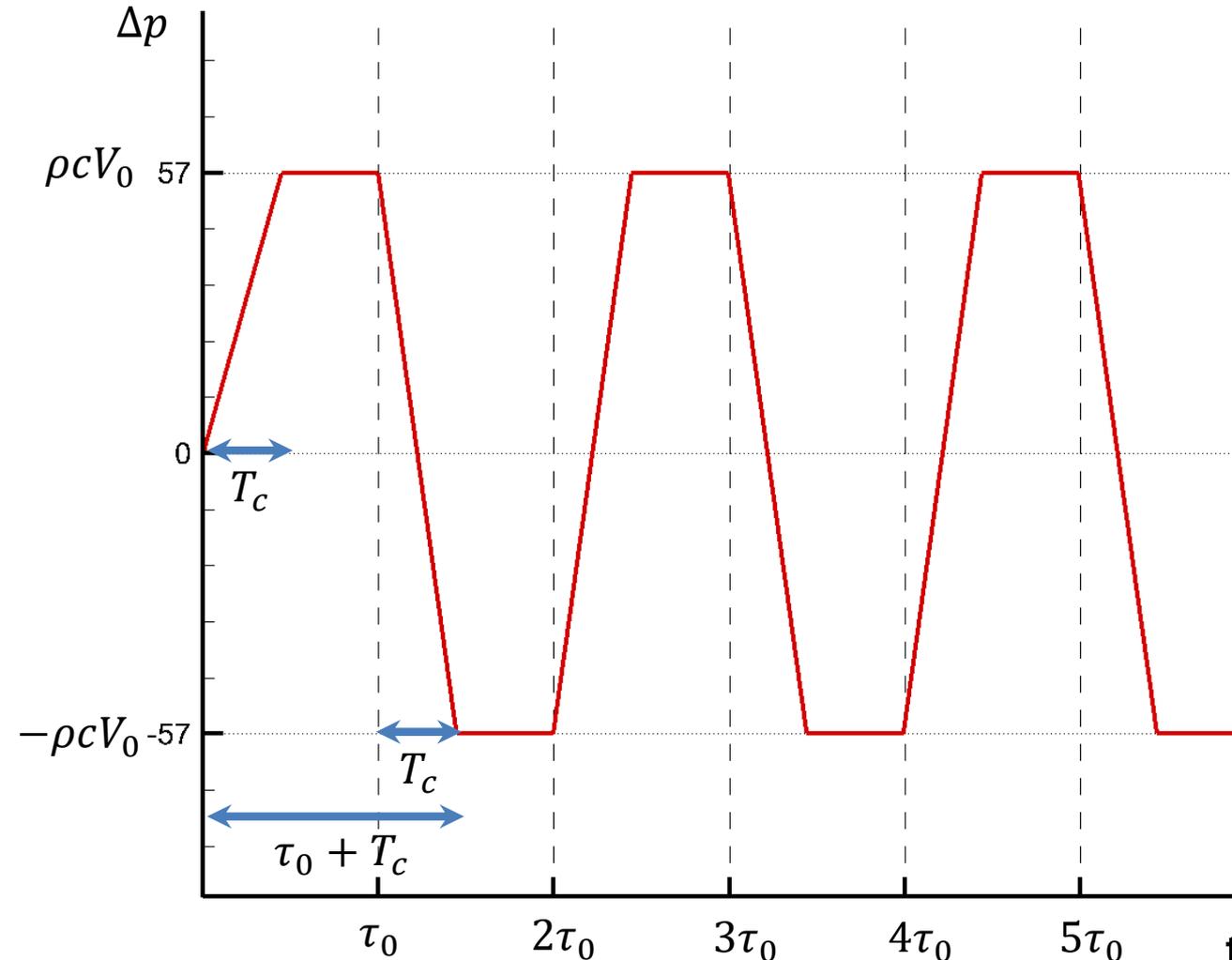
E si può usare una metodologia analoga alla precedente

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Di seguito alcuni esempi di profili nel tempo delle sovrappressioni, calcolate col metodo delle caratteristiche. Esercizio 9.2 Citrini-Nosedà, andamento della pressione alla sezione otturatore con $T_c < \tau_0$. Consideriamo che la velocità vari con

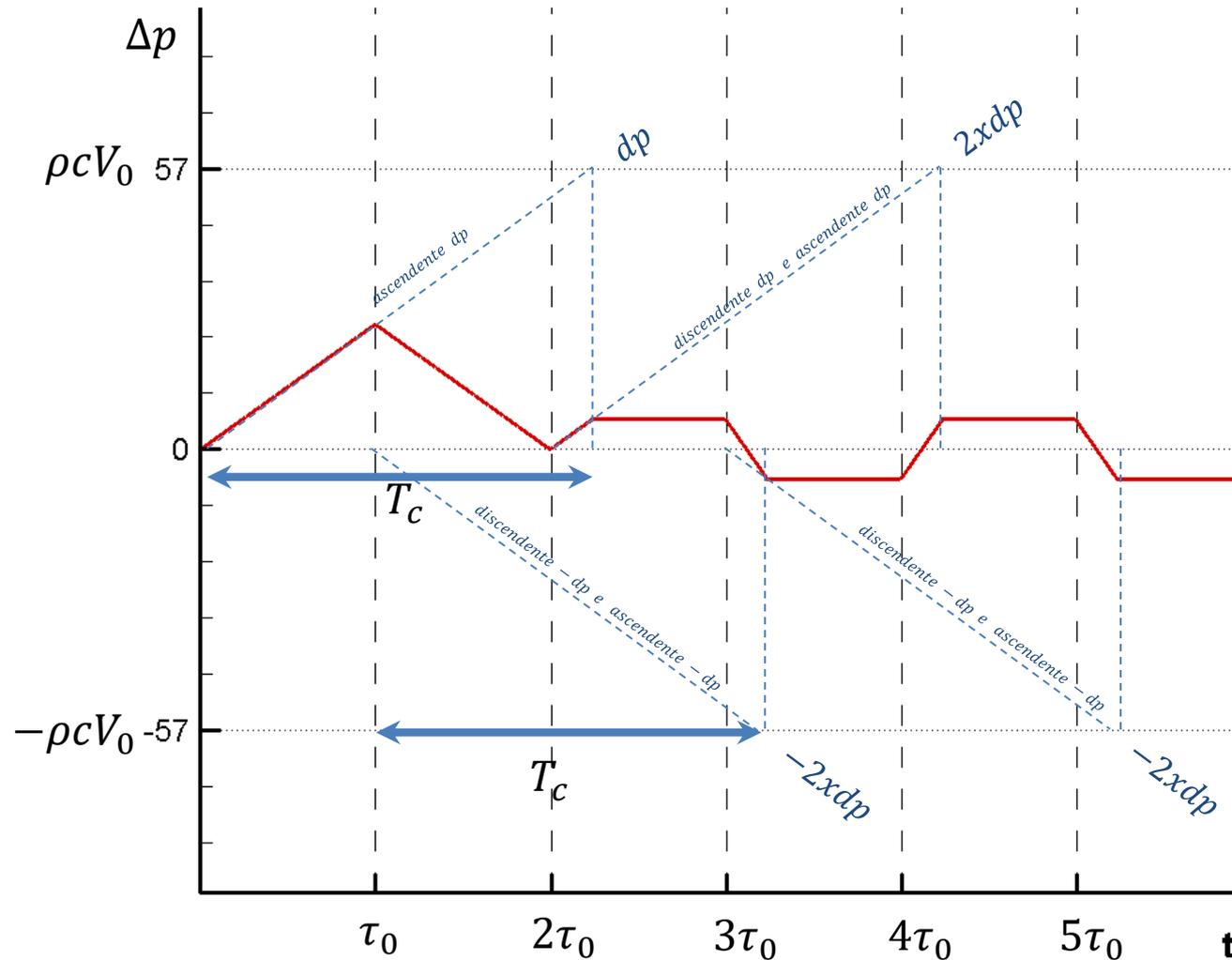
$$V(t) = V_0 \left(1 - \frac{t}{T_c} \right)$$

La pressione cresce fino al tempo T_c , poi non essendoci più variazioni di velocità, la pressione rimane costante fino a τ_0 . Per $t > \tau_0$ la sezione inizia a risentire, per un intervallo di tempo T_c , dell'onda discendente negativa e di come questa si riflette all'otturatore, scendendo con pendenza doppia. Il processo prosegue con ragionamento analogo.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

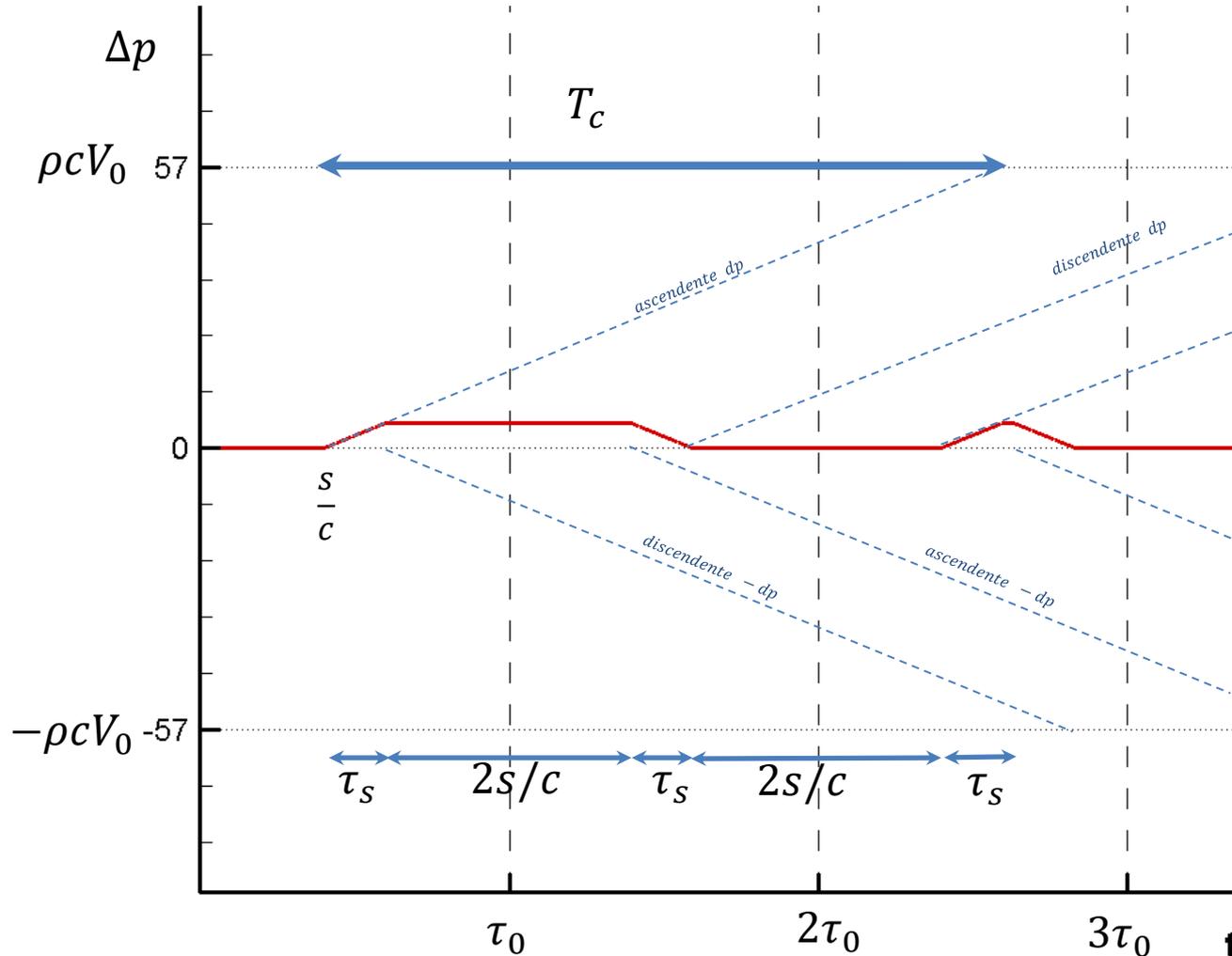
Esempio (es. 9.3 Citrini Nosedà) di andamento della pressione alla sezione otturatore con $T_c > \tau_0$. In questo caso la pressione cresce fino a τ_0 , a causa della sovrappressione ascendente iniziale determinata dalla chiusura dell'otturatore. Fino a T_c la sezione risentirà di questo primo treno di sovrappressioni. Al tempo τ_0 , però, la sezione inizia a risentire,



per un intervallo di tempo T_c , dell'onda discendente negativa e di come questa si riflette all'otturatore. Quindi a fronte di un incremento dp risente di un decremento $2dp$, da cui la riduzione generale della sovrappressione. Ad ogni intervallo di tempo caratteristico τ_0 , per un periodo T_c , la sezione risentirà di una nuova serie di perturbazioni, da cui il grafico in figura.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

