

# **IDRAULICA APPLICATA**

## **PARTE 2 – Correnti a pelo libero**

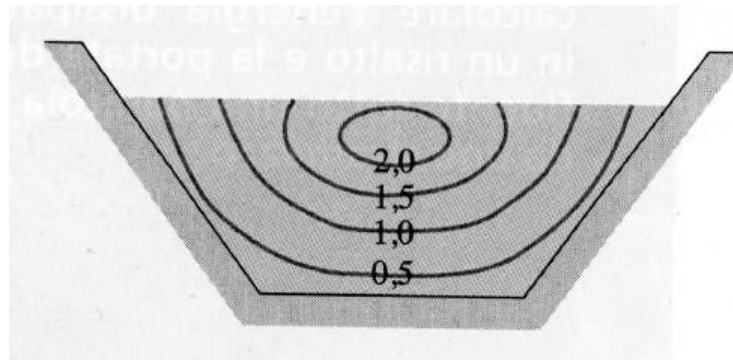
### **Capitolo 1 – moto uniforme e permanente**

## CORRENTI A PELO LIBERO – INTRODUZIONE

Esempi:

- fiumi, torrenti
- Canali artificiali
- Fognature bianche o nere

Si differenziano rispetto alle correnti in pressione per il fatto che una delle superfici (la superiore) non è a contatto con una parete solida, ma con un gas, di norma l'atmosfera. Di questa superficie si parla come di superficie a pelo libero, che per lunghezze non eccessive del tratto considerato si può considerare come una superficie isobarica  $p=\text{cost}$ .



Velocità nulla sul contorno a contatto con le pareti, e massima in mezzeria poco sotto la superficie. La velocità può variare di sezione in sezione e presenta moti secondari. In generale è un fenomeno tridimensionale.

## CORRENTI A PELO LIBERO – INTRODUZIONE

Nonostante il carattere tridimensionale del moto, si considera per la maggior parte dei casi l'ipotesi di corrente lineare e quindi una trattazione unidimensionale, facendo riferimento alle variabili lungo un'unica coordinata spaziale  $s$ . Per correnti lineari con traiettorie a curvatura limitata **la pressione lungo la sezione trasversale si può considerare con una distribuzione di tipo idrostatico.**

Si aggiunge la seguente ipotesi:

**La pendenza** dell'alveo, ovvero la pendenza di tutte le traiettorie e del pelo libero è **trascurabile**. Ovvero la normale al fondo coincide con la verticale.

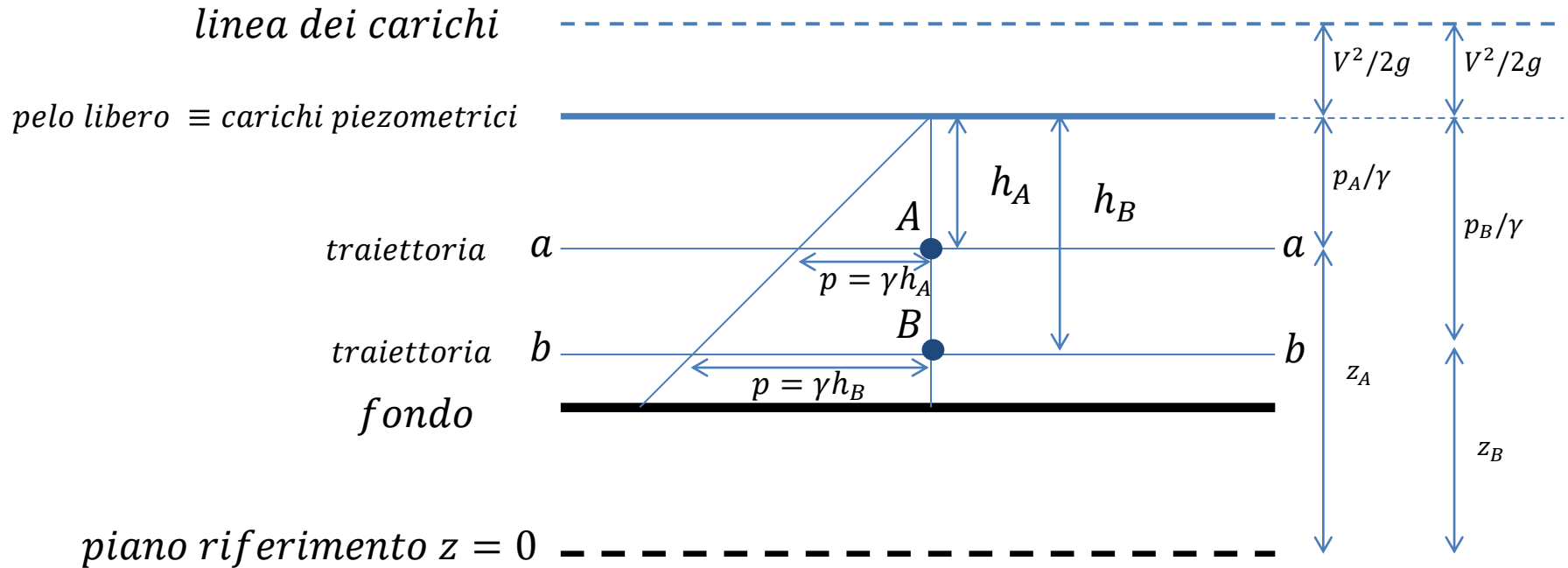
Come nel caso di correnti in pressione, anche nelle correnti a pelo libero possiamo considerare generalmente tre tipologie di moto, uniforme, permanente e vario.

Moto uniforme: la velocità e la sezione liquida non saranno funzione né dello spazio né del tempo.

Moto permanente: la velocità e la sezione liquida non saranno funzione del tempo ma solo dello spazio.

Moto vario: la velocità e la sezione liquida saranno funzione sia del tempo che dello spazio.

## CORRENTI A PELO LIBERO – INTRODUZIONE



L'assunzione che la normale al fondo, possa essere confusa con la verticale, determina che se consideriamo il carico piezometrico in un punto A, questo sarà dato dalla quota  $z$  rispetto ad un piano di riferimento, più la pressione legata al suo affondamento rispetto al pelo libero. In condizioni di pressione idrostatica, il carico al punto A verrà pertanto a coincidere con il pelo libero. Questo varrà per qualsiasi punto della traiettoria a-a, parallela al fondo, a cui A appartiene. Se facciamo lo stesso ragionamento per una qualsiasi traiettoria b-b, si osserva che anche in questo caso la piezometrica coinciderà col pelo libero, che pertanto rappresenterà la linea dei carichi piezometrici per l'intera corrente. Sommando l'altezza cinetica avremo poi la linea dei carichi totali.

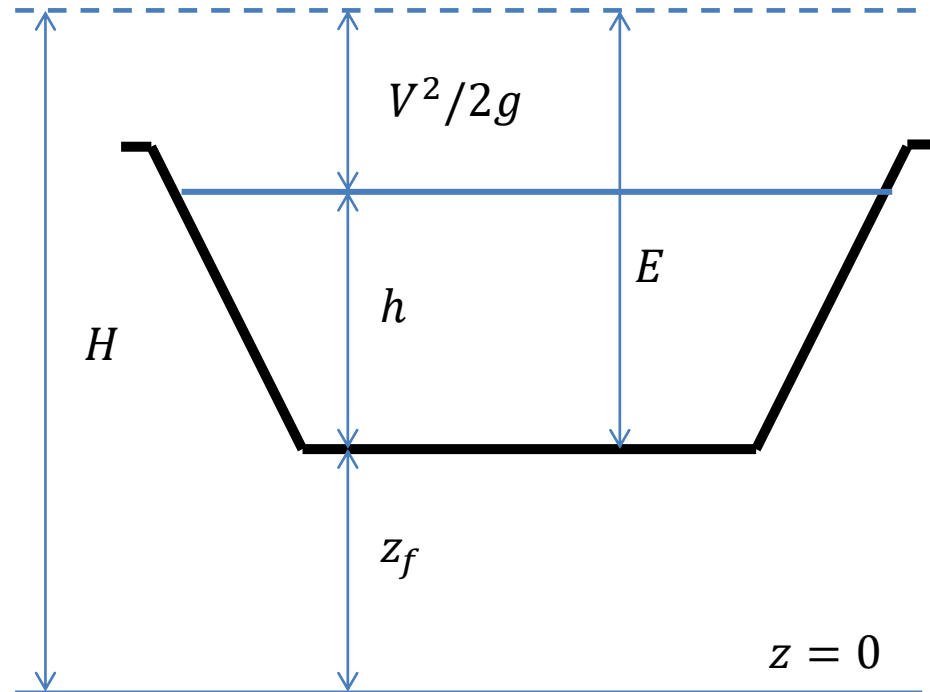
## CORRENTI A PELO LIBERO – ENERGIA SPECIFICA

### Energia specifica

Nell'ipotesi di corrente lineare, a tutti i punti di una sezione trasversale corrisponde la stessa quota piezometrica, in termini di pressione relativa, individuata dalla quota del pelo libero.

Dato  $Z_f$  la quota del fondo della sezione trasversale più depressa, il carico totale della corrente è:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = z_f + h + \frac{V^2}{2g}$$



Nelle correnti a pelo libero si assume come piano di riferimento non un valore unico ma il fondo della sezione considerata → si parla di energia specifica, che rappresenta comunque l'energia meccanica contenuta dalla corrente

$$E = h + \frac{V^2}{2g}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – ENERGIA SPECIFICA

Se esprimo l'energia specifica in termini di portata:

$$E = h + \frac{V^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Valuto ora il comportamento di  $E$  in funzione di  $h$ , mantenendo la portata  $Q$  costante.

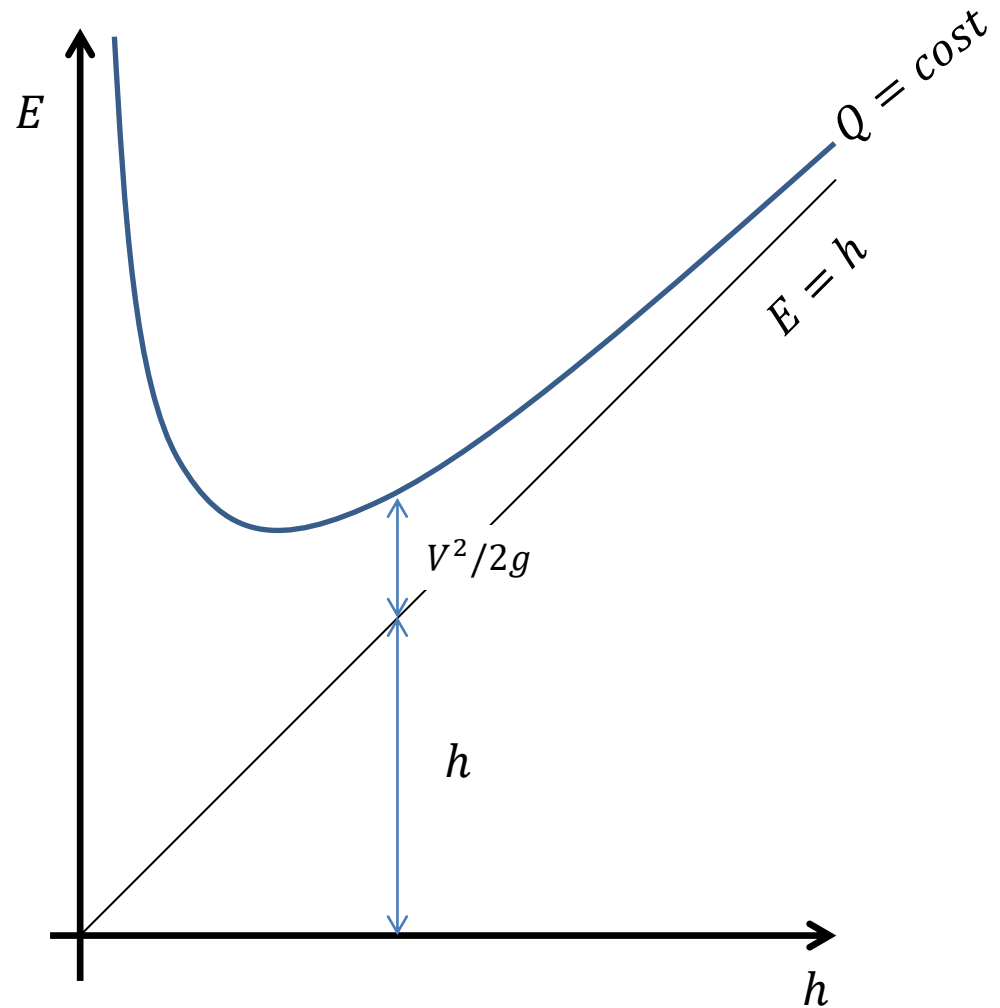
$$E = E(h)$$

$E$  dipende da  $h$ , direttamente per il primo termine a destra dell'uguale, e inversamente tramite l'area  $A$ , a denominatore del secondo termine a destra.

Se  $h \rightarrow \infty$ , anche  $A \rightarrow \infty$  e quindi il termine cinetico  $\rightarrow 0$ , ovvero  $E \rightarrow h$ .

Se  $h \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow 0$  ed il termine cinetico  $\rightarrow$  infinito.

Pertanto la funzione  $E$  è positiva e tende asintoticamente alla retta  $E=h$  e all'asse delle ordinate.



## CORRENTI A PELO LIBERO – ENERGIA SPECIFICA

La funzione  $E=E(h)$  ha un minimo, ovvero deve esserci un determinato  $h$  per cui la  $E$  ha valore minimo.

Derivo  $E$  per  $h$  e pongo  $=0$  per trovare il minimo.

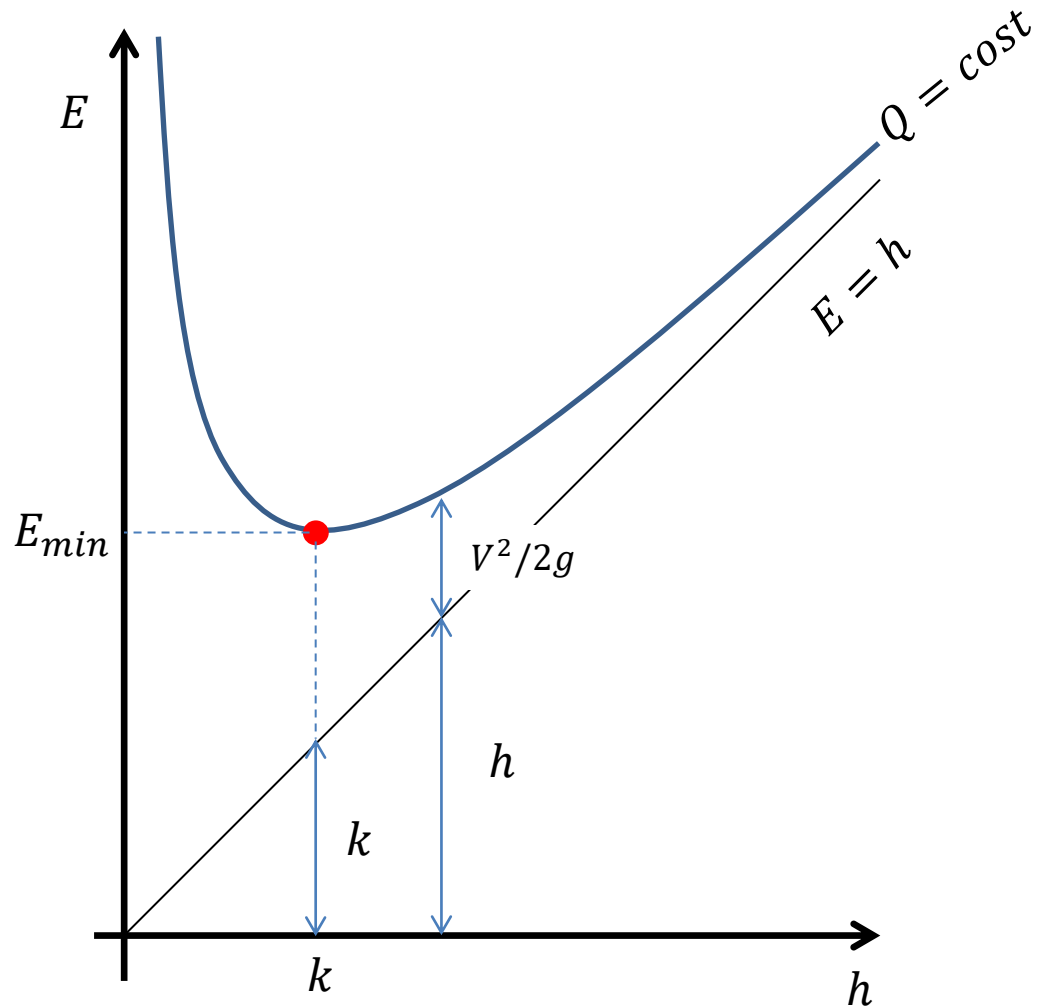
$$\begin{aligned}\frac{dE}{dh} &= \frac{d}{dh} \left( h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) \\ &= 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dh} = 0\end{aligned}$$

Se  $B$  è la larghezza della sezione alla superficie, possiamo assumere che  $dA=Bdh$  e sostituendo:

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} B = 0$$

Minimo di  $E$  per quel  
valore di  $h$  per cui

$$\boxed{\frac{A^3}{B} = \frac{Q^2}{g}}$$



Questo valore di  $h$  viene chiamata altezza critica  $k$

## CORRENTI A PELO LIBERO – ENERGIA SPECIFICA

L'altezza critica  $k$  di una corrente a pelo libero di assegnata portata  $Q$ , è quella per cui si verifica un minimo dell'energia specifica  $E$  rispetto al fondo dell'alveo.

Dalla relazione precedente esprimendo la portata in termini di area e velocità, possiamo definire una velocità critica  $V_c$ :

$$\boxed{\frac{A^3}{B} = \frac{Q^2}{g}} \quad \longrightarrow \quad \frac{A^3}{B} = \frac{A^2 V_c^2}{g} \quad \longrightarrow \quad V_c = \sqrt{g \frac{A}{B}}$$

$A/B$  definisce una profondità media della corrente  $h_m$ , che in corrispondenza dello stato critico definisce un'altezza critica  $k_m$ .

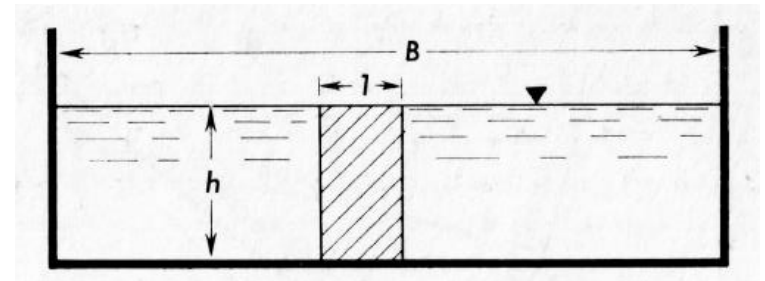
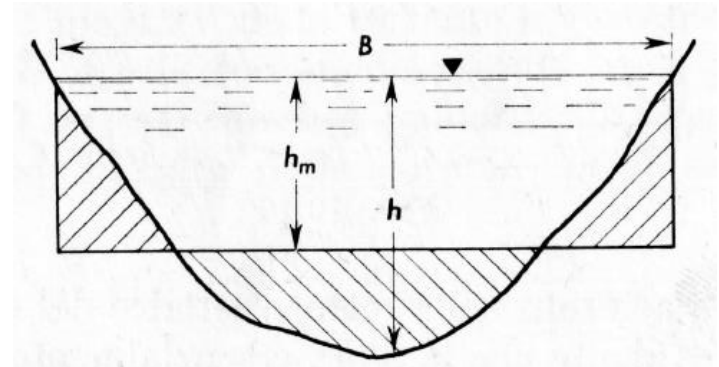
Analizzo il caso di sezione rettangolare, quindi  $A=Bh$ , allo stato critico avremo:

$$\frac{A^3}{B} = \frac{Q^2}{g} \quad \text{con} \quad A = Bk$$

$$\frac{B^3 k^3}{B} = \frac{Q^2}{g}$$



$$\boxed{k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}}}$$





## CORRENTI A PELO LIBERO – ENERGIA SPECIFICA

E di conseguenza la velocità critica

$$V_c = \sqrt{gk}$$

Sostituendo nella formulazione dell'energia specifica

$$E = h + \frac{V^2}{2g}; \quad E_{min} = k + \frac{gk}{2g} = k + \frac{k}{2} = \frac{3}{2}k$$

Quindi allo stato critico per una sezione rettangolare abbiamo un'altezza cinetica pari a metà della profondità ed una energia specifica pari a 3/2 della profondità.

Estendendo alla generica sezione abbiamo

$$E_{min} = k + \frac{k_m}{2}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – ENERGIA SPECIFICA

Lo stato critico definisce due tipi di corrente:

A sinistra **correnti veloci**

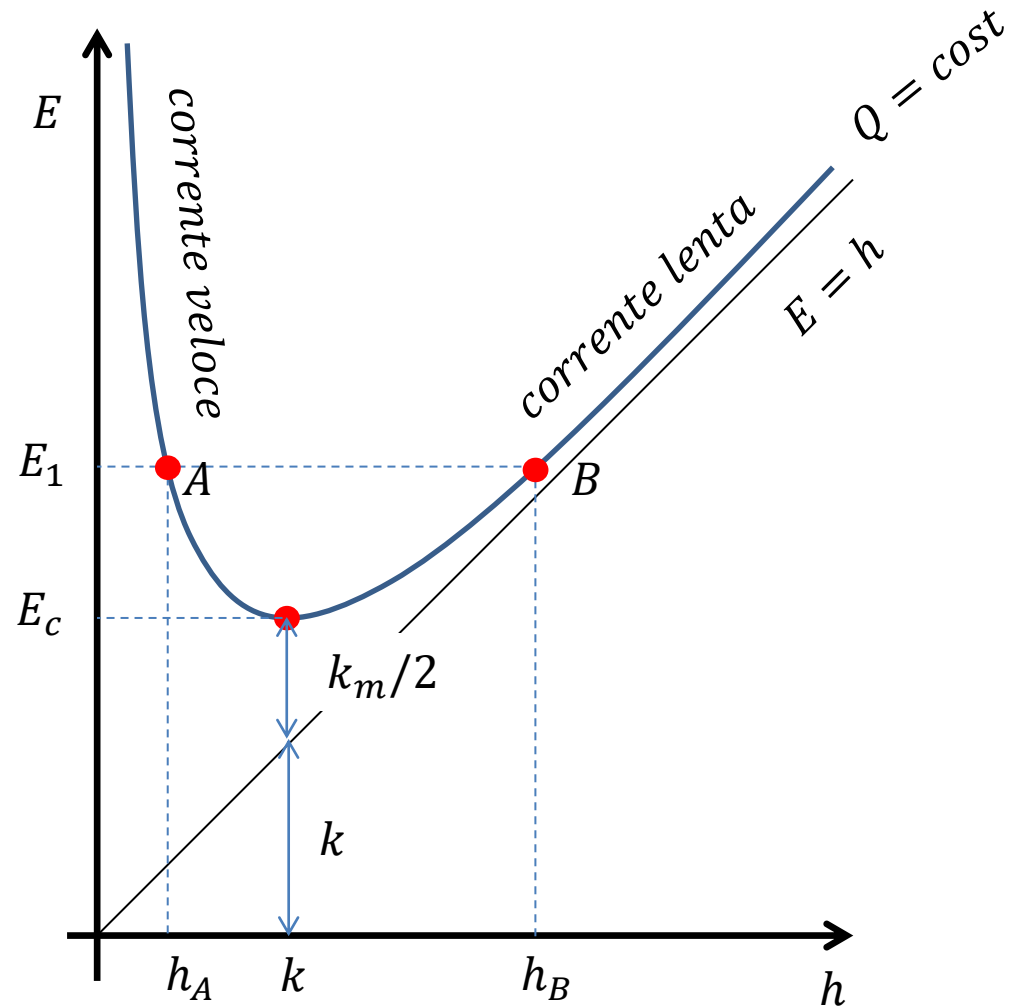
$$h < k$$
$$V > V_c$$

A destra **correnti lenti**

$$h > k$$
$$V < V_c$$

Osservazione

Assegnata una portata  $Q$ , una linea verticale ad un dato  $h$  interseca la curva dell'energia specifica in un solo punto.



Ad una data energia specifica  $E_1$ , una retta orizzontale interseca la curva in due punti, Pertanto alla stessa energia specifica possiamo avere due tipi di correnti, una veloce ed una lenta.