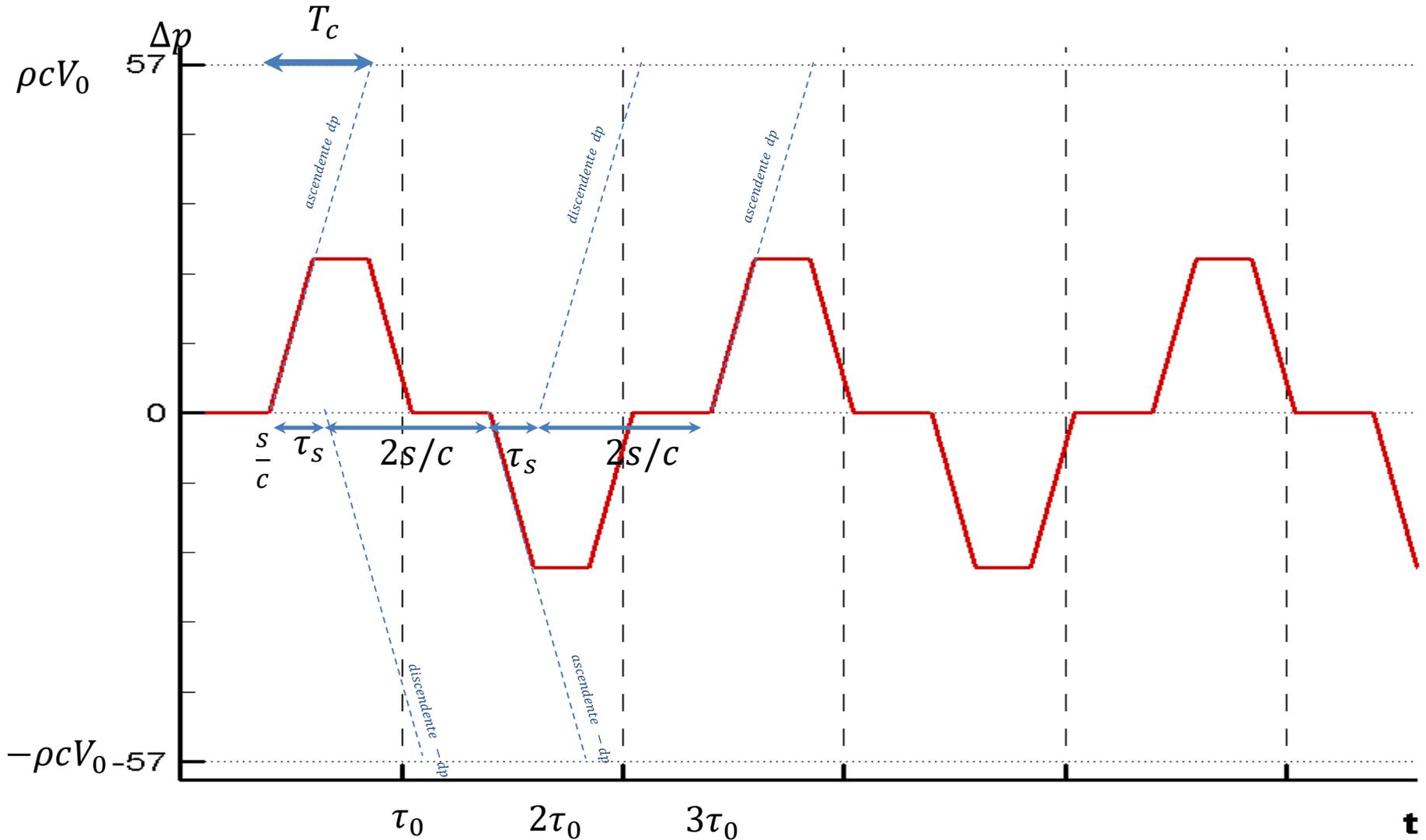
Esempio (es. 9.3 Citrini Nosedà) di andamento della pressione ad una sezione intermedia ($s=800\text{m}$) con $T_c > \tau_0$. La pressione rimane inalterata fino al tempo s/c , ovvero quando la prima onda ascendente prodotta all'otturatore raggiunge la sezione considerata, poi cresce per un intervallo τ_s . In questo caso, oltre alla durata T_c del treno di onde, la sezione, in



termini di pressione, risente di due tempi caratteristici: τ_s e $2s/c$. Il primo rappresenta l'intervallo temporale con cui un'onda ascendente che transita per la sezione arriva all'imbocco, si riflette e torna ad investire la sezione. Il secondo rappresenta l'intervallo di tempo con cui un'onda discendente che transita per la sezione, arriva all'otturatore, si riflette e torna alla sezione, da cui il grafico in figura. 61

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Esempio (es. 9.2 Citrini Nosedà) di andamento della pressione ad una sezione intermedia ($s=800\text{m}$) con $T_c < \tau_0$.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Nel grafico della pagina precedente, la pressione rimane inalterata fino al tempo s/c , qui risente dell'onda ascendente proveniente dall'otturatore per un intervallo T_c . Dopo un intervallo τ_s , però, la sezione risente dell'onda discendente con sottopressione $-dp$, per cui la pressione non aumenta più, ma per sovrapposizione degli effetti rimane costante. Al tempo $s/c+T_c$, la prima onda ascendente è terminata, e la sezione risente solo della discendente con $-dp$, quando questa termina al tempo $s/c+\tau_s+T_c$ la pressione è ad un valore inalterato rispetto alle condizioni iniziali. A partire dal tempo $s/c+\tau_s$, dopo un intervallo $2s/c$ la discendente negativa si è riflessa all'otturatore con lo stesso segno, determinando una ascendente negativa, ed è arrivata alla sezione, la pressione scende, e così via.

Nel caso di sovrappressione all'otturatore, con $T_c > \tau_0$, la sovrappressione massima si raggiunge durante la fase di colpo diretto, e può essere valutata al termine di questa fase, cioè al tempo τ_0 :

$$\Delta p = \rho c(V_0 - V) = \rho c \left(V_0 - V_0 \left(1 - \frac{\tau_0}{T_c} \right) \right) = \rho c V_0 \frac{\tau_0}{T_c} = \rho c V_0 \frac{2L}{c} \frac{1}{T_c} = \frac{2\rho L V_0}{T_c}$$

Nota come formula di Micaud.

Per sezioni intermedie, anche in questo caso la sovrappressione massima si valuta al termine della fase di colpo diretto, quindi a $s/c+\tau_s$. A questo tempo, la variazione di velocità alla sezione è la stessa che ha caratterizzato l'otturatore ad un tempo inferiore di una quantità s/c per cui

$$\Delta p = \rho c(V_0 - V) = \rho c \left(V_0 - V_0 \left(1 - \frac{\tau_s}{T_c} \right) \right) = \rho c V_0 \frac{\tau_s}{T_c}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Risoluzione del colpo d'ariete col metodo delle caratteristiche

Riconsidero le equazioni del moto, ma questa volta con segno concorde alla direzione del moto permanente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

Ne considero una loro combinazione attraverso un operatore λ

$$\lambda \left[\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \right] + \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Raccolgo i termini a seconda che siano velocità V o carichi h

$$\left[\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\lambda}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \right] + \left[\lambda \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} \right] = 0$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

ovvero

$$\frac{\lambda}{g} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{g}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial s} \right] + \frac{g}{c^2} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\lambda c^2}{g} \frac{\partial h}{\partial s} \right] = 0$$

Richiamo le espressioni di derivata totale per V e h

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial h}{\partial s}$$

I termini tra parentesi quadra sono simili come forma, alle relative derivate totali, a meno del termine ds/dt . Perché fossero identiche, sarebbe necessario che:

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{ds}{dt}$$

per la parte in V , mentre per la parte in h :

$$\frac{\lambda c^2}{g} = \frac{ds}{dt}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Uguagliando le due relazioni

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{\lambda c^2}{g}$$

si ricava

$$\lambda = \pm \frac{g}{c}$$

Quindi, **se e solo se**, l'operatore introdotto, assume valori $\lambda=g/c$ o $\lambda=-g/c$ possiamo assumere che i termini dentro parentesi quadre siano derivate totali, e possiamo riscrivere l'equazione come

$$\frac{\lambda dV}{g dt} + \frac{g dh}{c^2 dt} = 0$$

Andiamo a sostituire i due possibili valori trovati per λ , se $\lambda=g/c$, allora:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{g}{\lambda} = g \frac{c}{g} = c \quad \text{e} \quad \frac{dV}{dt} + \frac{g dh}{c dt} = 0$$

Mentre nell'altro caso ($\lambda=-g/c$)

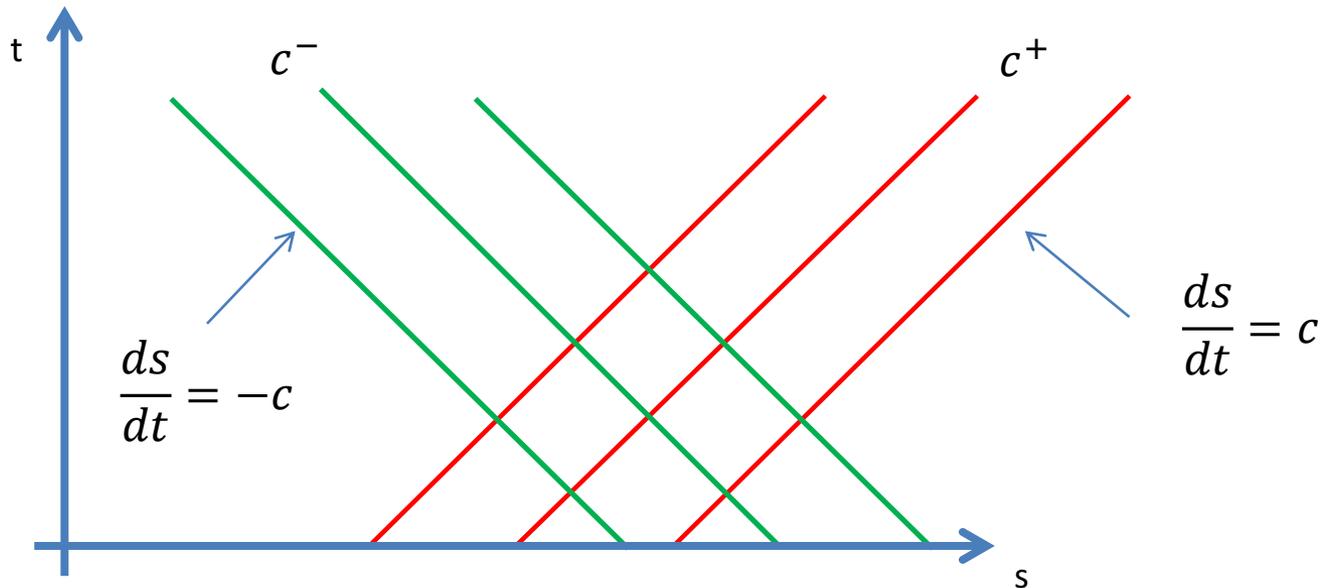
$$\frac{ds}{dt} = -c \quad \text{e} \quad \frac{dV}{dt} - \frac{g dh}{c dt} = 0$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Ricapitolando, ho ottenuto due equazioni ordinarie in V e h , che chiamerò equazioni C^+ e C^-

$$\begin{array}{l} \text{equazione } C^+ \\ \text{equazione } C^- \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} + \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = 0 \\ \frac{dV}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Vale solo se} \\ \text{Vale solo se} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = c \\ \frac{ds}{dt} = -c \end{array}$$

Le equazioni $ds/dt = \pm c$ sono dette linee caratteristiche, se le osserviamo in un sistema cartesiano $s-t$, costituiscono una famiglia di rette con coefficiente angolare $+c$ o $-c$, lungo le quali valgono le equazioni C^+ e C^- , dove l'intercetta sull'asse delle s dipende dalle condizioni iniziali

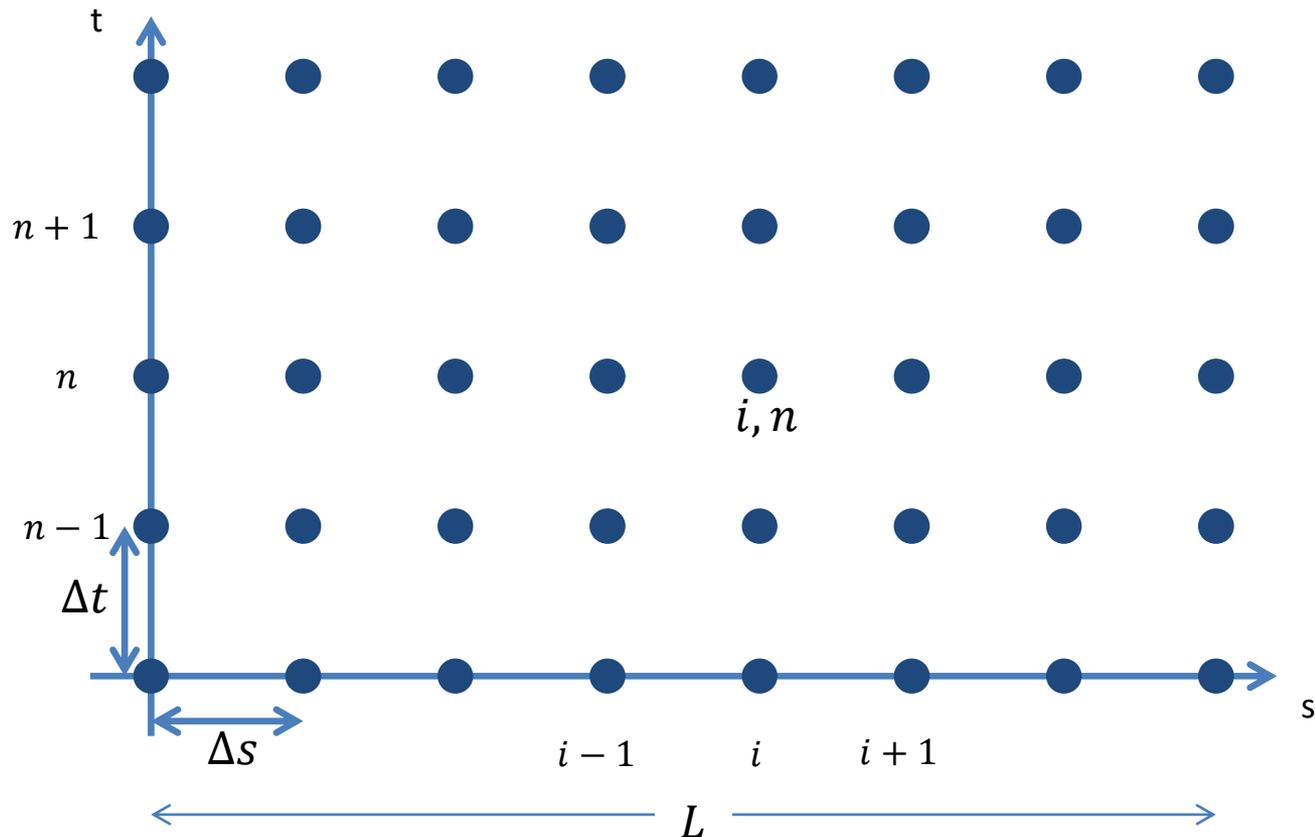


CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Consideriamo numericamente quanto appena visto, quindi con un approccio discreto. Prendiamo una discretizzazione nello spazio con un passo Δs per la lunghezza della condotta L , nel tempo invece un passo temporale Δt , i loro valori non sono scelti in modo arbitrario, ma forzando l'appartenenza dei nodi derivati dalla discretizzazione alle rette caratteristiche. Pertanto:

Se fisso Δt deve essere $\Delta s = c\Delta t$

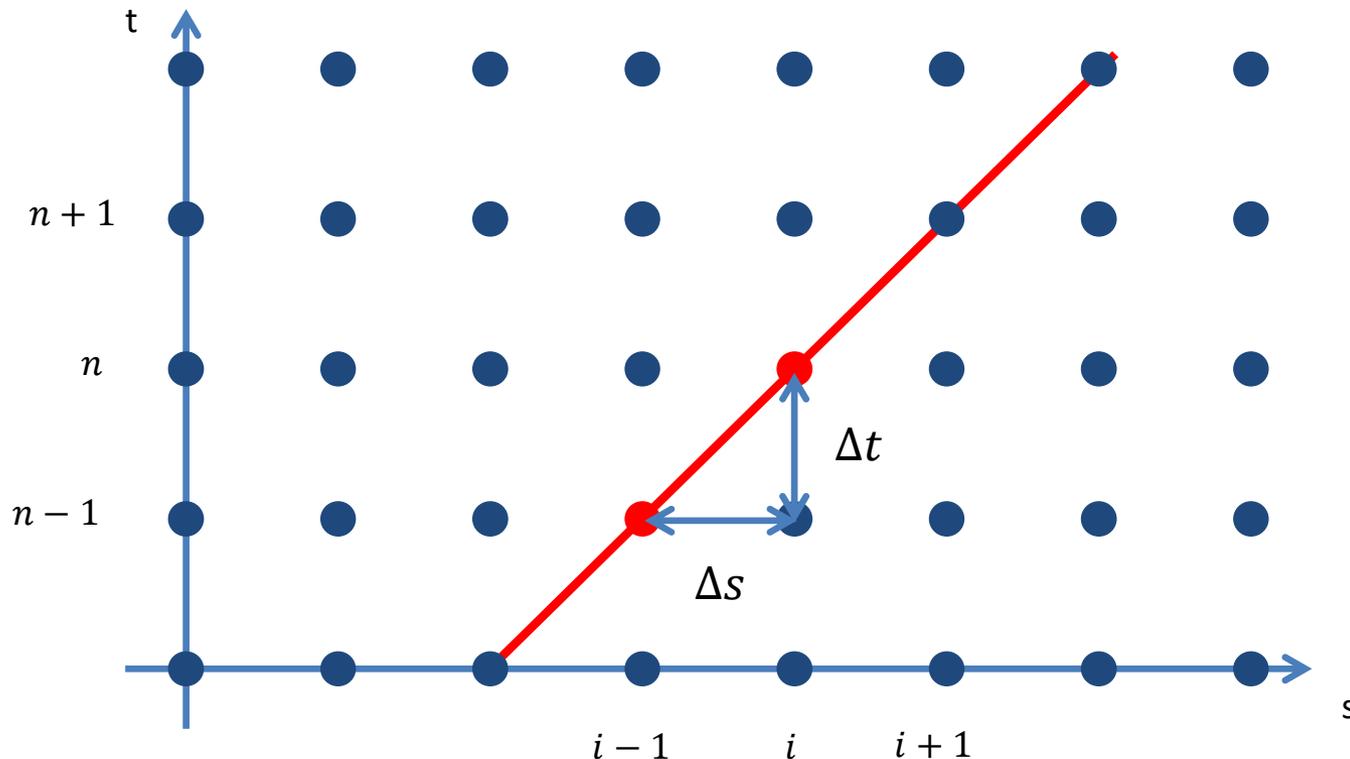
Se fisso Δs deve essere $\Delta t = \Delta s/c$



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Fissato un indice i per muovermi nello spazio ed un indice n per muovermi nel tempo, ogni nodo risulterà identificato da una coppia (i,n) . Voglio valutare al nodo (i,n) la mia equazione C^+ , considerando che la linea caratteristica passante per il nodo, necessariamente passa attraverso altri nodi della nostra discretizzazione

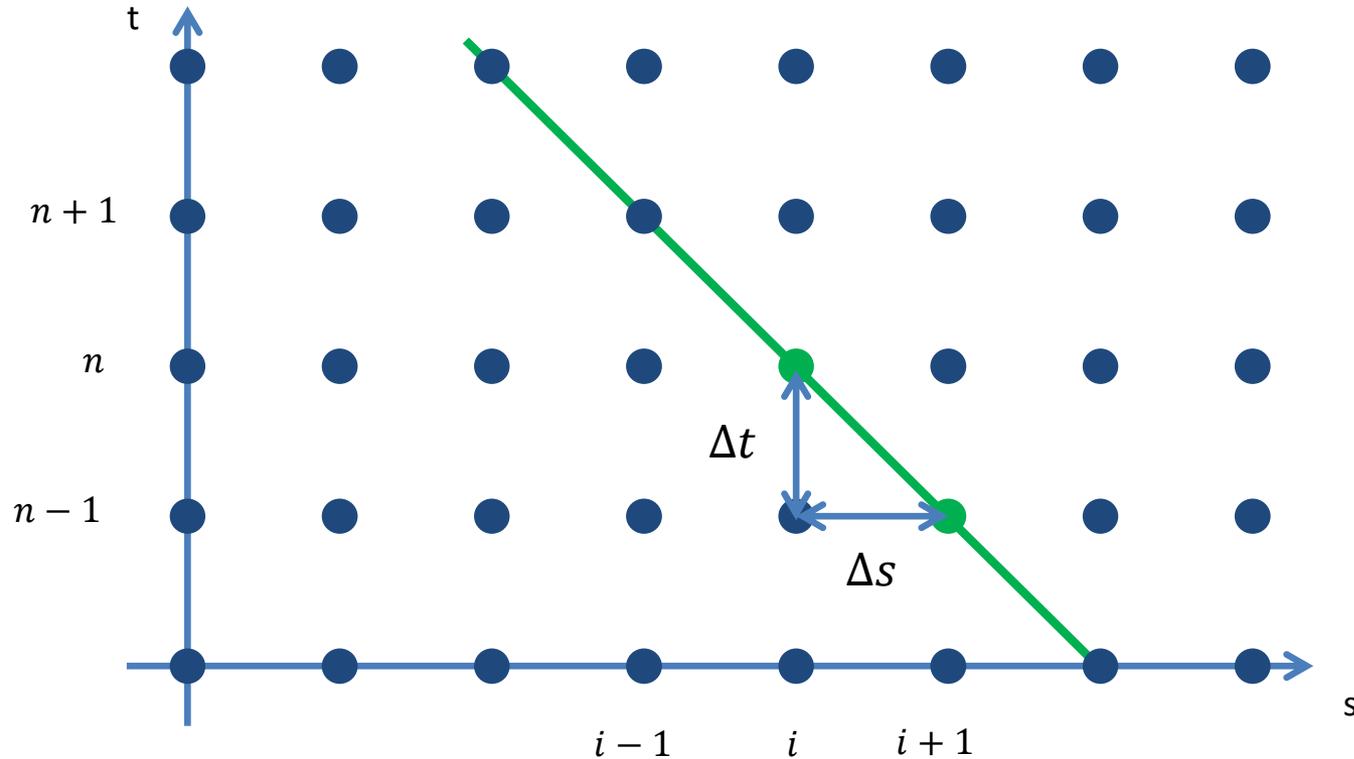
$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{V_i^n - V_{i-1}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{g}{c} \frac{h_i^n - h_{i-1}^{n-1}}{\Delta t} = 0$$



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Ma il nodo (i,n) risulterà anche di intersezione con una linea C^- per cui varrà anche

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_i^n - V_{i+1}^{n-1}}{\Delta t} - \frac{g}{c} \frac{h_i^n - h_{i+1}^{n-1}}{\Delta s} = 0$$



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Ricapitolando al nodo (i,n) varrà contemporaneamente

$$\frac{V_i^n - V_{i-1}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{g}{c} \frac{h_i^n - h_{i-1}^{n-1}}{\Delta t} = 0 \qquad \frac{V_i^n - V_{i+1}^{n-1}}{\Delta t} - \frac{g}{c} \frac{h_i^n - h_{i+1}^{n-1}}{\Delta t} = 0$$

Ognuna delle quali dipende contemporaneamente da V ed h al tempo n . Considerando una loro combinazione, dalla prima equazione più la seconda ottengo:

$$V_i^n = \frac{1}{2} \left[V_{i-1}^{n-1} + V_{i+1}^{n-1} + \frac{g}{c} (h_{i-1}^{n-1} - h_{i+1}^{n-1}) \right]$$

In cui la velocità al passo n , dipende solo dalle variabili al passo $n-1$. Prendendo ora la prima equazione meno la seconda ottengo:

$$h_i^n = \frac{1}{2} \left[h_{i-1}^{n-1} + h_{i+1}^{n-1} + \frac{c}{g} (V_{i-1}^{n-1} - V_{i+1}^{n-1}) \right]$$

In cui il carico al passo n , dipende solo dalle variabili al passo $n-1$. Attraverso queste due espressioni, noto il passo $n-1$, possiamo calcolare i valori di V e h al generico nodo (i,n)

Le equazioni appena viste si applicano solo alla parte centrale del grigliato, visto lo stencil spaziale richiesto che implica $i-1$ e $i+1$, e la dipendenza dal passo temporale precedente.

Pertanto se $i=0, i_{tot}$ ed $n=0, n_{tot}$, saranno applicate nel range $i=1, i_{tot}-1$ e $n=1, n_{tot}$

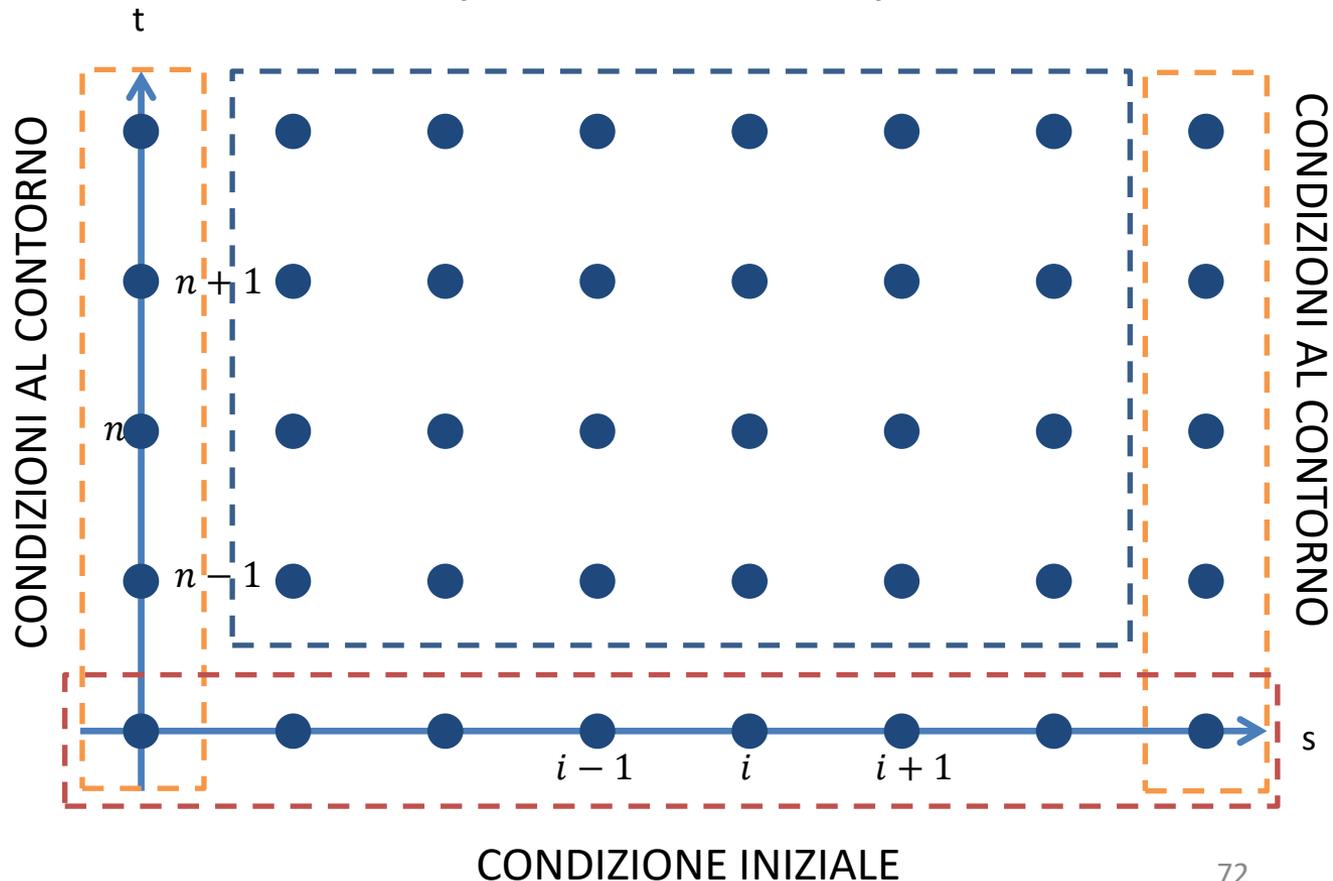
CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Per la loro evoluzione nello spazio e nel tempo, risulta necessario definire sia una condizione iniziale, che una condizione al contorno.