Per  $E < E_c$  non c'è sufficiente portata per convogliare la portata  $Q$

## CORRENTI A PELO LIBERO – ENERGIA SPECIFICA

Riconsideriamo la stessa analisi della formula dell'energia specifica, ma in termini di portata. Considero fissato il valore di energia  $E$ , analizzo il variare della  $Q$  al variare della  $h$ , avendo  $0 < h < E$ , quindi  $Q = Q(h)$

$$E = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

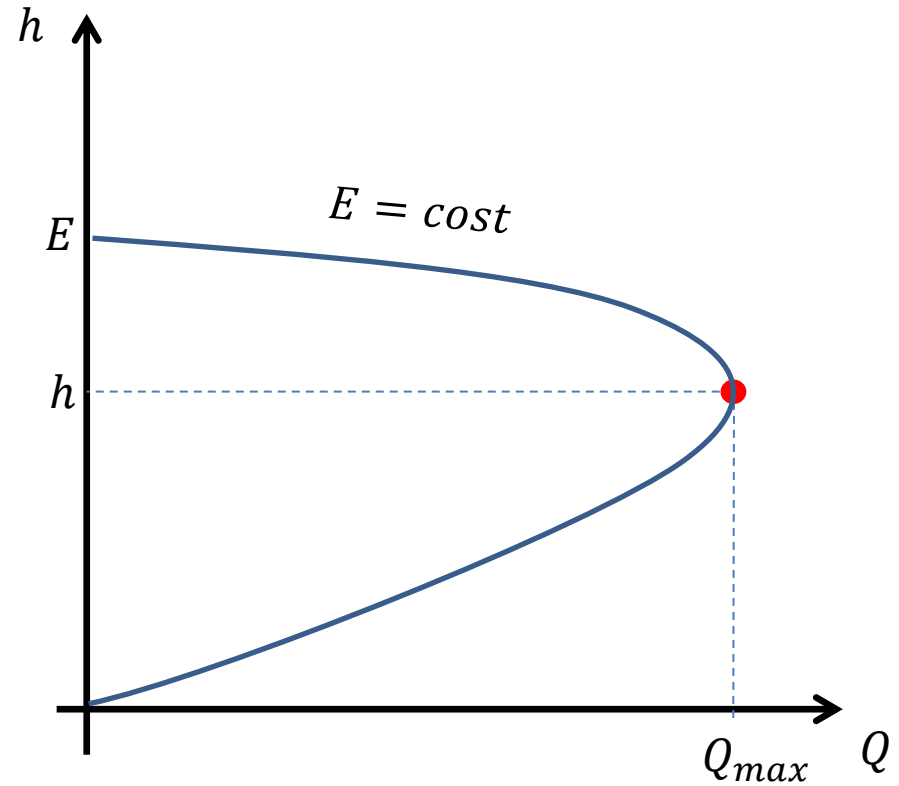
$$Q = A\sqrt{2g(E - h)}$$

$Q$  dipende da  $h$  tramite l'area e per il termine  $h$  sotto radice. Per  $h=0$  l'area è nulla e  $Q=0$ . Per  $h=E$  anche  $Q=0$ .

Abbiamo una condizione di massimo che possiamo trovare imponendo  $dQ/dh=0$

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{d}{dh} \left( A\sqrt{2g(E - h)} \right) = 0$$

$$\frac{dQ}{dh} = \sqrt{2g(E - h)} \frac{dA}{dh} - \frac{gA}{\sqrt{2g(E - h)}} = 0$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – ENERGIA SPECIFICA

Analogamente a prima considero

$$\frac{dA}{dh} = B$$

sostituisco

$$\sqrt{2g(E-h)}B - \frac{gA}{\sqrt{2g(E-h)}} = 0$$

$$2g(E-h)B = gA$$

quindi

$$h = E - \frac{A}{2B} = E - \frac{h_m}{2}$$

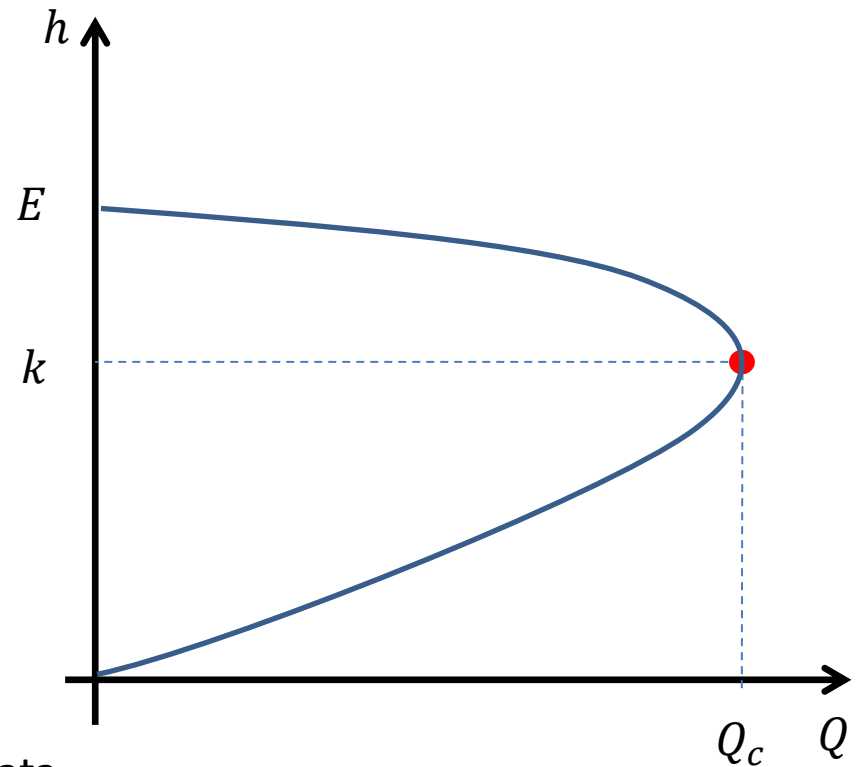
Ma la relazione trovata tra E e h è la stessa trovata precedentemente, per cui la h non è altro che l'altezza critica. Adesso possiamo definire:

*L'altezza critica k di una corrente a pelo libero di assegnata energia specifica E rispetto al fondo dell'alveo, è quell'altezza a cui corrisponde la portata massima.*

Per sezione rettangolare  $h_m = h$   $A = Bh$

$$k = \frac{2}{3}E$$

$$Q_{max} = Q_c = AV_c = Bk\sqrt{gk} = \frac{2}{3\sqrt{3}}BE\sqrt{2gE}$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – ENERGIA SPECIFICA

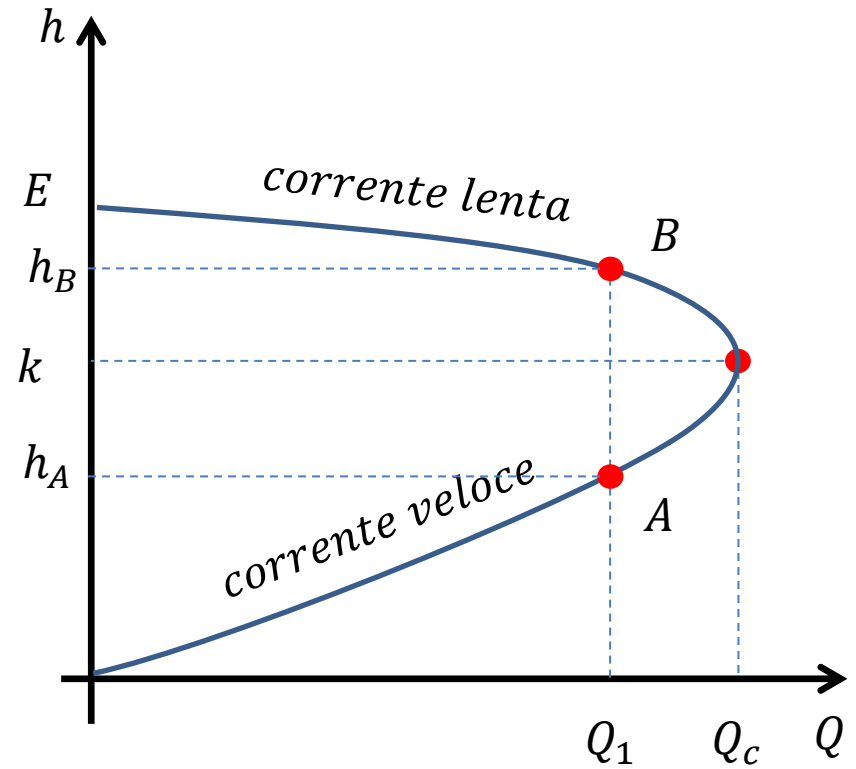
Anche in questo caso

Assegnata  $E$

Correnti lente per  $h > k$

Correnti veloci per  $h < k$

Data una portata  $Q_1 < Q_c$  possono corrispondere due tipi di corrente



## CORRENTI A PELO LIBERO – NUMERO DI FROUDE

### Numero di Froude

Abbiamo definito in relazione allo stato critico due tipi di correnti, lenti e veloci. Tale distinzione deriva anche come dipendenza dal numero adimensionale di Froude.

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

Con  $V$  e  $L$  una velocità ed una lunghezza caratteristica. Da un punto di vista fisico il significato del numero di Froude può facilmente essere decifrato prendendone il quadrato e moltiplicando e dividendo per densità e area

$$Fr^2 = \frac{2 \frac{1}{2} V^2 \rho A}{gL \rho A}$$

$$Fr^2 = \frac{2 \frac{1}{2} \rho V^2 A}{g \rho LA}$$

$$Fr^2 = \propto \frac{\text{forze di inerzia}}{\text{forze di gravità}}$$

Pressione dinamica

volume

Rapportandolo al caso di un canale, per la lunghezza si può considerare  $A/B$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gA/B}} = \frac{V}{\sqrt{gh_m}}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – NUMERO DI FROUDE

Il numero di Froude allo stato critico

$$Fr_c = \frac{V_c}{\sqrt{gk}} = \frac{\sqrt{gk}}{\sqrt{gk}} = 1$$

Per le correnti lente:

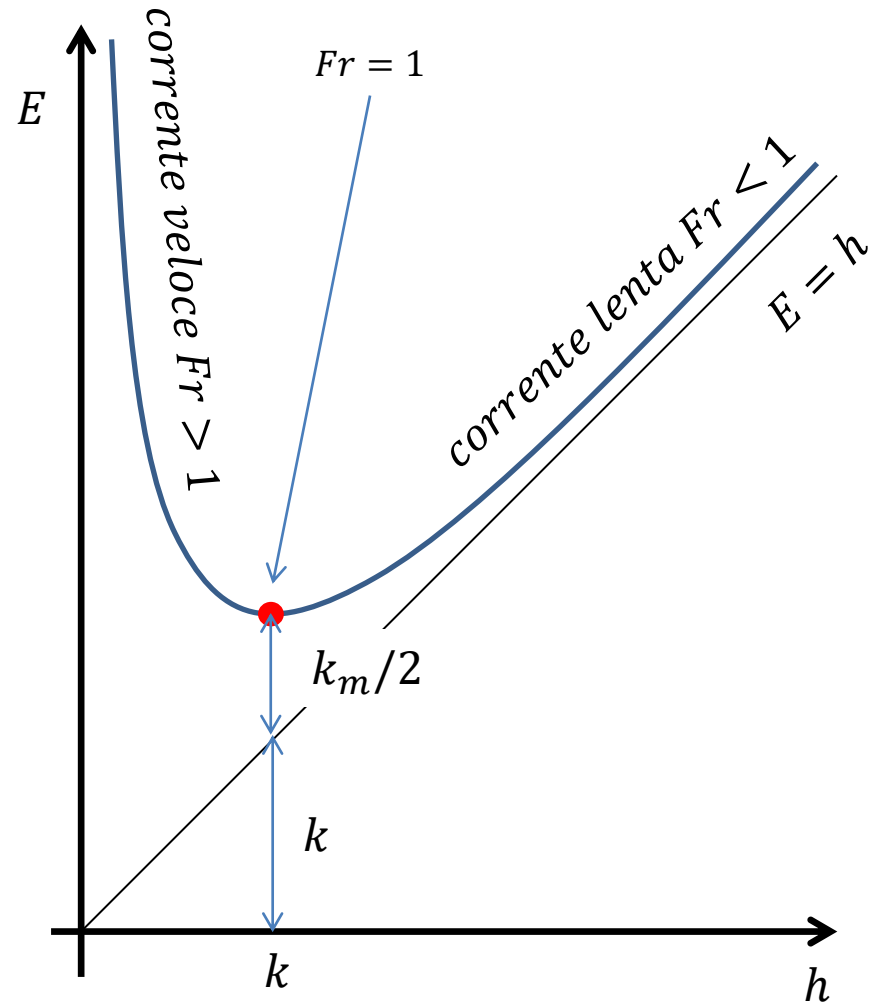
$h > k$  mentre  $V < V_c$  necessariamente  $Fr < 1$   
forze di gravità prevalgono su quelle di inerzia

Per le correnti veloci:

$h < k$  mentre  $V > V_c$  necessariamente  $Fr > 1$   
forze di inerzia prevalgono sulle forze di gravità

Il numero di Froude rappresenta anche il rapporto tra la velocità della corrente e la velocità di propagazione delle perturbazioni infinitesime.