La condizione iniziale sarà quella di moto permanente, al tempo $t=0$ ($n=0$) $h=h_0$ e $V=V_0$

La condizione al contorno sarà: all'imbocco $s=0$ ($i=0$) $h=h_0$, all'otturatore $s=L$ ($i=i_{tot}$) $V=V(t)$

Dove con $V(t)$ si intende la legge di variazione nota di velocità all'otturatore, se questo è completamente chiuso al tempo T_c , avremo che per $t>T_c$ $V=0$



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

Rimane da definire le condizioni al contorno per V ad $s=0$ e per h ad $s=L$, queste verranno valutate al tempo n in funzione di quanto è stato calcolato internamente al campo spaziale allo stesso tempo

$$\text{Ad } s=0 \quad V_0^n = V_1^n + \frac{g}{c} (h_0^n - h_1^n)$$

$$\text{Ad } s=L \quad h_{i_{tot}}^n = h_{i_{tot}-1}^n - \frac{c}{g} (V_{i_{tot}}^n - V_{i_{tot}-1}^n)$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – CONDOTTE

Sistemi di condotte

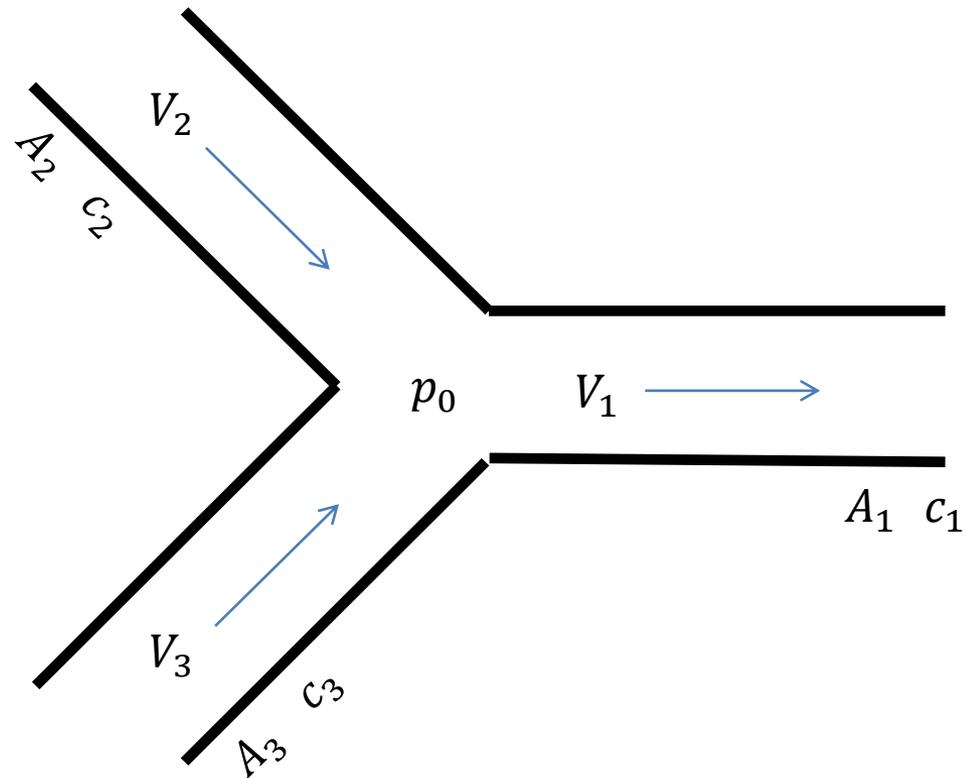
Il caso di condotta a diametro e spessore costante è una condizione ideale. Di norma variano per spessore e diametro, oppure insistono su nodi di intersezione, determinando delle discontinuità che inducono modifiche alle onde di pressione.

Caso nodo con tre condotte.

Consideriamo di essere in una condizione di moto permanente, con velocità V_1 , V_2 e V_3 , mentre le condotte sono definite attraverso la loro area A_1 , A_2 , A_3 ed una celerità caratteristica c_1 , c_2 , c_3 .

Assumo per ipotesi che le perdite di carico e le altezze cinetiche siano trascurabili, e sia p_0 la pressione al nodo e quindi ai rami. Al nodo per la continuità avrò:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 + A_3 V_3$$

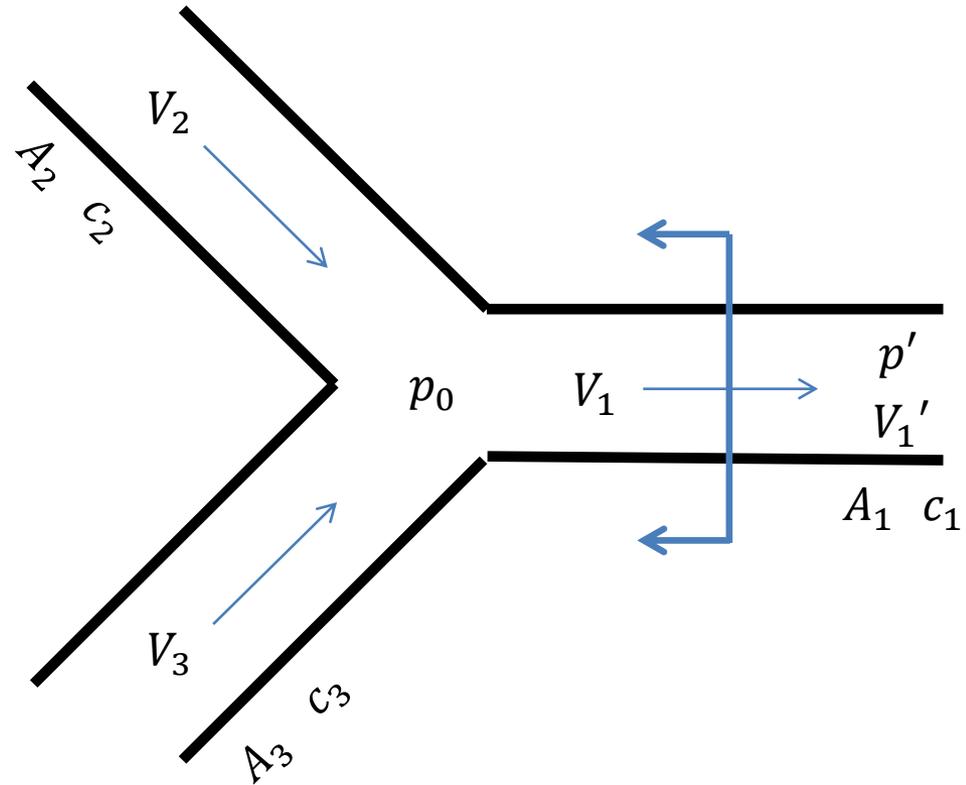


CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – CONDOTTE

Considero che il ramo 1 sia interessato da una perturbazione ascendente, che risale verso il nodo. Questa determina una variazione di velocità $V_1 \rightarrow V_1'$ a cui corrisponde una variazione di pressione $p_0 \rightarrow p'$, che tra loro sono legate attraverso la relazione:

$$p' - p_0 = \rho c_1 (V_1 - V_1')$$

Quando la perturbazione raggiunge il nodo, l'intero ramo 1 sarà caratterizzato da p' e V_1' , mentre al nodo per congruenza dei carichi avremo una nuova pressione p'' . A questo punto la perturbazione si trasmetterà lungo i rami 2 e 3 con un'onda ascendente, ed in parte si rifletterà determinando la formazione di un'onda discendente lungo il ramo 1. Nel ramo 2 e 3 si verrà a determinare una nuova condizione di velocità V_2' e V_3' con pressione p'' , mentre nel ramo 1, p'' e v_1''



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – CONDOTTE

In questa fase varrà

$$p'' - p_0 = \rho c_2 (V_2 - V_2') \quad \text{ascendente}$$

$$p'' - p_0 = \rho c_3 (V_3 - V_3') \quad \text{ascendente}$$

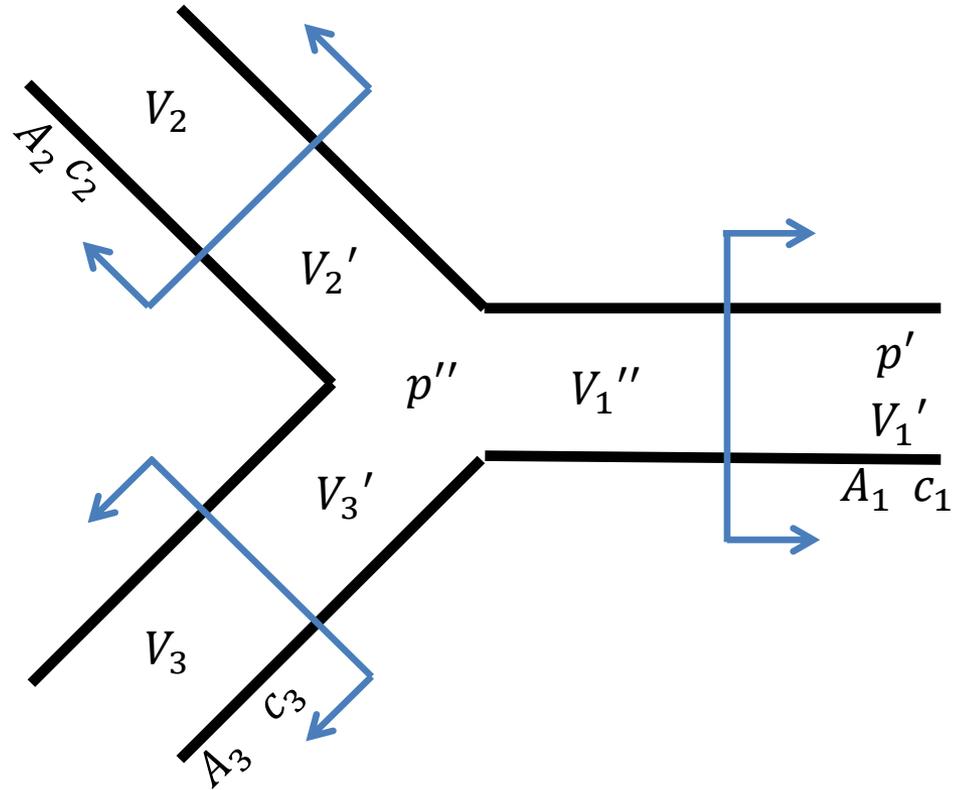
$$p' - p'' = \rho c_1 (V_1' - V_1'') \quad \text{discendente}$$

Mentre l'equazione di continuità varrà

$$A_1 V_1'' = A_2 V_2' + A_3 V_3'$$

Per risolvere il sistema di equazioni ottenute, eliminiamo la dipendenza dalla velocità, considero innanzitutto la differenza tra le equazioni di continuità ricavate:

$$A_1 (V_1 - V_1'') = A_2 (V_2 - V_2') + A_3 (V_3 - V_3')$$



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – CONDOTTE

Per i rami 2 e 3 ho

$$p'' - p_0 = \rho c_2 (V_2 - V_2') \quad (V_2 - V_2') = \frac{p'' - p_0}{\rho c_2}$$

$$p'' - p_0 = \rho c_3 (V_3 - V_3') \quad (V_3 - V_3') = \frac{p'' - p_0}{\rho c_3}$$

Per il ramo 1

$$\left. \begin{aligned} p' - p_0 &= \rho c_1 (V_1 - V_1') \\ p' - p'' &= \rho c_1 (V_1' - V_1'') \end{aligned} \right\} p' - p_0 + p' - p'' = \rho c_1 (V_1 - V_1' + V_1' - V_1'')$$

$$(V_1 - V_1'') = \frac{(2p' - 2p_0) - (p'' - p_0)}{\rho c_1}$$

Ricavata aggiungendo $+p_0$ e $-p_0$, sostituisco le espressioni ricavate per la velocità nella equazione derivata dalle equazioni di continuità

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – CONDOTTE

ottengo

$$\frac{A_1}{\rho c_1} (2p' - 2p_0) - \frac{A_1}{\rho c_1} (p'' - p_0) = \frac{A_2}{\rho c_2} (p'' - p_0) + \frac{A_3}{\rho c_3} (p'' - p_0)$$

$$\frac{A_1}{\rho c_1} (2p' - 2p_0) = \frac{A_1}{\rho c_1} (p'' - p_0) + \frac{A_2}{\rho c_2} (p'' - p_0) + \frac{A_3}{\rho c_3} (p'' - p_0)$$

Da cui

$$s = \frac{p'' - p_0}{p' - p_0} = \frac{\frac{2A_1}{c_1}}{\frac{A_1}{c_1} + \frac{A_2}{c_2} + \frac{A_3}{c_3}}$$

Ho pertanto definito un coefficiente s , di trasmissione delle perturbazioni, funzione delle sole aree e celerità dei rami, che va a definirmi il rapporto tra l'onda ascendente trasmessa nei rami con l'onda ascendente incidente al nodo.

$$r = \frac{p'' - p'}{p' - p_0} = s - 1$$

Il coefficiente r di riflessione, definito a partire da s , mi identifica invece il rapporto tra l'onda riflessa discendente con l'onda ascendente incidente al nodo

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – CONDOTTE

Condotta - Variazione brusca della sezione.

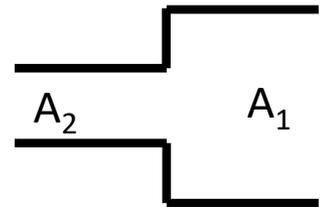
Lo riconduco, nella ipotesi di celerità costante, al caso di nodo in cui affluiscono due condotte di diametro diverso. Dalle relazioni viste precedentemente ottengo:

$$s = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \qquad r = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

Caso $A_2 < A_1$ restringimento sezione: $s > 1$ e $0 < r < 1$

L'onda trasmessa è superiore a quella incidente, l'onda riflessa ha segno concorde con quella incidente e determina un peggioramento delle condizioni già presenti nel ramo.

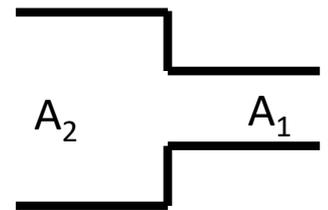
Nel caso limite, se $A_2 = 0$, è come fossimo in presenza di una parete, il coefficiente di riflessione assume un valore pari a $r=1$, l'onda riflessa uguale alla incidente (nota: caso sezione otturatore nel colpo d'ariete)



Caso $A_2 > A_1$ allargamento sezione: $0 < s < 1$ e $r < 0$

L'onda trasmessa è inferiore a quella incidente, mentre l'onda riflessa cambia di segno.

Nel caso limite di $A_2 \gg A_1$, che tende all'infinito, otteniamo $s=0$ e $r=-1$ l'onda trasmessa è nulla e quella riflessa è uguale e contraria alla incidente. (nota: questa configurazione può essere vista come una condotta collegata ad un serbatoio, si rimanda a quanto visto nel colpo d'ariete alla sezione di imbocco)



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – CONDOTTE

Ricordiamo che

$$c = \frac{c^*}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon D}{eE}}}$$

Allora aver supposto celerità costante con condotte di diametro diverso, implica che queste devono necessariamente avere spessore diverso.

Spessore aumenta → celerità aumenta

Diametro aumenta → celerità si riduce

Condotta – diametro costante ma con variazione dello spessore.

In questo caso la dipendenza dall'area per i coefficienti sparisce, mentre considero che la celerità assuma valori diversi grazie all'uso di spessori diversi. Ottengo

$$\frac{c_2}{c_1}$$

$$s = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}$$

$$r = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}$$

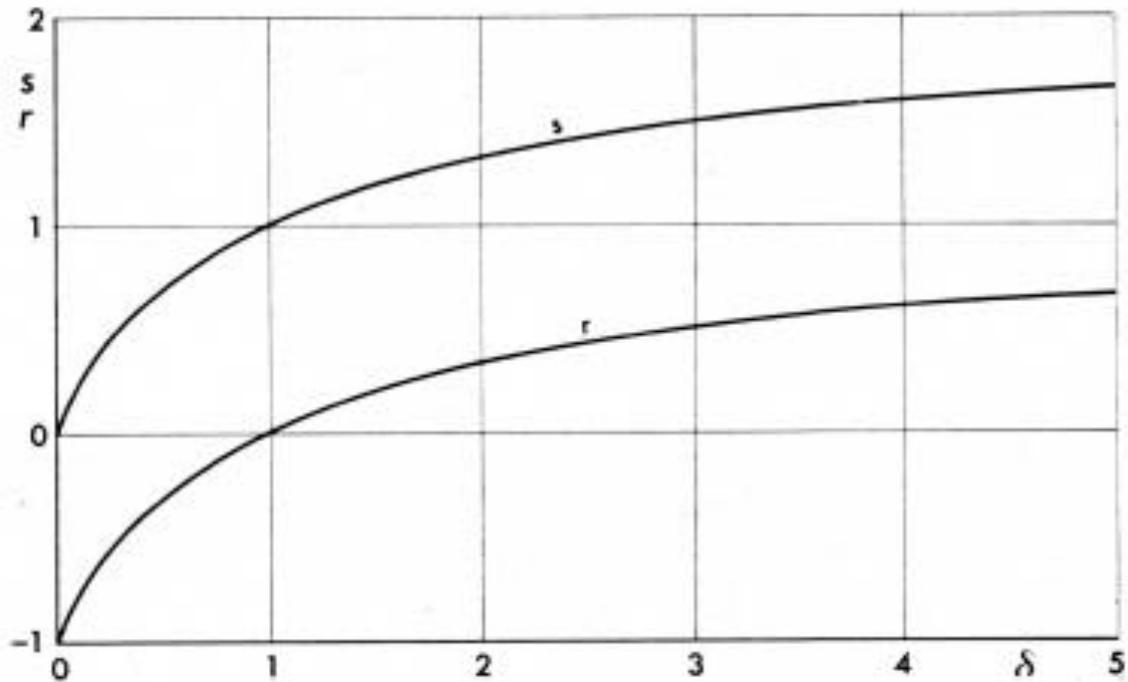
da

$$s = \frac{\frac{2}{c_1}}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} = \frac{2}{c_1} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

CORRENTI IN PRESSIONE MOTO VARIO – COLPO D'ARIETE

S ed r hanno lo stesso andamento, sia che si consideri $\delta = \frac{A_1}{A_2}$

oppure $\delta = \frac{c_2}{c_1}$



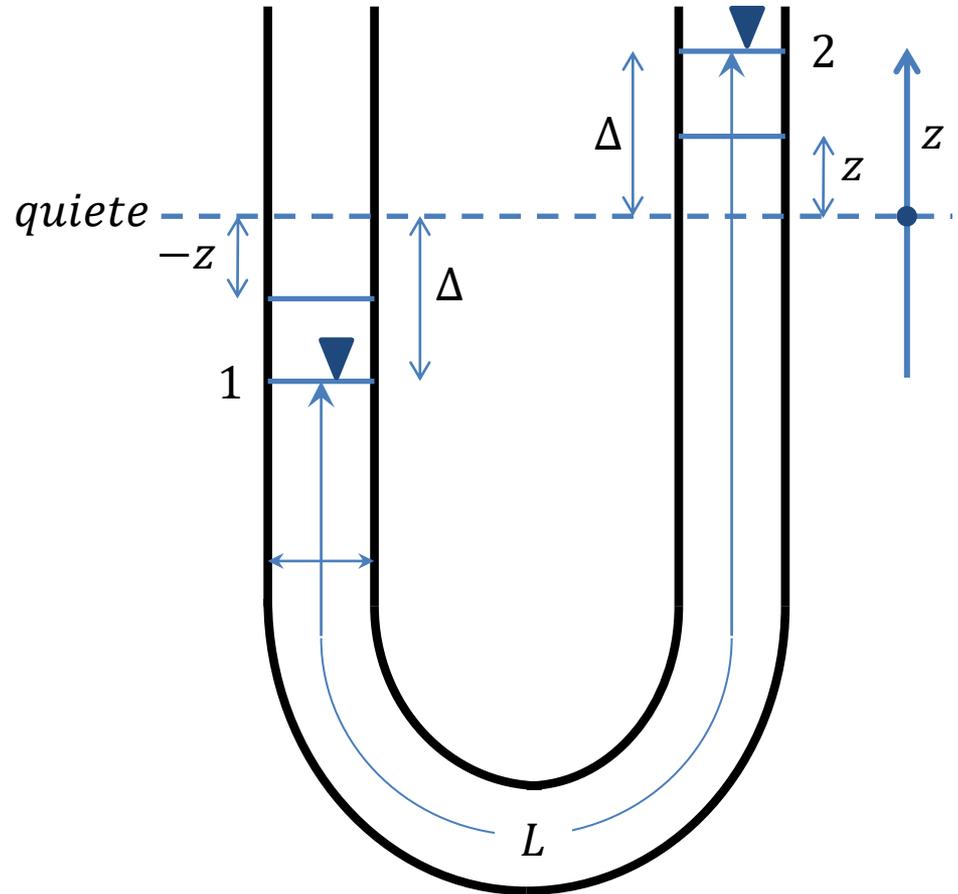
CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Oscillazioni di massa in un tubo ad U

Consideriamo una configurazione di condotta di lunghezza L ad U, come in figura, con le due estremità a contatto con l'atmosfera. Si prenda una condizione iniziale con un dislivello imposto pari a 2Δ , rispetto alla condizione di quiete.

La condizione non è stabile, ed il fluido tenderà a tornare al livello di quiete con un processo di moto vario.

Il processo avviene in modo lento (si pensi al confronto col caso visto del colpo d'ariete), per cui si potrà considerare il fluido come incompressibile e la condotta come indeformabile.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Le equazioni che governano il moto vario, sono quelle che già precedentemente abbiamo ricavato

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0$$

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0$$

Che nell'ipotesi di condotta indeformabile e fluido incomprimibile si riducono a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Dall'equazione di continuità, espressa in termini di area e velocità, ricaviamo che

$$\frac{\partial AV}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

Ovvero, lungo la coordinata spaziale, la velocità rimane costante, e funzione solo del tempo

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Integrando l'equazione del moto lungo s abbiamo

$$\int \frac{\partial h}{\partial s} ds + \int \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} ds + \int J ds = 0$$

Il primo termine risulterà semplicemente la differenza di carico tra il livello 2 ed il livello 1

$$\int \frac{\partial h}{\partial s} ds = h_2 - h_1 = \left(z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} \right) - \left(-z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} \right) = 2z$$

Il secondo termine, vista l'equazione di continuità, non dipende da s , e potrà essere scritto come

$$\int \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{L}{g} \frac{dV}{dt}$$

Il terzo termine, date le espressioni di J in termini di velocità, potrà essere scritto, seguendo le stesse motivazioni del termine precedente, come:

$$\int J ds = JL$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

raccogliendo

$$2z + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} + JL = 0$$

L'equazione è in funzione di V e z , le nostre variabili di interesse, per ottenere una soluzione, serve una equazione aggiuntiva. Dall'equazione di continuità possiamo scrivere

$$\frac{dz}{dt} = V$$

La variazione del pelo libero nel tempo, è necessariamente funzione della velocità che si instaura

Caso di liquido perfetto

Dal sistema di equazioni di cui sopra, ricavo una soluzione analitica sotto l'ipotesi di perdite di carico nulle, $J=0$.

da $\frac{dz}{dt} = V$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$$

da $2z + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} = 0$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2g}{L} z$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Dove ω ha le dimensioni di una frequenza (s^{-1}), l'equazione appena determinata ammette una soluzione del tipo:

$$z = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$$

Dove c_1 e c_2 sono costanti da determinare con le condizioni al contorno. Sappiamo che al tempo $t=0$, $z=\Delta$, $v=0$. Valuto allora la soluzione al tempo $t=0$:

$$z \Big|_{t=0} = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = \Delta \quad \rightarrow \quad c_2 = \Delta$$

$$V \Big|_{t=0} = \frac{dz}{dt} \Big|_{t=0} = c_1 \omega \cos(0) - c_2 \omega \sin(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

pertanto

$$z = \Delta \cos(\omega t)$$

$$V = -\omega \Delta \sin(\omega t)$$

Il moto è oscillatorio con periodo $T=\pi/\omega$ e ampiezza Δ per la z , mentre ampiezza $\omega \Delta$ per la velocità. Avendo trascurato le perdite di carico, il moto non si smorzerà nel tempo, non raggiungendo mai la situazione di quiete.

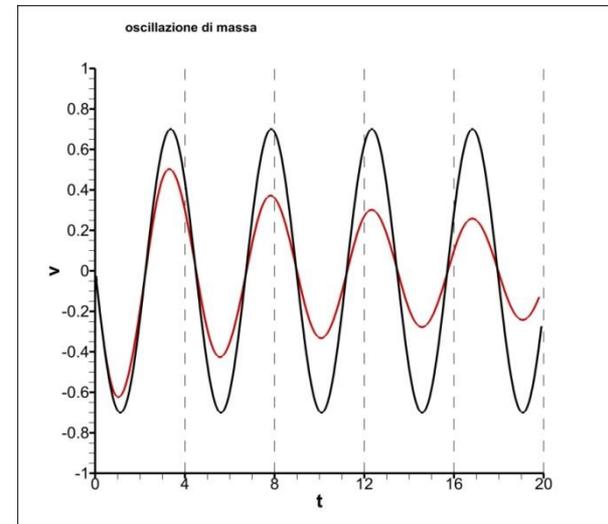
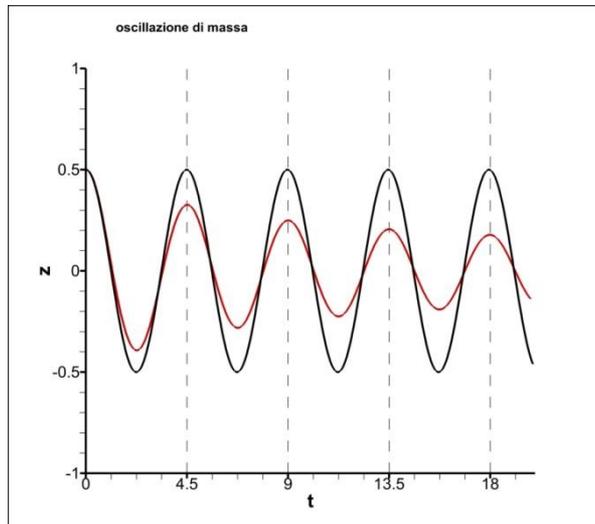
CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Caso di liquido non perfetto

In questo caso le perdite di carico non possono essere trascurate. Le equazioni possono essere risolte numericamente, usando un approccio esplicito, ovvero legando l'avanzamento delle variabili unicamente al passo precedente, abbiamo:

$$\frac{V^n - V^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{g}{L} \left[2z + kL \frac{V^{n-1} |V^{n-1}|}{2g} \right] \quad \frac{z^n - z^{n-1}}{\Delta t} = V^{n-1}$$

Da cui ricavare i valori V^n e z^n . Abbiamo espresso $J=V^2/2g$ con $|V|$ per tener conto delle velocità che assume segno diverso durante il moto. Nei grafici sottostanti, viene riportata in nero la soluzione per il caso di liquido perfetto, in rosso considerando le perdite di carico, da cui si osservano gli effetti di smorzamento avendo considerato non nulle le perdite continue

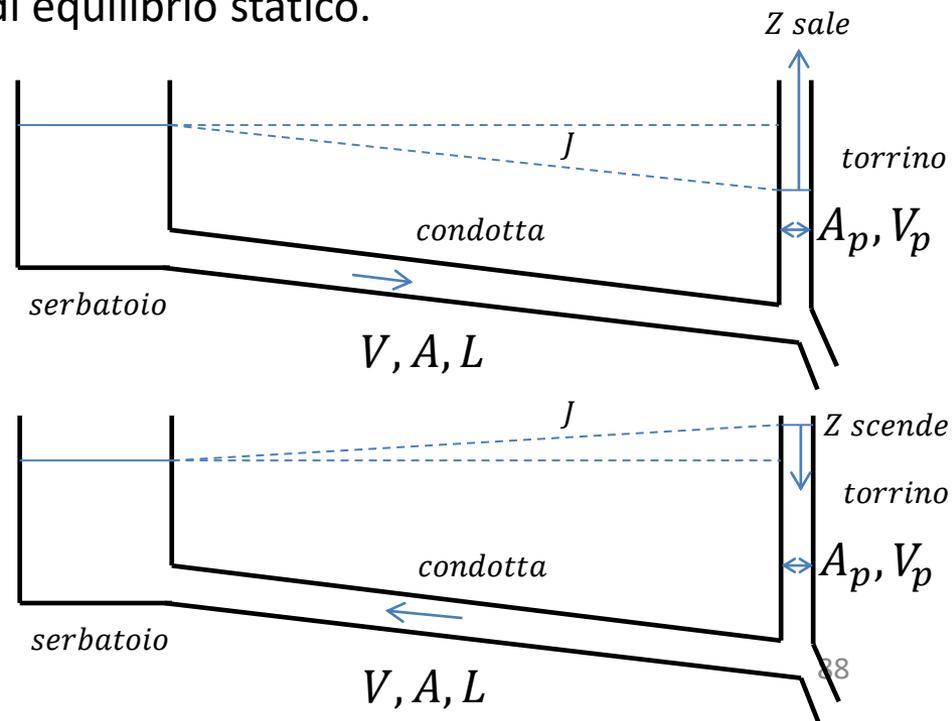


CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Serbatoio – lunga condotta – torrino piezometrico

Quanto visto per la configurazione di un tubo ad U, facilita la comprensione delle dinamiche che si instaurano nel sistema serbatoio-lunga condotta-torrino piezometrico. Come già evidenziato, il torrino impedisce alle perturbazioni venutesi a creare nella condotta forzata, di risalire nella lunga condotta. All'istante della chiusura dell'otturatore, nella condotta saremo ancora nelle condizioni di moto permanente, con velocità V_0 . Il flusso anziché transitare nella condotta forzata inizierà a fluire nel torrino, dove il pelo libero inizierà a salire, aumentando il carico alla fine della condotta e riducendo di conseguenza la portata ivi transitante. Quando il livello nel torrino raggiunge quello del serbatoio, ci si troverebbe in una condizione di equilibrio statico.