Celerità della propagazione delle perturbazioni

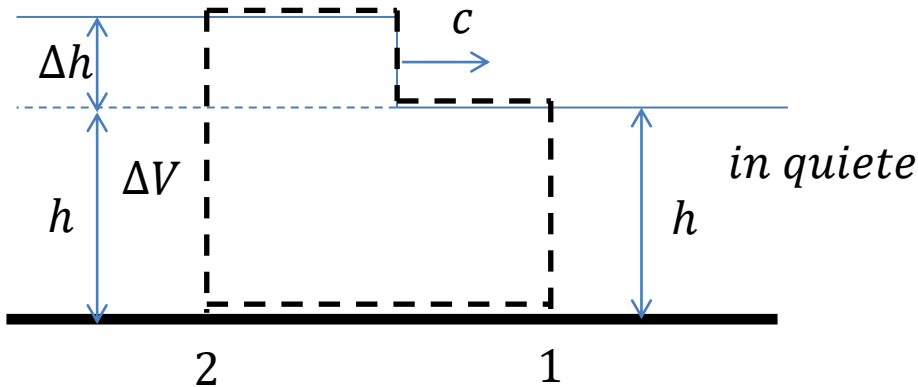


$$c = \pm \sqrt{gh}$$

# CORRENTI A PELO LIBERO – CELERITA'

## Celerità delle perturbazioni

Considero canale di lunghezza indefinita con liquido in quiete ad altezza  $h$ . Si consideri quindi la presenza di una perturbazione che si muova nel mezzo con celerità  $c$  e determini al suo passaggio una variazione  $\Delta V$  di velocità e  $\Delta h$  di altezza.



Considero un volume di controllo che contenga il fronte d'onda, e considero un osservatore solidale col fronte d'onda. L'osservatore vede il liquido a destra arrivare con velocità  $c$ , ed il liquido a destra allontanarsi con velocità  $c - \Delta V$ .

Essendo solidale col fronte per l'osservatore il volume è in quiete, applico la continuità, con  $b$  la larghezza della sezione.

$$b(h + \Delta h)(c - \Delta V) = bhc$$

Da cui

$$\Delta V = c \left( 1 - \frac{h}{h + \Delta h} \right) = c \frac{\Delta h}{h + \Delta h}$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – CELERITA'

Considero l'equazione della quantità di moto. La applico al volume di controllo nella direzione orizzontale, trascurando gli sforzi tangenziali al fondo

$$\Pi_2 + M_2 - \Pi_1 - M_1 = 0$$

Si riduce a considerare tra le sezioni 1 e 2 la pressione idrostatica e la variazione di quantità di moto

$$\rho g \frac{h + \Delta h}{2} A_2 + \rho Q V_2 = \rho g \frac{h}{2} A_1 + \rho Q V_1$$

inserisco

$$A_2 = b(h + \Delta h) \quad A_1 = bh \quad Q = bhc \quad V_2 = c - \Delta V \quad V_1 = c$$

$$\rho g b \frac{(h + \Delta h)^2}{2} + \rho b h c (c - \Delta V) = \rho g b \frac{h^2}{2} + \rho b h c^2$$

raccolgo

$$\frac{1}{2} \rho g b [(h + \Delta h)^2 - h^2] = \rho b h [c^2 - c(c - \Delta V)]$$

semplifico

$$g \Delta h \left( 1 + \frac{\Delta h}{2h} \right) = c \Delta V$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – CELERITA'

Inserisco il valore del delta di velocità derivato dalla continuità

$$\Delta V = c \frac{\Delta h}{h + \Delta h}$$

$$g\Delta h \left(1 + \frac{\Delta h}{2h}\right) = c^2 \frac{\Delta h}{h + \Delta h}$$

Otengo la c come

$$c^2 = gh \left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right) \left(1 + \frac{\Delta h}{2h}\right)$$

$$c = \pm \sqrt{gh \left[1 + \frac{3\Delta h}{2h} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2\right]}$$

Se  $\Delta h < h$

Formula di Bazin

$$c = \pm \sqrt{gh \left[1 + \frac{3\Delta h}{2h}\right]}$$

Se  $\Delta h \ll h$

Formula di Lagrange

Quindi nell'ipotesi di perturbazioni infinitesime  $\Delta h \ll h$

$$c = \pm \sqrt{gh}$$

Analisi valida per acque basse. Nell'analisi si sono trascurati le forze viscosse.

## CORRENTI A PELO LIBERO – CELERITA'

$$c = \pm\sqrt{gh}$$

Ha due valori di segno opposto, un osservatore fisso vede due fronti d'onda propagarsi con celerità assoluta  $V+c$  e  $V-c$

$V+c > 0$  sempre

$V-c > 0$  se corrente veloce  $Fr=V/c > 1$

$V-c < 0$  se corrente lenta  $Fr=V/c < 1$

Cosa ci dice? Data una perturbazione, i due fronti d'onda in corrente veloce si propagano entrambi verso valle, mentre in corrente lenta uno si propaga verso monte e l'altro verso valle.

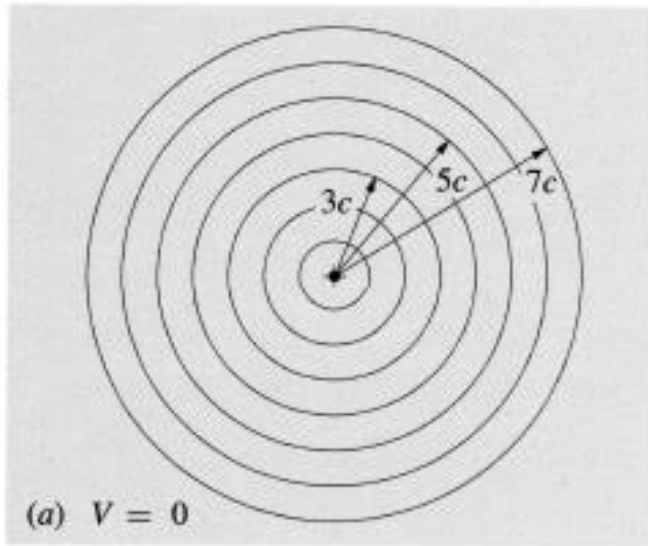
Pertanto in una corrente lenta la perturbazione si fa risentire nelle condizioni di monte, cosa che non succede in una corrente veloce dove entrambi i fronti vengono trasportati verso valle. Quindi:

**Corrente lenta governata da valle**

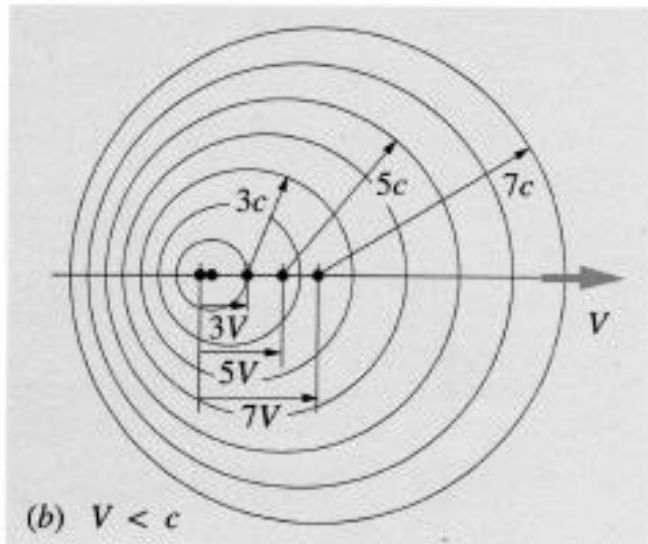
**Corrente veloce governata da monte**

## CORRENTI A PELO LIBERO – CELERITA'

Esempio di andamento della perturbazione in funzione della velocità del mezzo

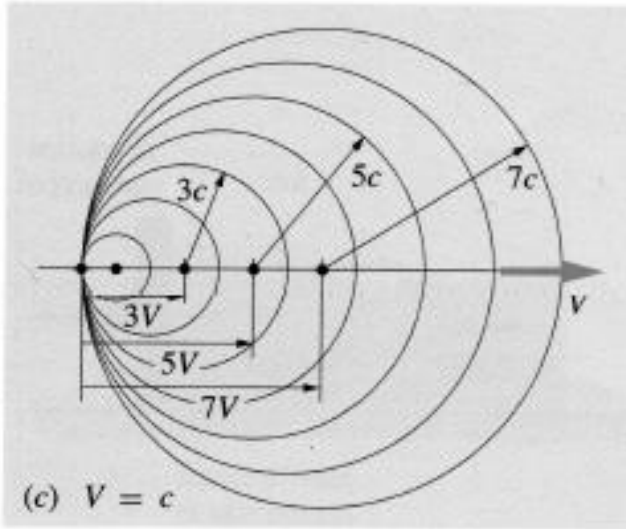


In un mezzo in quiete la perturbazione si propagherà in tutte le direzioni in modo uniforme

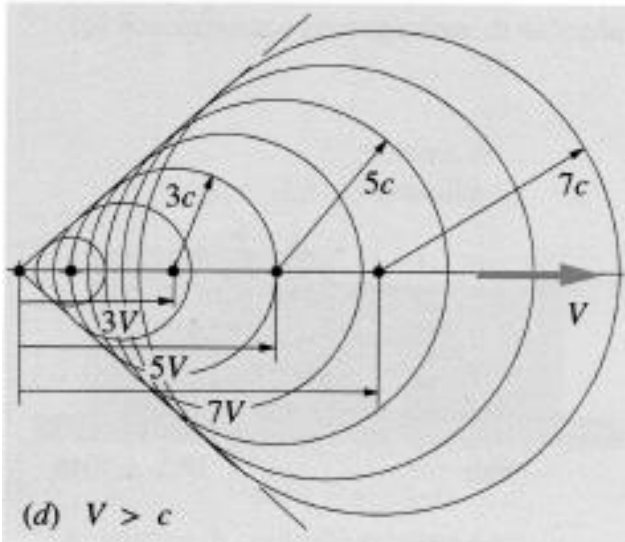


Dato un moto con velocità  $V < c$ , quindi  $Fr < 1$   
Le perturbazioni risalgono la corrente e condizionano pertanto la situazione a monte, ovvero la corrente è governata da valle

## CORRENTI A PELO LIBERO – CELERITA'



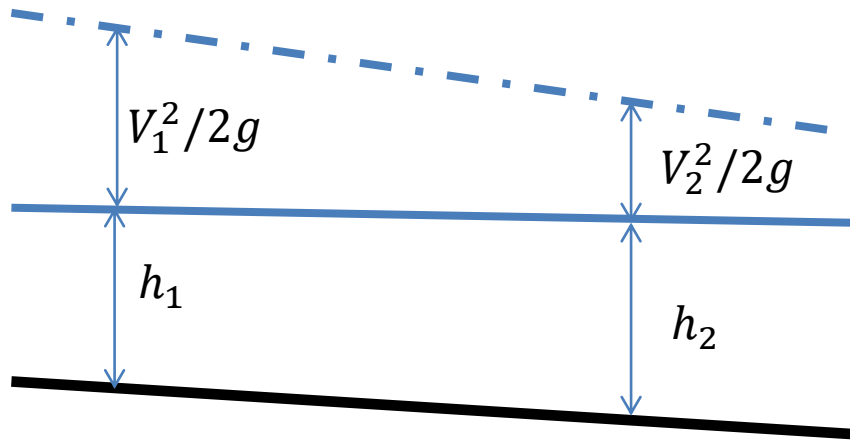
Se la velocità del mezzo è esattamente uguale a quella critica allora  $Fr=1$ , le perturbazioni, avendo la stessa velocità della corrente, non potranno risalire verso monte, ma non verranno neanche trasportata verso valle



Dato un moto con velocità  $V > c$ , quindi  $Fr > 1$  entrambi i fronti vengono trasportati verso valle. La corrente è influenzata solo da cosa si determina a monte, non a valle.

## CORRENTI A PELO LIBERO – EQUAZIONI

Definiamo ora le equazioni per la descrizione delle correnti a pelo libero, si faccia riferimento alla figura sottostante.



### Equazione di continuità

Correnti a pelo libero hanno la densità praticamente costante tra le sezioni, l'eq. Di conservazione della massa tra due sezioni per moto uniforme o permanente sarà:

$$\frac{dQ}{ds} = 0$$

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{cost}$$

$$A_1V_1 = A_2V_2 = AV = \text{cost}$$

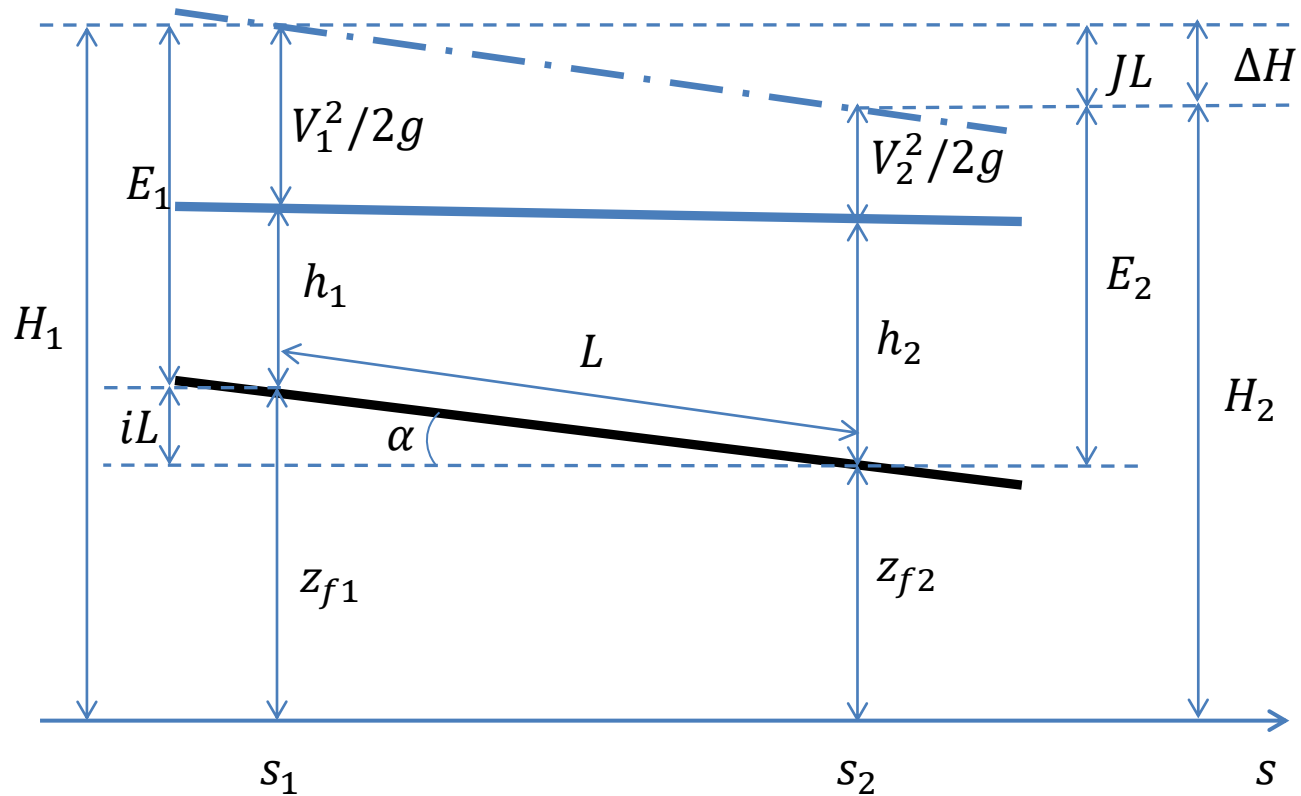
Nel caso di moto uniforme varrà anche  $V=\text{cost}$  e  $A=\text{cost}$

## CORRENTI A PELO LIBERO – EQUAZIONI

### Equazione energia

Per fluido incomprimibile la relazione che lega tra due sezioni l'energia in termini di carico totale sarà:

$$H_1 = H_2 + \Delta H$$



Per correnti a pelo libero esprimendo  $H$  come:

$$z_{f1} + h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_{f2} + h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H$$

Come nelle correnti in pressione esprimiamo la perdita di carico come  $\Delta H = JL$

Con  $L$  la distanza tra le sezioni 1 e 2.

## CORRENTI A PELO LIBERO – EQUAZIONI

Considero la pendenza del canale, esprimibile come:

$$i = \tan \alpha = \frac{z_{f1} - z_{f2}}{s_2 - s_1} \sim \frac{z_{f1} - z_{f2}}{L}$$

Con alfa l'angolo del fondo del canale con l'orizzontale. Di norma  $i$  è molto piccola, da cui il fatto che al denominatore possiamo considerare  $L$ .

L'equazione diventa:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} + iL = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + JL$$

Che in termini di energia specifica

$$E_2 = E_1 + (i - J)L$$

E in forma differenziale

$$\boxed{\frac{dE}{ds} = i - J}$$

Che mostra come l'energia specifica aumenti nel verso del moto per l'abbassamento del fondo e diminuisca per effetto delle perdite di carico

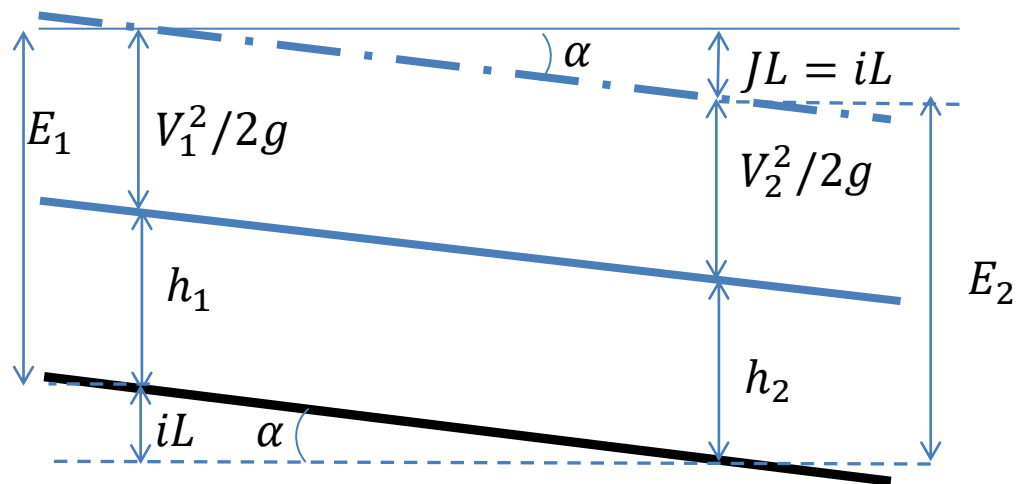


## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO UNIFORME

### Moto uniforme

Nel moto uniforme la velocità e l'area rimangono costanti tra due sezioni, la linea del pelo libero e quella dell'energia specifica sono pertanto parallele al fondo, significa che

$$i = J$$



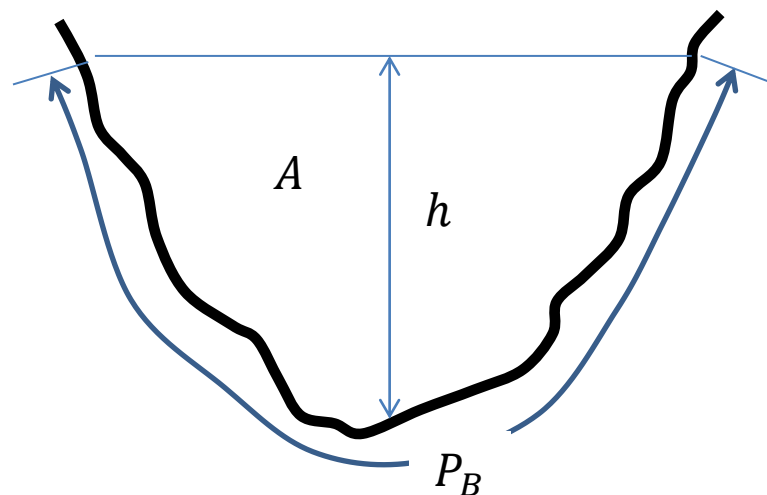
Di norma questo tipo di flussi sono caratterizzati da alti valori di Reynolds, pertanto nella quasi totalità dei casi ci si trova in condizioni di moto puramente turbolento e la cadente può essere espressa in funzione del quadrato della velocità.

Il più delle volte si usa la formula di Chezy per  $J$ :

$$J = \frac{V^2}{C^2 R_i}$$

Dove  $R_i$  è il raggio idraulico, dato dal rapporto tra l'area ed il perimetro bagnato

$$R_i = \frac{A}{P_B}$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO UNIFORME

Il coefficiente C della formula di Chezy è relativo alla scabrezza.

Non siamo in condizioni controllate come per le condotte → gamma molto più varia

Si pensi alla vegetazione acquatica, al deterioramento per agenti atmosferici, alla granulometria del fondo etc. Assume valori tra 30 e 90, dimensionalmente C è la radice di una accelerazione.

Per consuetudine, per indicare le condizioni di moto uniforme, si applica un pedice 0.

Introducendo l'identità  $i=J$  nella formula di Chezy otteniamo

$$V_0 = C_0 \sqrt{R_{i0} i}$$

E ovviamente in termini di portata

$$Q = A_0 C_0 \sqrt{R_{i0} i}$$

Dove avremo l'area ed il raggio idraulico in funzione dell'altezza h,  $A=A(h)$  e  $R_i=R_i(h)$

Per il calcolo del coefficiente di Chezy si può ricorrere alla formula di Gaukler-Strickler:

$$C = c R_i^{1/6}$$

Per cui

$$V_0 = c R_{i0}^{2/3} \sqrt{i}$$

$$Q = c A_0 R_{i0}^{2/3} \sqrt{i}$$

La relazione lega univocamente la portata Q all'altezza del pelo libero h. Nota h, Q è immediatamente determinabile, il processo inverso richiede invece un procedimento iterativo

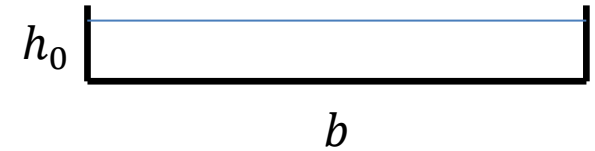
## CORRENTI A PELO LIBERO – PENDENZA CRITICA

### Pendenza critica

Nota  $i$ , la scabrezza, la geometria della sezione e la portata  $Q$ , la formula di Chezy permette di calcolare  $h_0$  con cui la portata si muove in moto uniforme.

Per alveo a sezione rettangolare molto grande, di larghezza  $b$ , per cui  $Ri$  si può approssimare a  $h_0$

$$Ri = \frac{A}{P_B} = \frac{bh_0}{b + 2h_0} \cong \frac{bh_0}{b} = h_0$$



Avendo eliminato la dipendenza di  $Ri$  da  $h_0$  al denominatore, la formula del moto uniforme è invertibile

$$Q = cbh_0^{5/3} \sqrt{i}$$

$$h_0 = \left( \frac{Q}{cb\sqrt{i}} \right)^{3/5}$$

Questa formula ci dice che, mantenendo costante  $Q$ ,  $c$  e  $b$ , se la pendenza diminuisce,  $h_0$  aumenta, e viceversa.

## CORRENTI A PELO LIBERO – PENDENZA CRITICA

Abbiamo anche che l'altezza critica  $k$  con cui la portata  $Q$  defluisce in stato critico si può calcolare da:

$$\frac{A^3}{B} = \frac{Q^2}{g} \qquad k = \sqrt[3]{Q^2/gb^2}$$

Dove  $k$  dipende solo da portata e larghezza della sezione, non dalla pendenza. Per cui data una forma di alveo ed una portata, a prescindere dalla pendenza, la  $k$  rimarrà costante.