In realtà, per inerzia, il livello nel torrino continuerà a salire, fino ad un altezza massima, raggiunta quando il flusso nella condotta risulterà nullo. Quindi, a fluido non in moto, il livello nel torrino si troverà ad una altezza maggiore di quella del serbatoio, una condizione non stabile. Inizierà a generarsi quindi un flusso nella direzione inversa, dal torrino al serbatoio, col pelo libero nel torrino che va mano a mano ad abbassarsi.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Anche in questo caso, si raggiungerà un livello minimo, diverso dalla condizione di quiete, pertanto non stabile. Questo moto oscillatorio, si replicherà nel tempo, fino a quando le oscillazioni non verranno smorzate dagli effetti viscosi.

Per analizzare il problema possiamo fare alcune considerazioni che ci permettono di semplificare lo studio. Innanzitutto si può osservare che il processo qui individuato, evolve con una velocità caratteristica che è dello stesso ordine di grandezza rispetto alla velocità di moto permanente, rispetto ad esempio al fenomeno del colpo d'ariete, dove la velocità caratteristica del problema, ovvero la celerità delle perturbazioni, è di diversi ordini di grandezza maggiore della velocità di moto permanente. Quindi il processo delle oscillazioni può essere visto come un fenomeno lento, in cui il fluido e la condotta hanno il tempo di adattarsi alle nuove condizioni che si vengono ad instaurare. Pertanto possiamo assumere che il fluido possa essere considerato incomprimibile e la condotta indeformabile.

Allora il sistema di equazioni che descrivono il moto vario possono essere ridotte alla forma:

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Inoltre possiamo assumere che:

- 1) Il serbatoio sia molto grande, ed il suo livello del pelo libero rimanga costante nel tempo.
- 2) Le altezze cinetiche nel torrino, date le basse velocità che intervengono, siano trascurabili rispetto alla quota del pelo libero
- 3) Le perdite di carico localizzate di imbocco dal serbatoio, e di imbocco al torrino*, come le perdite di carico di tipo continuo internamente al torrino siano trascurabili, rispetto a quelle che caratterizzano la lunga condotta. Anche i fenomeni inerziali, tranne nella lunga condotta verranno trascurati.

Le assunzioni fatte, ci permettono di affermare che, sotto il torrino piezometrico, ovvero alla fine della lunga condotta, il carico risulta essere pari a quello idrostatico, legato all'altezza del pelo libero internamente al torrino.

Si evidenzia allora la necessità di comprendere come obiettivo della nostra analisi quale è l'altezza massima che verrà raggiunta dal pelo libero nel torrino, in quanto in relazione ad essa, sapremo a quali carichi viene sottoposta la parte finale della condotta. Di interesse è anche comprendere il livello minimo, perché se questo fosse inferiore alla quota della condotta, determinerebbe l'ingresso di aria nel sistema che si vuole in pressione, con le ovvie conseguenze.

* Questa assunzione verrà poi riconsiderata più avanti.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Per ottenere una soluzione analitica del problema, considero il caso in cui anche le perdite continue possano essere trascurate.

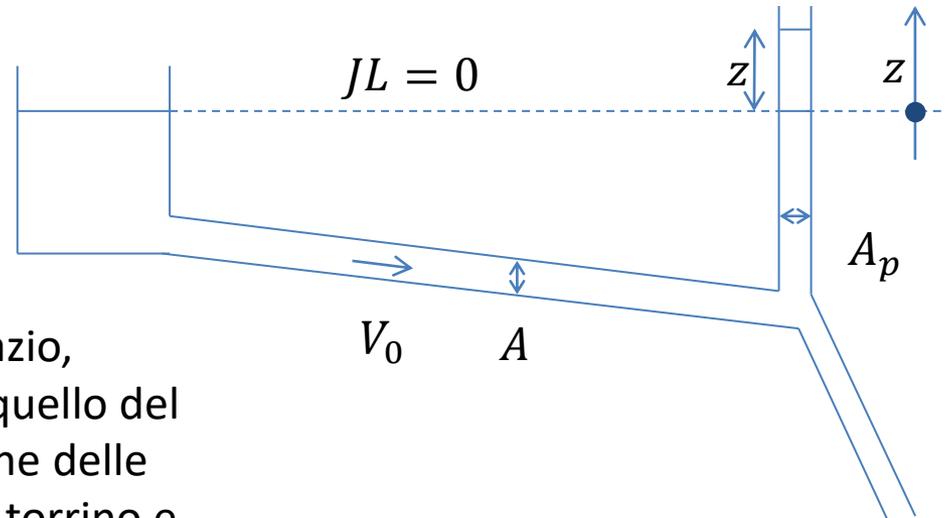
$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

Integrando l'equazione del moto nello spazio, considerando come livello di riferimento quello del serbatoio (per cui $h_s=0$), e in considerazione delle assunzioni fatte, la differenza di carico tra torrino e serbatoio, sarà semplicemente z , la differenza di quota nel torrino rispetto alla condizione di moto permanente.

$$z = -\frac{L}{g} \frac{dV}{dt}$$

Dove il termine inerziale è stato derivato, con le stesse considerazioni fatte nel caso di oscillazioni in tubo ad U, oltre che per le assunzioni fatte in questo caso specifico.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

L'equazione di continuità invece può essere riscritta come

$$AV = A_p V_p + Q_c$$

La portata transitante nella lunga condotta, deve essere uguale alla somma della portata transitante nel pozzo piezometrico (di area A_p e con velocità V_p) e quella che fluisce nella condotta forzata.

La portata Q_c dipenderà dal tempo di chiusura dell'otturatore, che nel presente caso è un tempo di molto inferiore a quello del moto oscillatorio, risulta pertanto pienamente accettabile considerare la chiusura come istantanea. Quindi:

$$AV = A_p V_p = A_p \frac{dz}{dt}$$

Dove la velocità nel torrino è stata messa in relazione alla velocità con cui varia l'altezza del pelo libero. Combinando le equazioni ottenute ricaviamo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A}{A_p} V$$

$$z + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{A}{A_p} \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{g}{L} z$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{Ag}{A_p L}}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Dove ω ha le dimensioni di una frequenza (s^{-1}), l'equazione appena determinata ammette una soluzione del tipo:

$$z = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$$

Dove c_1 e c_2 sono costanti da determinare con le condizioni al contorno. Sappiamo che al tempo $t=0$, $z=0$, $V_p=(A/A_p)V_0$. Valuto allora la soluzione al tempo $t=0$:

$$z \Big|_{t=0} = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = \Delta \quad \rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$V_p \Big|_{t=0} = \frac{dz}{dt} \Big|_{t=0} = c_1 \omega \cos(0) = \frac{A}{A_p} V_0 \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{AV_0}{A_p \omega}$$

pertanto

$$z = \frac{AV_0}{A_p \omega} \sin(\omega t) = V_0 \frac{A}{A_p} \sqrt{\frac{A_p L}{Ag}} \sin(\omega t) = V_0 \sqrt{\frac{AL}{A_p g}} \sin(\omega t)$$

Il livello nel torrino ha un andamento sinusoidale con ampiezza massima e minima:

$$z_{max,min} = \pm V_0 \sqrt{\frac{AL}{A_p g}}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Durante l'analisi abbiamo trascurato sia le perdite di carico continue che quelle concentrate. In realtà è uso indurre volontariamente delle perdite concentrate alla base del torrino, introducendo una strozzatura. Tale strozzatura induce delle perdite concentrate che possono essere espresse come:

$$K_p = \beta Q_p^2$$

Dove con Q_p si intende la portata che fluisce attraverso il torrino. In condizioni di moto permanente non c'è flusso attraverso il torrino, pertanto non ci saranno perdite di carico indotte dalla strozzatura. Alla chiusura dell'otturatore, la portata che prima transitava nella condotta inizierà a fluire nel pozzo piezometrico e sarà:

$$K_0 = \beta Q_0^2 = \beta A^2 V_0^2 \quad \text{per } t = 0$$

La perdita di carico avrà allora valore massimo al tempo $t=0$, poi come il livello si alza nel pozzo, riducendo il moto, la velocità si ridurrà e conseguentemente la perdita di carico. L'idea di fondo è che a monte della strozzatura, nella condotta, si verrà a creare un carico pari alla altezza del pelo libero del pozzo + la perdita di carico localizzata. L'aumento di pressione in galleria determina un rallentamento delle velocità nella galleria stessa
→ riduzione del sovrizzo nel pozzo.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

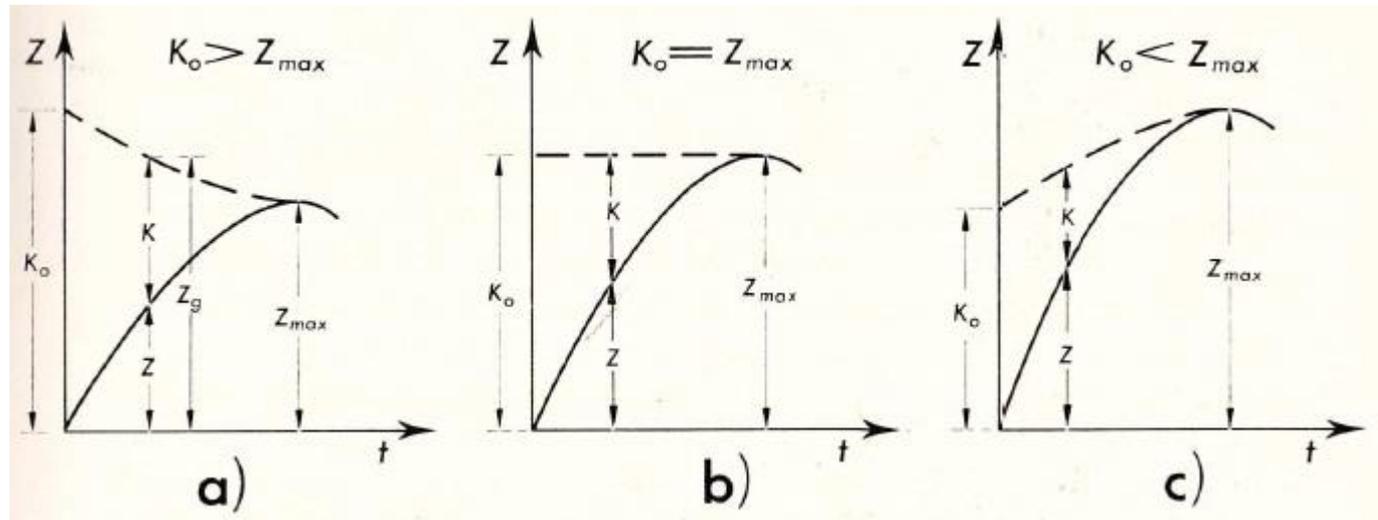
Per $t=0$ abbiamo ancora $Z=0$, mentre nella galleria, a meno della piezometrica del serbatoio abbiamo

$$Z_g = K_0$$

Quando il pozzo ha raggiunto il livello massimo, la portata entrante è nulla e

$$Z_g = Z_{max}$$

In relazione a quanto è impattante la strozzatura scelta, avrò un conseguente effetto sul sovrizzo massimo, e sulla pressione in galleria, si veda a riguardo le figure.