Allora se considero una pendenza molto piccola, mi porterà ad avere sicuramente una condizione  $h_0 > k$ , ovvero di corrente lenta.

Partendo da questa condizione, se inizio ad aumentare la pendenza,  $h_0$  inizia a diminuire mentre  $k$  rimane costante. Esisterà una certa pendenza  $i_c$  per cui la  $h_0 = k$ , questa pendenza è definita come critica. Sempre per sezione rettangolare:

$$i_c = \left( \frac{Q_c}{cbk^{\frac{5}{3}}} \right)^2$$

Ma la portata critica si può esprimere anche come  $Q_c = AV_c = bk\sqrt{gk}$

Per cui 
$$i_c = \left( \frac{bk\sqrt{gk}}{cbk^{\frac{5}{3}}} \right)^2 = \frac{g}{c^2 k^{1/3}}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – PENDENZA CRITICA

Se la pendenza cresce ancora ci troveremo in una situazione  $h_0 < k$  e  $V_0 > V_c$ , quindi una situazione di moto uniforme a corrente veloce, mentre prima avevamo un moto uniforme a corrente lenta.

Si definisce un alveo:

- **A debole pendenza se  $i < i_c$**  e la generica portata  $Q$  vi scorre come corrente uniforme lenta e quindi  $h_0 > k$
- **A forte pendenza se  $i > i_c$**  e la generica portata  $Q$  vi scorre come corrente uniforme veloce, quindi  $h_0 < k$

Di norma pendenze dello 0,1-0,2% danno deboli pendenze mentre dello 0,6-0,7% sono pendenze forti a prescindere dalla portata.

Per pendenze intermedie, l'alveo può risultare a debole pendenza per portate piccole e divenire forte per grandi portate.

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

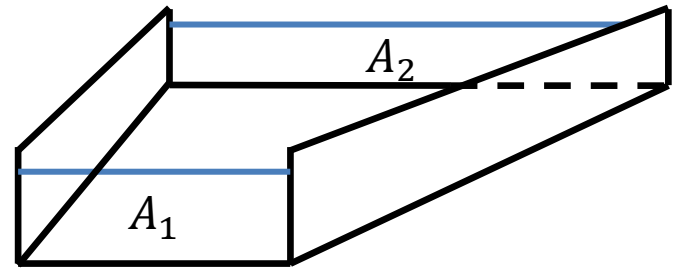
Abbiamo definito il moto permanente, come quel moto in cui le mie variabili fondamentali sono funzioni solo dello spazio e non del tempo.

Ne considero un sottoinsieme: il moto permanente si definisce gradualmente vario se lungo la direzione del moto le variazioni di altezza del pelo libero e di velocità, tra le sezioni, sono graduali. Pertanto il profilo di pelo libero ha pendenze modeste e non vi sono variazioni brusche o discontinuità.

Il nostro obiettivo ora, è determinare un'equazione che mi permetta di descrivere l'andamento del profilo nello spazio.

Innanzitutto facciamo alcune considerazioni. L'area  $A$  dipende solo dallo spazio, ma questa dipendenza è duplice, ovvero dipende dallo spazio sia per come varia la forma dell'alveo, sia per la variazione spaziale dell'altezza del pelo libero, pertanto:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{ds}$$



L'equazione di continuità invece ci dice che

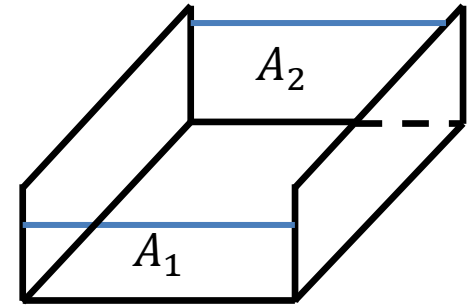
$$\frac{dQ}{ds} = A \frac{dV}{ds} + V \frac{dA}{ds} = 0$$

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{V}{A} \frac{dA}{ds}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

Poniamoci nella condizione in cui il nostro alveo non cambi forma nello spazio, ovvero

$$\frac{\partial A}{\partial s} = 0$$



Condizione che viene definita di alveo prismatico. Allora avremo

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{ds} = \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{ds}$$

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{V}{A} \frac{dA}{ds} = -\frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{ds} = -\frac{V}{A} B \frac{dh}{ds} \quad \text{con} \quad \frac{dA}{dh} = B$$

Se ora considero l'equazione dell'energia

$$\frac{dE}{ds} = i - j$$

$$\frac{d}{ds} \left( h + \frac{V^2}{2g} \right) = i - j$$

$$\frac{dh}{ds} + \frac{V}{g} \frac{dV}{ds} = i - j$$

$$\frac{dh}{ds} - \frac{V^2}{g A/B} \frac{dh}{ds} = \frac{dh}{ds} (1 - Fr^2) = i - j$$



$$\boxed{\frac{dh}{ds} = \frac{i - j}{1 - Fr^2}}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

Se non avessimo la condizione di alveo prismatico, avremmo dovuto considerare la variazione della forma dell'alveo nello spazio, per cui lo sviluppo a partire dalla equazione dell'energia, per tenerne conto sarà:

$$\frac{dE}{ds} = \frac{d}{ds} \left( h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = \frac{dh}{ds} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{ds} = i - j$$

Ricordando che

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{ds}$$

Sostituendo

$$\frac{dh}{ds} \left( 1 - \frac{Q^2}{gA^3} B \right) - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial s} = i - j$$

abbiamo l'equazione generale della variazione del profilo di pelo libero di una corrente gradualmente variata in moto permanente



## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

Quindi equazione del profilo del pelo libero in moto permanente gradualmente variato, nell'ipotesi di alveo cilindrico o prismatico:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - j}{1 - Fr^2}$$

Da questa formulazione possiamo ottenere una descrizione dei profili.

Anche in questo caso per esprimere la cadente si ricorre alla formula di Chezy esprimendo  $C$  con la formula di Gaukler-Strickler

$$J = \frac{V^2}{C^2 R_i} = \frac{Q^2}{c^2 R_i^{4/3} A^2}$$

Valutiamo il segno di  $dh/ds$ , questo dipenderà dai termini  $i, J$  e  $Fr$ .

**Per il numeratore**, abbiamo detto di considerare  $J$  come esprimibile attraverso la formula di Chezy, sappiamo che nel caso di moto uniforme  $h=h_0$ :

$$i = J ; \quad \frac{dh}{ds} = 0$$

L'altezza non varia rispetto al fondo

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

$J$  con Chezy vede al denominatore  $Ri$  e  $A$ , funzioni di  $h$ , al crescere di  $h$  quindi  $J$  diminuisce e per  $h \rightarrow \text{infinito}$  avremo  $J \rightarrow 0$ . Questo è evidente se consideriamo ad esempio una sezione molto larga e consideriamo una portata fissa

$$J = \frac{V^2}{C^2 R_i} = \frac{Q^2}{c^2 R_i^{4/3} A^2} = \frac{Q^2}{c^2 h^{4/3} b^2 h^2}$$

Ora, se consideriamo una pendenza ed una portata fissa, ed a partire dalla condizione di moto uniforme  $h=h_0$ , la nostra altezza risulta maggiore di quella uniforme ne deriva che:

*Se  $h=h_0$  abbiamo  $i=J$ , allora quando  $h>h_0$  avremo  $J<i$  e  $i-J>0$*

analogamente

*Se  $h=h_0$  abbiamo  $i=J$ , allora quando  $h<h_0$  avremo  $J>i$  e  $i-J<0$*

Inoltre  $J$  è sempre positivo, invece  $i$  dipende dalla pendenza del canale, per pendenza nulla ( $i=0$ ) o  $i$  in contropendenza,  $i-J$  sarà sempre negativo, **ricapitolando**:

- Se  $i \leq 0$  pendenza nulla o negativa  $\rightarrow i-J < 0$
- Se  $i > 0$  pendenza positiva:
  - $h > h_0 \rightarrow i-J > 0$
  - $h = h_0 \rightarrow i-J = 0$
  - $h < h_0 \rightarrow i-J < 0$

# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

## Per il denominatore:

L'analisi è già stata fatta

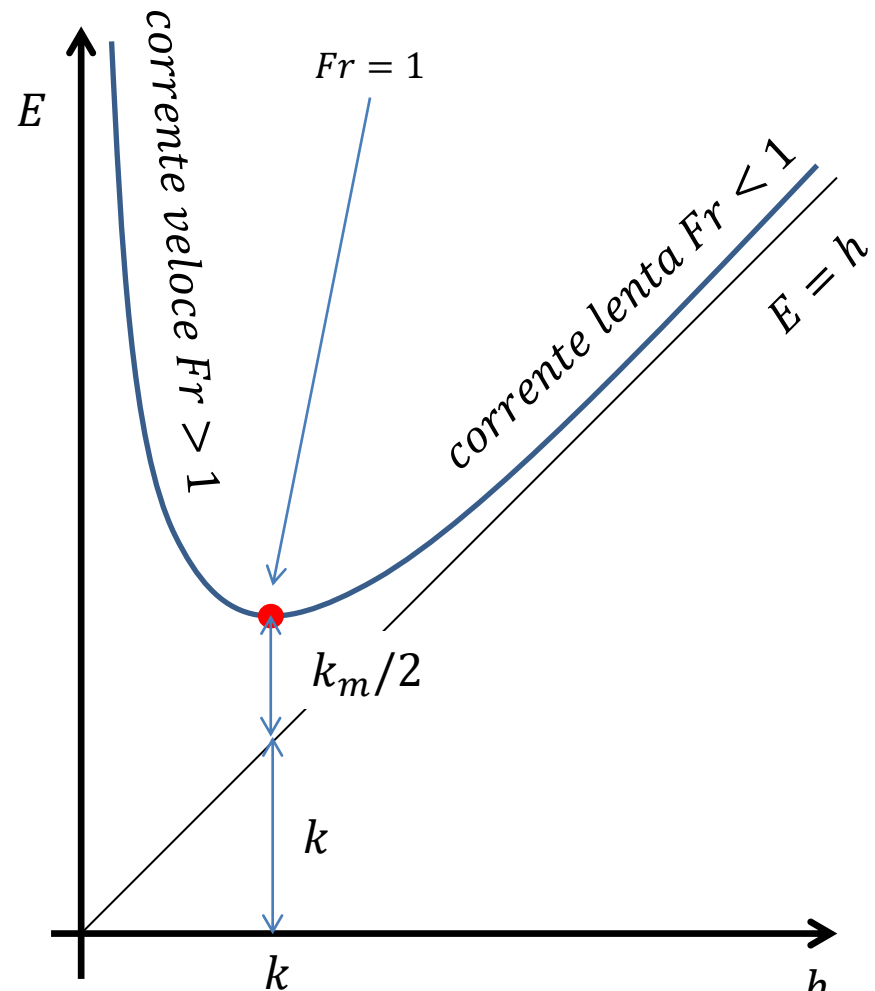
- $1 - Fr^2 > 0$  se corrente lenta ( $Fr < 1$ )
- $1 - Fr^2 < 0$  se corrente veloce ( $Fr > 1$ )

Del resto se  $E$  è funzione di  $s$  per la sola  $h$

$$\frac{dE}{ds} = i - J \qquad \frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dh} \frac{dh}{ds} = i - J$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{\frac{dE}{dh}} \qquad \text{ma} \qquad \frac{dE}{dh} = 1 - \frac{V^2}{gA} B = 1 - Fr^2$$

$$\text{quindi} \qquad \frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - Fr^2}$$



In questo caso il segno deriverà dal confronto di  $h$  con  $k$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

Ricapitolando:

NUMERATORE		
$h \rightarrow \infty$	$J \rightarrow 0$	$i - J \rightarrow i$
$h > h_0$	$J < i$	$i - J > 0$
$h = h_0$	$J = i$	$i - J = 0$
$h < h_0$	$J > i$	$i - J < 0$

DENOMINATORE		
$h > k$	$Fr < 1$	$1 - Fr^2 > 0$
$h = k$	$Fr = 1$	$1 - Fr^2 = 0$
$h < k$	$Fr > 1$	$1 - Fr^2 < 0$

Il loro rapporto definirà il segno di  $dh/ds$ , quindi come varia  $h$  nello spazio