L'effetto di una strozzatura molto forte, figura a), avrebbe l'effetto di indurre al tempo $t=0$, una pressione in galleria maggiore di quella legata al sovrizzo z , una condizione non desiderabile. Una strozzatura debole, figura c), non ottimizzerebbe invece lo scopo della strozzatura.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

La configurazione ideale è che sia

$$K_0 = Z_{max} = K + Z$$

Il sistema considerando la perdita di carico localizzata sarà:

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} + z + K = 0$$

Che in condizioni di strozzatura ottimale diventa

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} + z_{max} = 0$$

Integro nel tempo tra t e t=0

$$\frac{L}{g} [V - V_0] + Z_{max}t = 0$$

Con la condizione che a t= 0 V=V₀

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Ricordando l'equazione di continuità

$$\frac{A_p}{A} \frac{dz}{dt} = V$$

Sostituisco la V nell'equazione appena derivata e ottengo

$$\frac{L A_p}{g A} \frac{dZ}{dt} - \frac{L}{g} V_0 + Z_{max} t = 0$$

Integro nuovamente nel tempo

$$\frac{L A_p}{g A} [Z - Z_0] - \frac{L}{g} V_0 t + \frac{1}{2} Z_{max} t^2 = 0 \quad t=0 \quad Z_0=0$$

$$\frac{L A_p}{g A} Z - \frac{L}{g} V_0 t + \frac{1}{2} Z_{max} t^2 = 0$$

Si ottiene

$$Z = \frac{A}{A_p} \left[V_0 - \frac{g}{2L} Z_{max} t \right] t$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Avremo il massimo quando $dz/dt=0$ quindi

$$\frac{A}{A_p} V_0 - \frac{A}{A_p} \frac{g}{2L} Z_{max} 2t = 0$$

L'espressione si annulla quando il tempo t assume un valore pari a

$$t^* = V_0 \frac{L}{gZ_{max}}$$

Pertanto al tempo $t=t^*$ sappiamo che la mia funzione avrà una condizione di massimo e avremo $Z=Z_{max}$ sostituendo

$$Z_{max} = \frac{A}{A_p} \left[V_0 - \frac{g}{2L} Z_{max} t^* \right] t^*$$

$$Z_{max} = \frac{A}{A_p} \left[V_0 - \frac{g}{2L} Z_{max} V_0 \frac{L}{gZ_{max}} \right] V_0 \frac{L}{gZ_{max}}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

$$Z_{max} = \frac{A}{A_p} \left[V_0 - \frac{g}{2L} Z_{max} V_0 \frac{L}{gZ_{max}} \right] V_0 \frac{L}{gZ_{max}}$$

$$Z_{max} = \frac{A}{A_p} \left[V_0 - \frac{V_0}{2} \right] V_0 \frac{L}{gZ_{max}}$$

$$Z_{max} = \frac{A}{A_p} \frac{V_0^2}{2} \frac{L}{gZ_{max}}$$

$$Z_{max}^2 = \frac{AL}{A_p g} \frac{V_0^2}{2}$$

Si ottiene

$$Z_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 \sqrt{\frac{AL}{A_p g}}$$

Come senza strozzatura ma con
fattore moltiplicativo circa 0,7

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Volendo invece procedere alla soluzione del sistema per integrazione numerica, considerando anche le perdite di carico continue, andremo a risolvere il sistema:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{g}{L} [z + JL]$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A}{A_p} V - \frac{Q_c}{A_p}$$

Dove sto tenendo conto della portata che fluisce nella condotta forzata in quanto rappresenta una condizione al contorno del sistema, nel caso si consideri un'operazione di chiusura o di avvio. Utilizzando un approccio temporale di tipo esplicito

$$\frac{V^n - V^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{g}{L} \left[z + \frac{f}{D} L \frac{V^{n-1} |V^{n-1}|}{2g} \right]$$

$$\frac{z^n - z^{n-1}}{\Delta t} = \frac{A}{A_p} V^{n-1} - \frac{Q_c^{n-1}}{A_p}$$

Da cui ottenere le espressioni per V e z al tempo n, in funzione del solo passo precedente.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

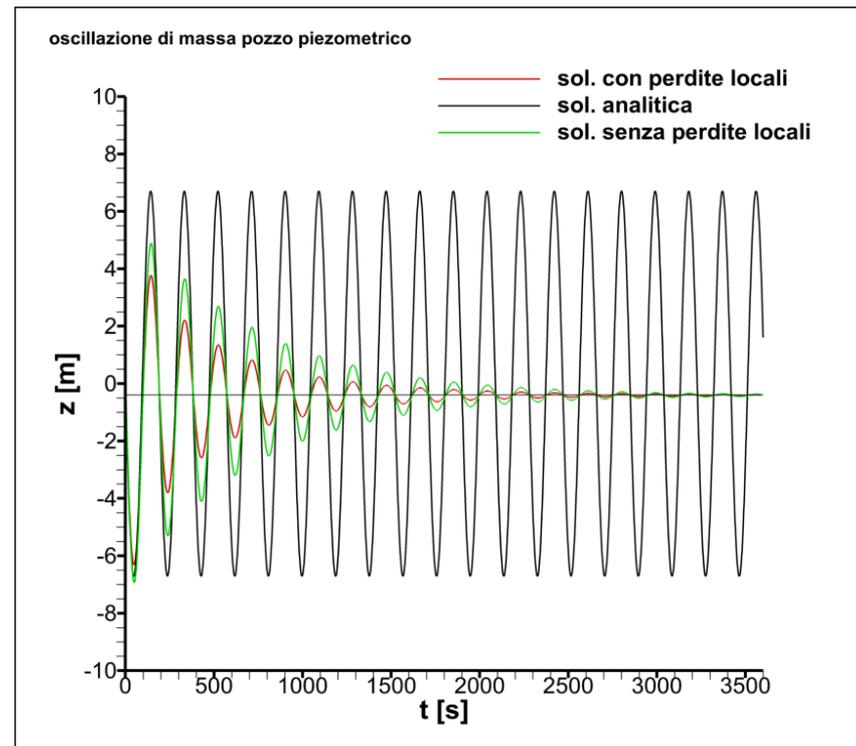
Consideriamo innanzitutto una manovra di avvio. Quindi il pelo libero nel serbatoio e nel pozzo sono allo stesso livello, ed il fluido è fermo. Avremo:

$$t = 0 \rightarrow z = 0 ; V = 0 ; Q_c^0 = 0$$

Mentre per $t > 0$ una condizione per $Q_c = AV_0$.

Nel grafico sottostante, viene riportato un confronto per la manovra di avvio tra la soluzione numerica proposta, rispetto a quella analitica derivata, inoltre per un caso oltre alle perdite continue si è considerato una perdita concentrata al torrino.

Si osserva come la soluzione analitica, oscilla senza smorzarsi, non avendo considerato le perdite di carico. Quella numerica invece evidenzia lo smorzamento nel tempo, maggiore se si considerano anche le perdite locali. Mano a mano che il flusso sarà andato a regime (permanente), il livello di z sarà negativo, ciò perché in moto permanente il torrino avrà una quota inferiore rispetto al serbatoio di una quantità JL .



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

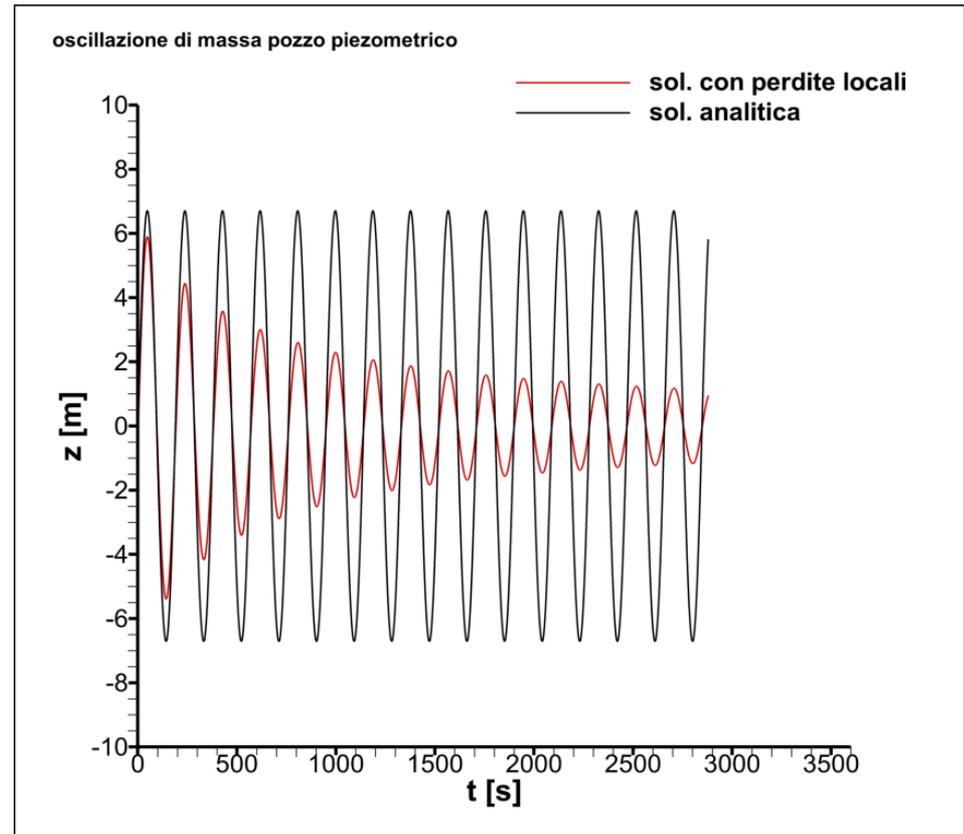
A partire dal risultato ottenuto, procedendo ad una chiusura dell'otturatore avremo come condizioni iniziali

$$t = 0 \rightarrow z = z_0 ; V = V_0 ; Q_c^0 = AV_0$$

Mentre per $t > 0$ una condizione per $Q_c = 0$.

Nel grafico sottostante, viene riportato un confronto per la manovra di chiusura tra la soluzione numerica proposta, rispetto a quella analitica derivata.

Si osserva in questo caso, oltre a quanto già detto per la manovra di avvio, che l'oscillazione della z converge a $z=0$, ovvero la condizione attesa di stesso livello per il serbatoio e per il torrino.

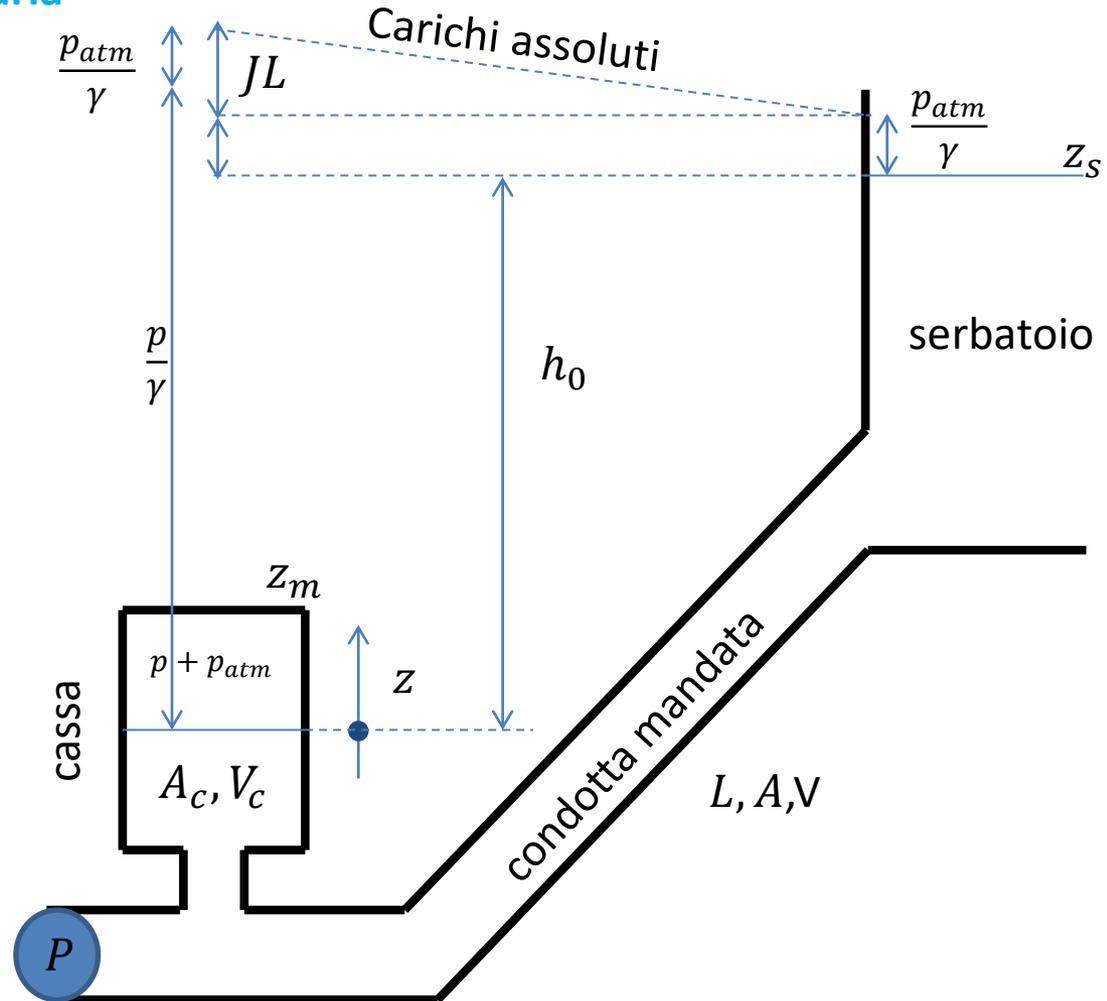


CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Oscillazioni di massa in una cassa d'aria

Consideriamo ora un sistema di sollevamento, con una pompa che fornisce la prevalenza necessaria per trasportare il fluido ad un serbatoio ricevente. Anche in questo caso è necessario un sistema di protezione simile al pozzo piezometrico. Non potendo usare un pozzo di altezza pari al serbatoio per ovvie questioni economiche, si ricorre ad una cassa in pressione. Ovvero un volume chiuso contenente aria, che con le sue variazioni di volume e pressione assorbe le variazioni dinamiche che intervengono nel sistema.

Le variazioni di portata per le manovre alla pompa, determinano un moto oscillatorio, analogo al caso precedente del torrino, che interessa la cassa d'aria, la condotta di mandata ed il serbatoio ricevente. Di interesse è valutare la pressione massima ed il volume minimo internamente alla cassa.



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

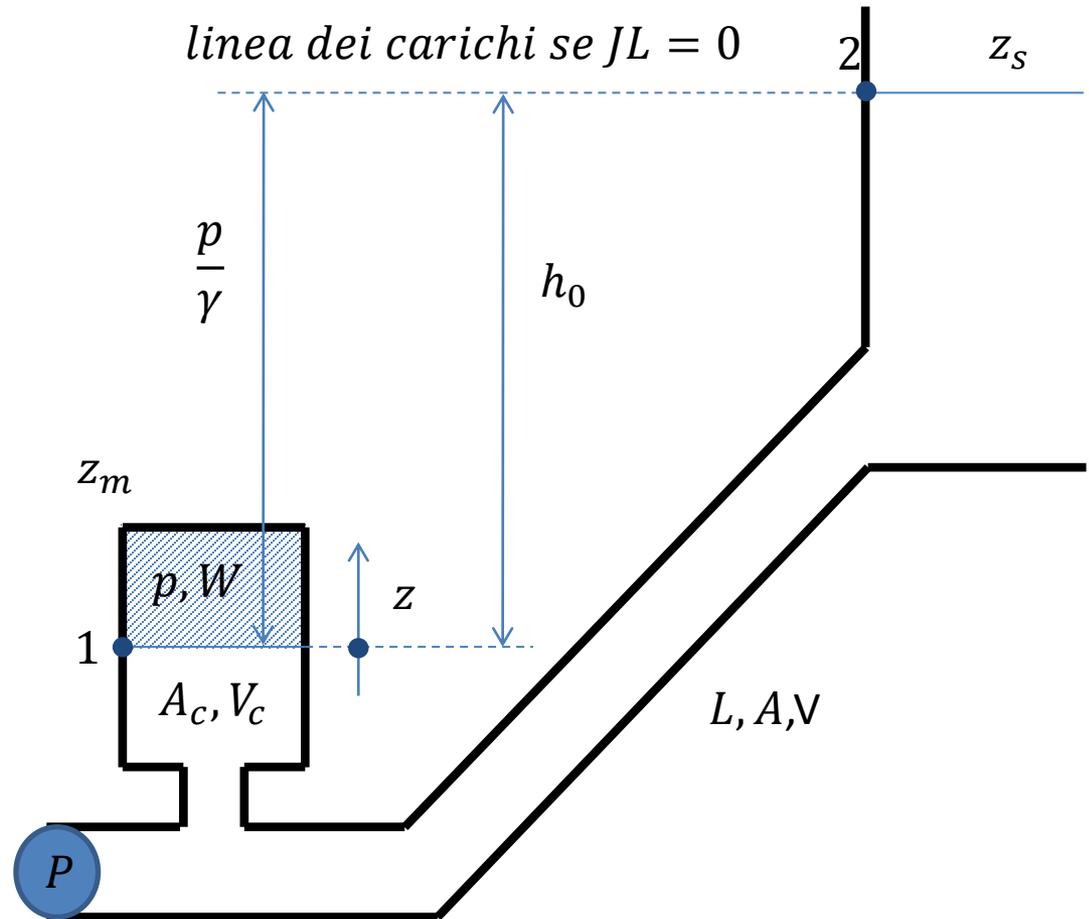
Si considera che il serbatoio mantenga un livello costante, e si trascurano eventuali portate residue dalla pompa.

Nel caso di brusca interruzione della pompa il moto in condotta continua attingendo dalla cassa d'aria.

- il gas si espande
- si riduce la pressione
- si riduce la portata.

La portata si annulla quando la pressione raggiunge un minimo e un volume massimo del gas. Inizia un moto oscillatorio tra la condizione precedente e quella di pressione massima e volume minimo nella cassa d'aria.

Il fenomeno viene studiato considerando le stesse equazioni viste precedentemente, considerando il fluido incomprimibile e la condotta indeformabile.



$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Integrando tra il livello del pelo libero nella cassa e nel serbatoio, assumendo trascurabili le perdite localizzate, e le perdite ed i fenomeni inerziali internamente alla cassa d'aria, l'equazione del moto si riduce a

$$h_2 - h_1 = -\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} - JL$$

Se considero come piano di riferimento, quello passante per il livello del pelo libero nella cassa in condizioni di equilibrio, possiamo esprimere il carico in 2 in termini assoluti come:

$$h_2 = h_0 + \frac{p_{atm}}{\gamma}$$

Mentre:

$$h_1 = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{p_{atm}}{\gamma}$$

Dove abbiamo scorporato la pressione interna alla cassa di una componente pari alla pressione atmosferica. Avremo allora:

$$h_2 - h_1 = h_0 - \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} - JL$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

L'equazione del moto risulta funzione di tre variabili, z , V e p . Servono pertanto due equazioni aggiuntive per risolvere il problema. Come nei casi precedentemente analizzati, ci si appoggia alla equazione di continuità:

$$Q_p = Q_c + Q_s = A_c V_c + AV$$

La portata Q_p proveniente dalla pompa, transiterà in parte nella cassa d'aria Q_c , e parte verso il serbatoio, Q_s . Queste ultime le esprimiamo in funzione delle aree della sezione della cassa, A_c , e della condotta, A , rispettivamente caratterizzate dalle velocità V_c e V . Dall'equazione di continuità possiamo poi esprimere la velocità V , considerando che V_c può essere espressa in funzione della variazione del pelo libero della cassa nel tempo, come:

$$V = \frac{Q_p}{A} - \frac{A_c}{A} V_c = \frac{Q_p}{A} - \frac{A_c}{A} \frac{dz}{dt}$$

Infine consideriamo che per il gas, la pressione p ed il volume W soddisfino la relazione

$$pW^k = cost$$

Dove k dipende dal tipo di trasformazione, se isoterma ($k=1$) o adiabatica ($k=1,41$).

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Definito p_0 , z_0 e W_0 la condizione di equilibrio nella cassa in assenza di flusso:

$$(p_0 + p_{atm})W_0^k = (p + p_{atm})W^k$$

Considerando poi z_m la quota della volta della cassa d'aria:

$$(p_0 + p_{atm})(z_m - z_0)^k A_c^k = (p + p_{atm})(z_m - z)^k A_c^k$$

Da cui

$$p = \frac{(z_m - z_0)^k}{(z_m - z)^k} (p_0 + p_{atm}) - p_{atm}$$

Con l'inconveniente di avere la pressione in funzione di z al denominatore. Però considerando lo sviluppo in serie di Taylor (troncata al primo termine) per p intorno a $z=0$:

$$p \cong p \Big|_{z=0} + \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0} z$$

$$p \cong p_0 + \frac{k(p_0 + p_{atm})}{z_m} z$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Anche in questo caso possiamo trovare una soluzione analitica trascurando le perdite di carico continue, $JL=0$. Combinano la equazione di continuità e quella del moto, in modo analogo ai casi precedenti, con $Q_p=0$ avremo:

$$h_0 - \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = \frac{A_c L}{A g} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Introducendo l'espressione trovata per p

$$h_0 - \left(z + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{k(p_0 + p_{atm})}{\gamma Z_m} z \right) = \frac{A_c L}{A g} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Inoltre notando che nella condizione di equilibrio p_0/γ sarà pari a h_0 :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(1 + \frac{k(p_0 + p_{atm})}{\gamma Z_m} \right) \frac{A_c L}{A g} z = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Dove ω è una frequenza

$$\omega = \sqrt{\left(1 + \frac{k(p_0 + p_{atm})}{\gamma z_m}\right) \frac{g}{L} \frac{A}{A_c}}$$

E l'equazione ammette una soluzione del tipo

$$z = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$$

Al tempo $t=0$ abbiamo che $z=z_0=0$, in quanto al livello del piano di riferimento scelto

$$z = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 0 \quad \text{da cui} \quad c_2 = 0$$

Sempre al tempo $t=0$ abbiamo che $V=V_0$, ovvero la velocità in condizioni di moto permanente:

$$V = V_0 = -\frac{A_c}{A} \frac{dz}{dt}$$

$$V_0 = -\frac{A_c}{A} c_1 \omega \cos(\omega t) \quad \text{da cui} \quad c_1 = -\frac{V_0 A}{\omega A_c}$$

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

otteniamo

$$z = -\frac{V_0 A}{\omega A_c} \sin(\omega t)$$

La forma completa delle equazioni determinate si possono risolvere numericamente, ponendo il sistema come

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L} \left[z + \frac{p}{\gamma} - h_0 - JL \right]$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_p - VA}{A_c}$$

$$p = (p_0 + p_{atm}) \frac{(z_m - z_0)^k}{(z_m - z)^k} - p_{atm}$$

E risolvendolo con un approccio esplicito

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

otteniamo

$$\frac{V^n - V^{n-1}}{\Delta t} = \frac{g}{L} \left[z^{n-1} + \frac{p^{n-1}}{\gamma} - h_0 - \frac{f V^{n-1} |V^{n-1}|}{2g} L \right]$$

$$\frac{z^n - z^{n-1}}{\Delta t} = \frac{Q_p^{n-1} - V^{n-1} A}{A_c}$$

$$p^n = (p_0 + p_{atm}) \frac{(z_m - z_0)^k}{(z_m - z^n)^k} - p_{atm}$$

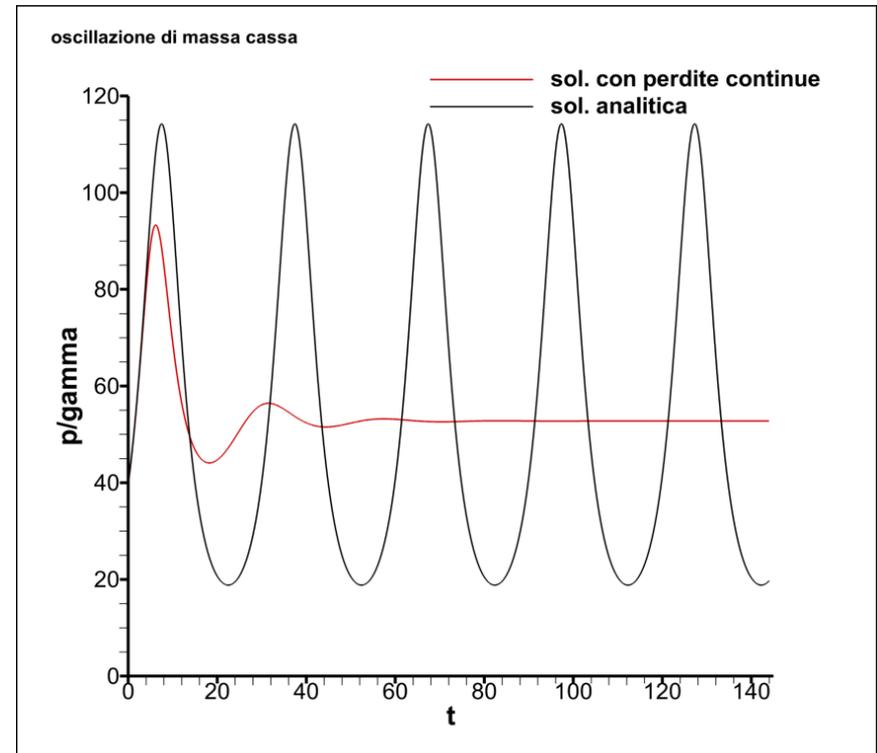
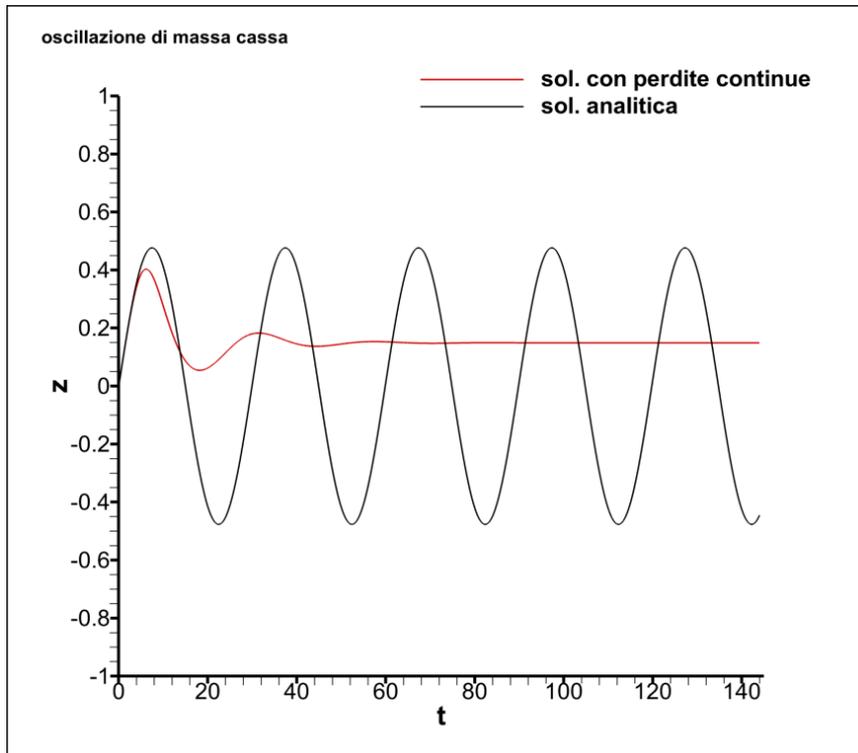
Dove le variabili V , z e p al tempo n , possono essere ricavate in funzione del solo passo precedente $n-1$.

CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Consideriamo innanzitutto una manovra di avvio. Quindi il pelo libero nella cassa è a livello $z=z_0=0$ e la pressione $p_0/\gamma=h_0$, mentre il fluido è fermo. Avremo:

$$t = 0 \rightarrow z = 0 ; V = 0 ; Q_p^0 = 0$$

Mentre per $t > 0$ una condizione per $Q_p = AV_0$. I grafici sottostanti riportano z e p internamente alla cassa. Si osserva come ad un aumento di z , il volume si riduce e pertanto p aumenta



CORRENTI IN PRESSIONE – MOTO VARIO – OSCILLAZIONI DI MASSA

Per una manovra di chiusura. Quindi il pelo libero nella cassa è a livello di moto permanente (si veda grafico precedente) come la pressione, mentre il fluido è a velocità V_0 . Avremo:

$$t = 0 \rightarrow z = z_{regime} ; V = V_0 ; Q_p^0 = AV_0$$

Mentre per $t > 0$ una condizione per $Q_p = 0$. I grafici sottostanti riportano z e p internamente alla cassa. Si osserva come ad un aumento di z , il volume si riduce e pertanto p aumenta e la z tenderà al livello 0 del piano di riferimento.