**$dh/ds > 0$**   $h$  aumenta in direzione del moto,  $V$  si riduce  $\rightarrow$  **corrente ritardata**

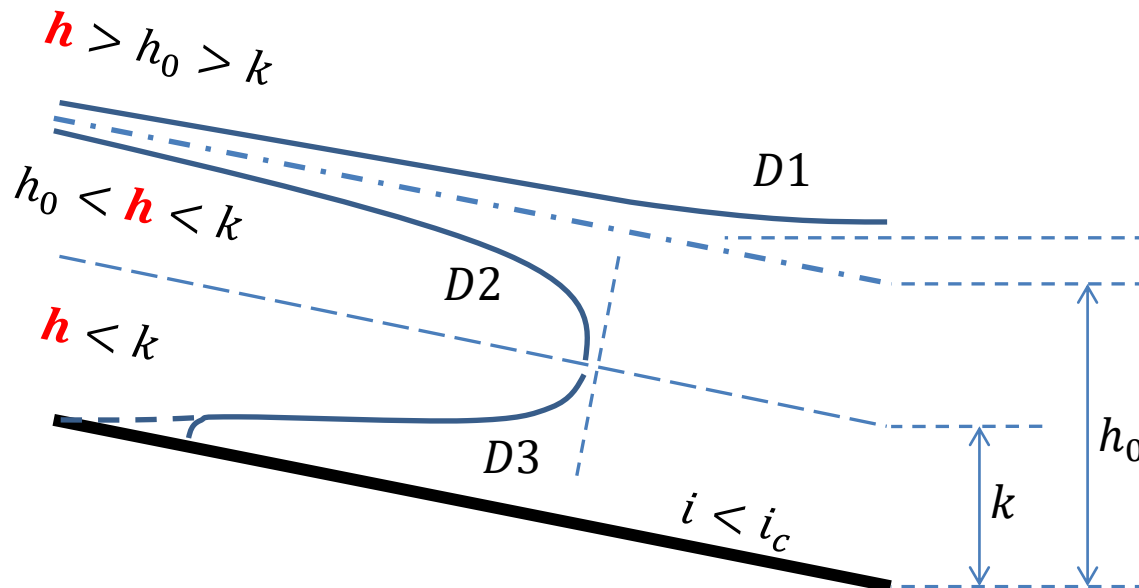
**$dh/ds \rightarrow 0$**  profilo parallelo al fondo  $\rightarrow$  corrente di moto uniforme

**$dh/ds < 0$**   $h$  diminuisce in direzione del moto,  $V$  aumenta  $\rightarrow$  **corrente accelerata**

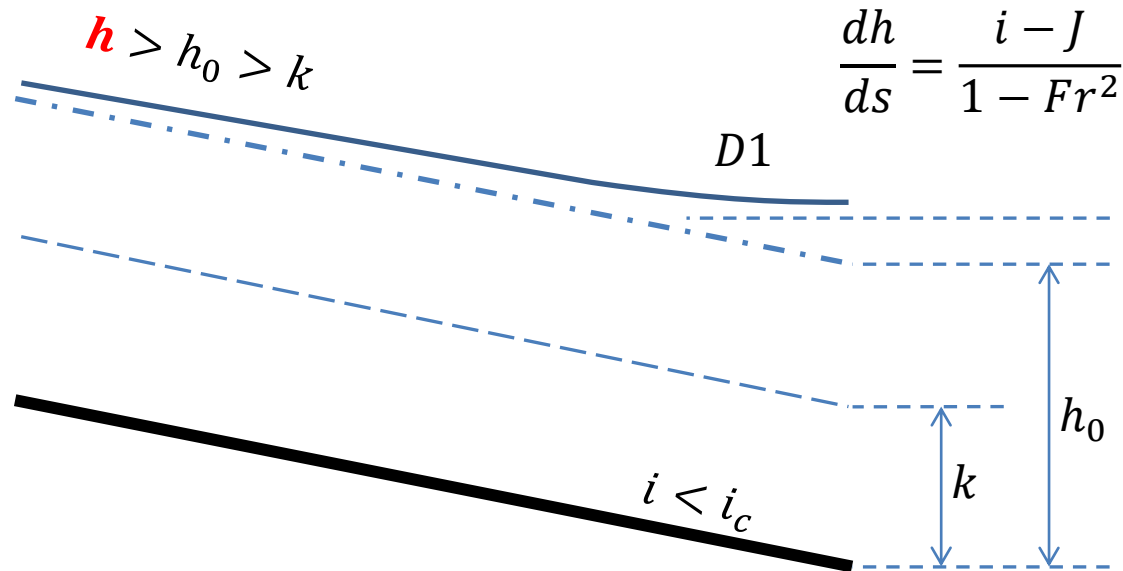
## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

Analizziamo ora che tipo di profilo si può instaurare nel caso di corrente in alveo a **debole pendenza**. Il segno della funzione deriverà dal confronto di  $h$  con  $h_0$  e  $k$ , si vengono a definire tre zone. A questi profili vien associata una notazione 'D'.

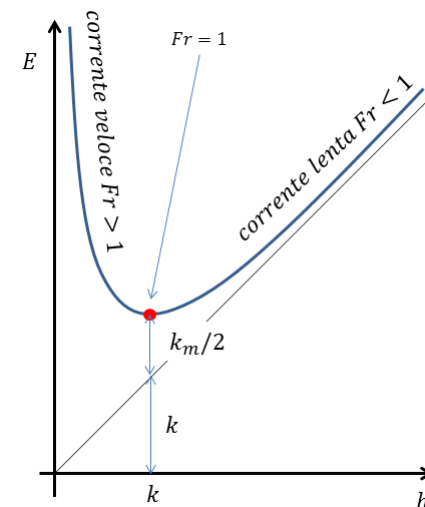
Altezza iniziale	notazione	$i-J$	$1-Fr^2$	$dh/ds$
$h > h_0 > k$	D1	$>0$	$>0$	$>0$
$k < h < h_0$	D2	$<0$	$>0$	$<0$
$h < k < h_0$	D3	$<0$	$<0$	$>0$



# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO



Altezza iniziale	notazione	$i - J$	$1 - Fr^2$	$dh/ds$
$h > h_0 > k$	D1	$> 0$	$> 0$	$> 0$



## Profilo D1

Corrente lenta con altezza superiore a quella uniforme e  $dh/ds > 0$  corrente ritardata.

Verso monte  $h$  decresce, tende a  $h_0$  e la pendenza del profilo tende ad  $i$ , quindi una condizione di moto uniforme asintotica. Verso valle le  $h$  crescono, quindi la  $V$  si riduce e la  $J$  diminuisce,  $Fr$  come funzione della velocità tende a 0 ed il denominatore ad 1; al limite  $dh/ds \rightarrow i$ . Il profilo a valle tende a disporsi orizzontale, il pelo libero si innalza di tanto quanto il fondo si abbassa per la pendenza.

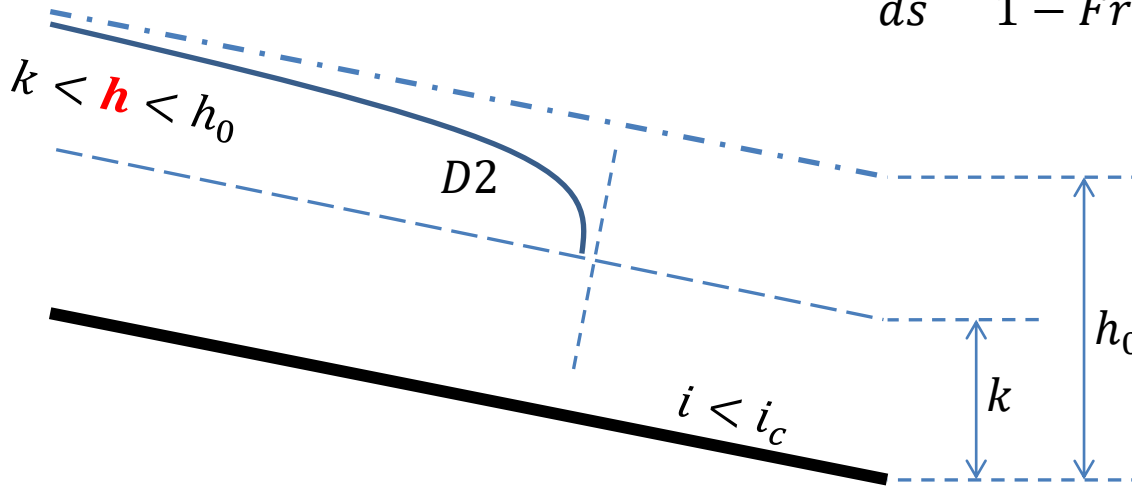
## Profilo D1

- Verso monte asintotico al moto uniforme
- Verso valle asintotico all'orizzontale

# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - Fr^2}$$

Altezza iniziale	notazione	$i - J$	$1 - Fr^2$	$dh/ds$
$k < h < h_0$	D2	$< 0$	$> 0$	$< 0$



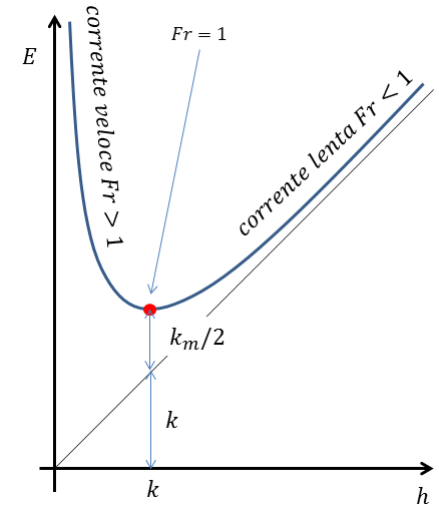
## Profilo D2

Corrente lenta con altezza inferiore a quella uniforme.

$i - J < 0$ , corrente lenta  $Fr < 1$ , e denominatore  $> 0$  quindi  $dh/ds < 0$  è una corrente accelerata.

Verso monte  $h$  cresce, tende a  $h_0$  e la pendenza del profilo tende ad  $i$ . condizione di moto uniforme asintotica.

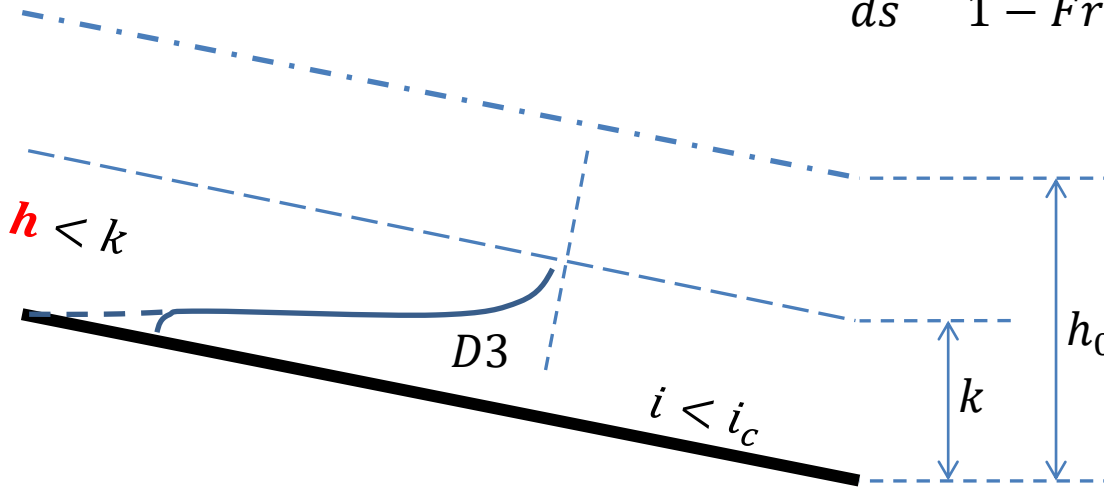
Verso valle  $h$  decrescono, tende allo stato critico  $k$ ,  $Fr$  tende a 1 ed il denominatore tende a 0, pertanto il profilo tende ad essere perpendicolare al fondo.



# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - Fr^2}$$

Altezza iniziale	notazione	i-J	1-Fr <sup>2</sup>	dh/ds
h < k < h <sub>0</sub>	D3	< 0	< 0	> 0



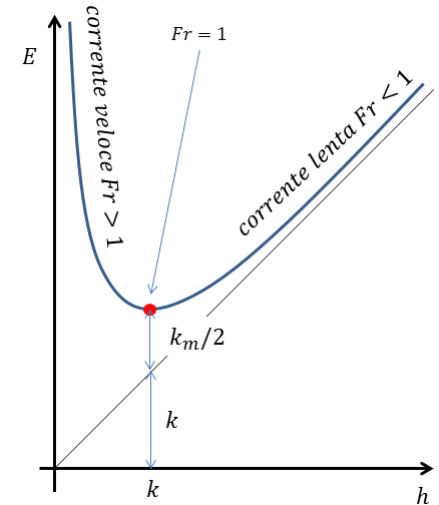
## Profilo D3

Corrente veloce con altezza inferiore a quella uniforme e critica in un alveo a debole pendenza.

$dh/ds > 0$  corrente ritardata.

Verso valle  $h$  crescono, tendono a  $k$  e anche in questo caso il profilo teorico tende a essere con tangente verticale.

Verso monte  $h$  decresce, il profilo teorico tenderebbe a dare valori negativi di  $h$ , cosa senza significato fisico, anche in questo caso come per D1 esiste un asintoto orizzontale.





## OSSERVAZIONE

Andamento del profilo verso il fondo, ad esempio il profilo D3.

Per alveo rettangolare molto grande  $Ri=h$ , con  $q=Q/B$  la portata unitaria

$$J = \frac{V^2}{C^2 R_i} = \frac{Q^2}{c^2 R_i^{4/3} A^2} \quad \longrightarrow \quad J = \frac{q^2}{C^2 h^3} = \frac{q^2}{c^2 h^{10/3}}$$

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dh} \quad \longrightarrow \quad \frac{dE}{dh} = 1 - \frac{q^2}{gh^3}$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{\frac{dE}{dh}} = \frac{i - \frac{q^2}{c^2 h^{10/3}}}{1 - \frac{q^2}{gh^3}}$$

Per  $h \rightarrow 0$

numeratore  $\rightarrow$  infinito  $^{10/3}$

Denominatore  $\rightarrow$  infinito  $^3$

Rapporto  $\rightarrow$  infinito

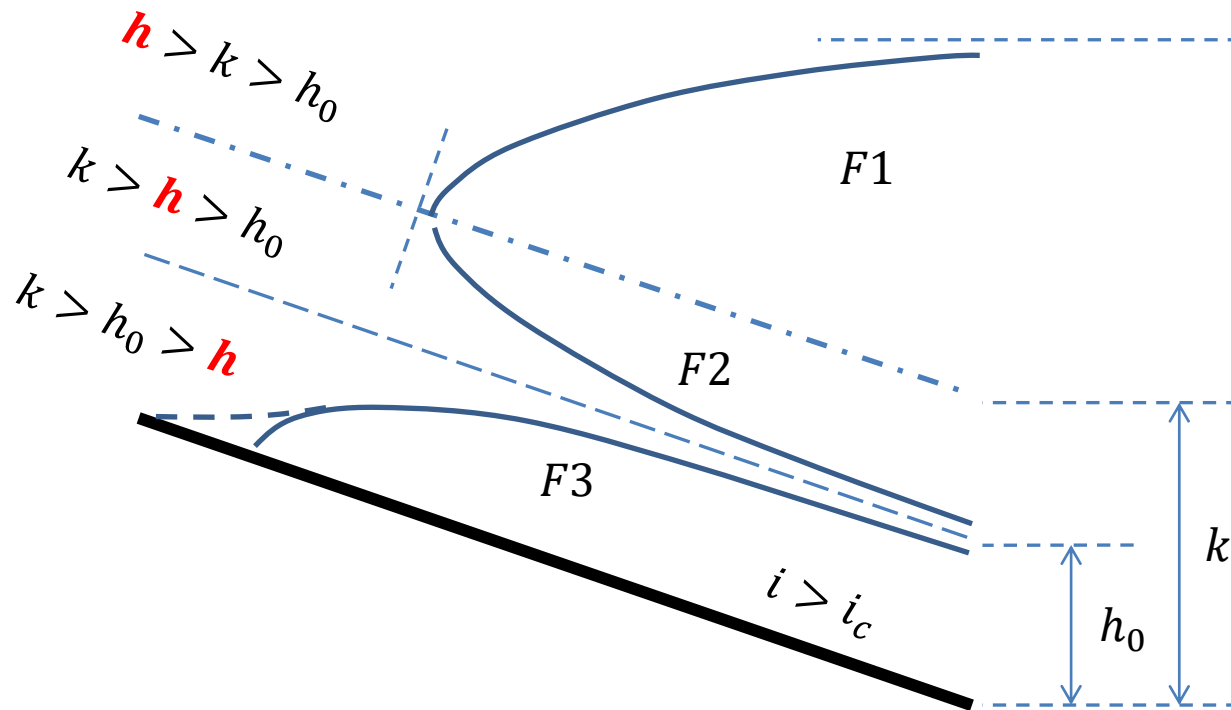
Quindi  $dh/ds$  tenderebbe a porsi perpendicolare al fondo.

Nella realtà anche in questo caso  $dh/ds \rightarrow i$

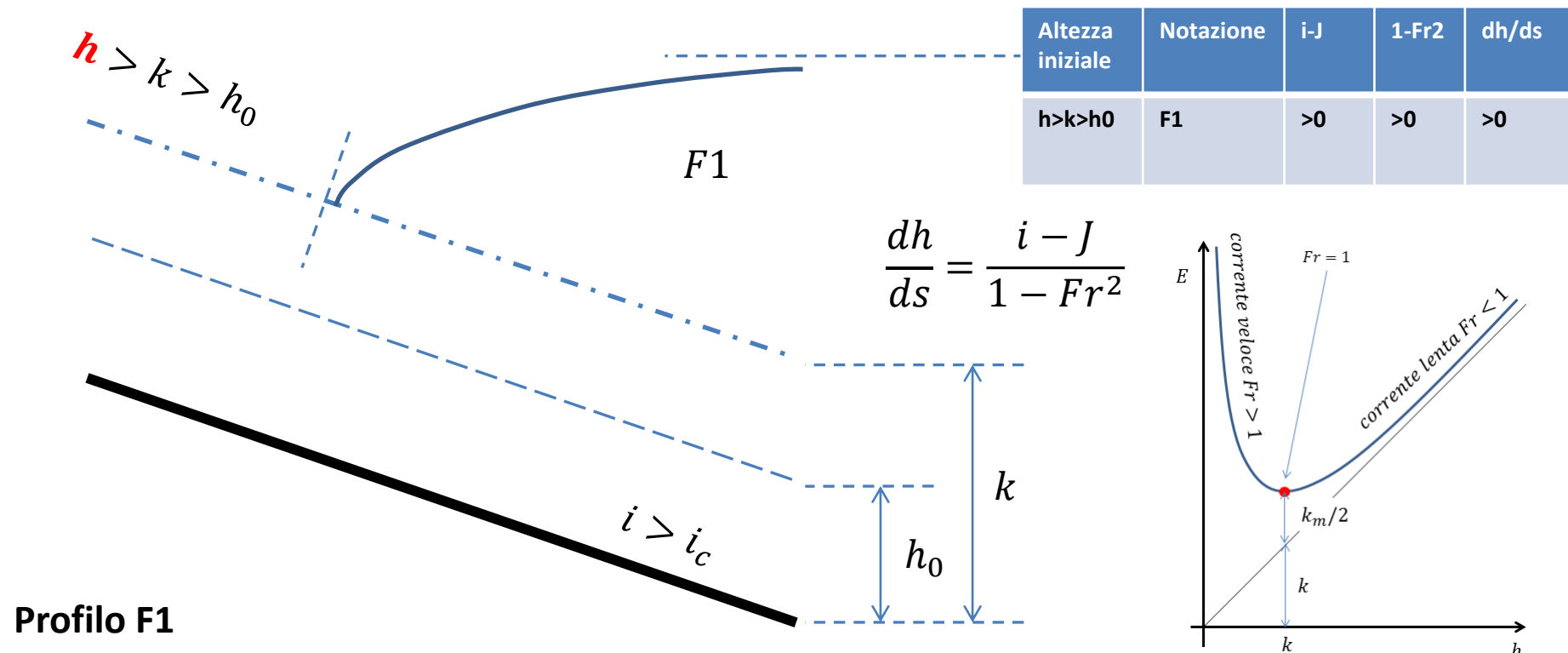
## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

Analizziamo ora i profili nel caso di corrente in alveo a **forte pendenza**. Il segno della funzione deriverà anche in questo caso dal confronto di  $h$  con  $h_0$  e  $k$ . Notazione 'F'.

Altezza iniziale	notazione	$i-J$	$1-Fr^2$	$dh/ds$
$h > k > h_0$	F1	$>0$	$>0$	$>0$
$h_0 < h < k$	F2	$>0$	$<0$	$<0$
$h < h_0 < k$	F3	$<0$	$<0$	$>0$



# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO



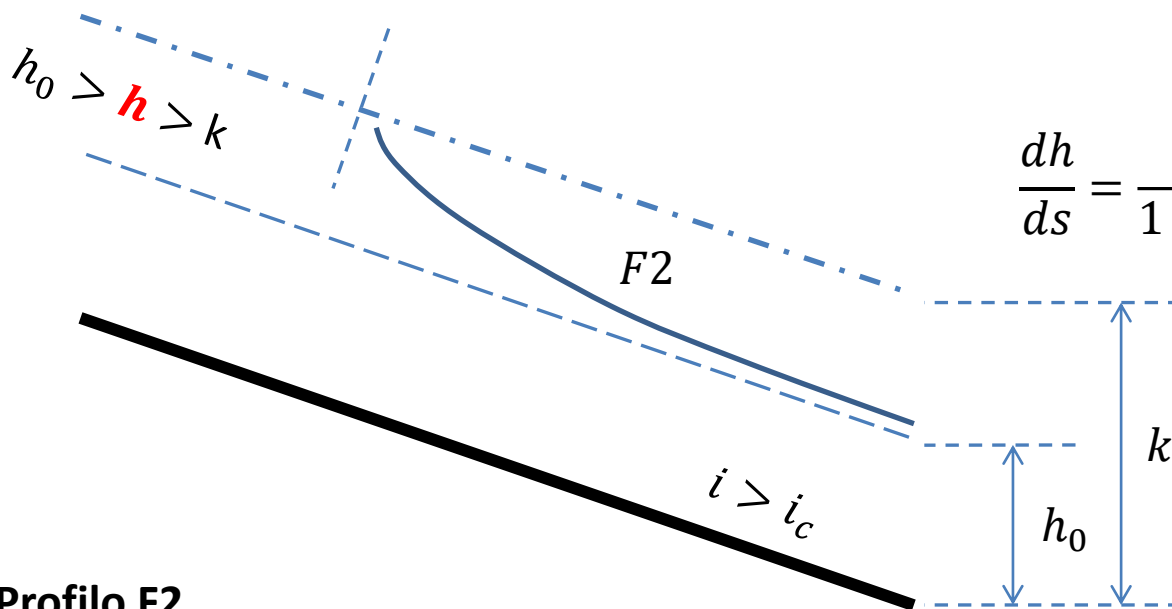
$h > k > h_0$  corrente lenta con altezza superiore a quella critica. Numeratore e denominatore  $> 0$ ,  $dh/ds > 0$  corrente ritardata.

Verso monte  $h$  decresce, tende a  $k$  ed il profilo tende ad essere a tangente verticale e ascendente rispetto al fondo (analogo al caso D approssiando lo stato critico).

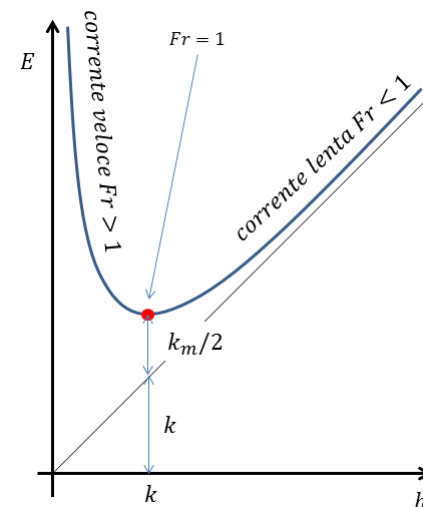
Verso valle  $h$  crescono, tendenzialmente all'infinito, analogamente al caso D1 il profilo è orizzontale.

# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

Altezza iniziale	notazione	$i-J$	$1-Fr^2$	$dh/dx$
$h_0 > h > k$	F2	$> 0$	$< 0$	$< 0$



**Profilo F2**



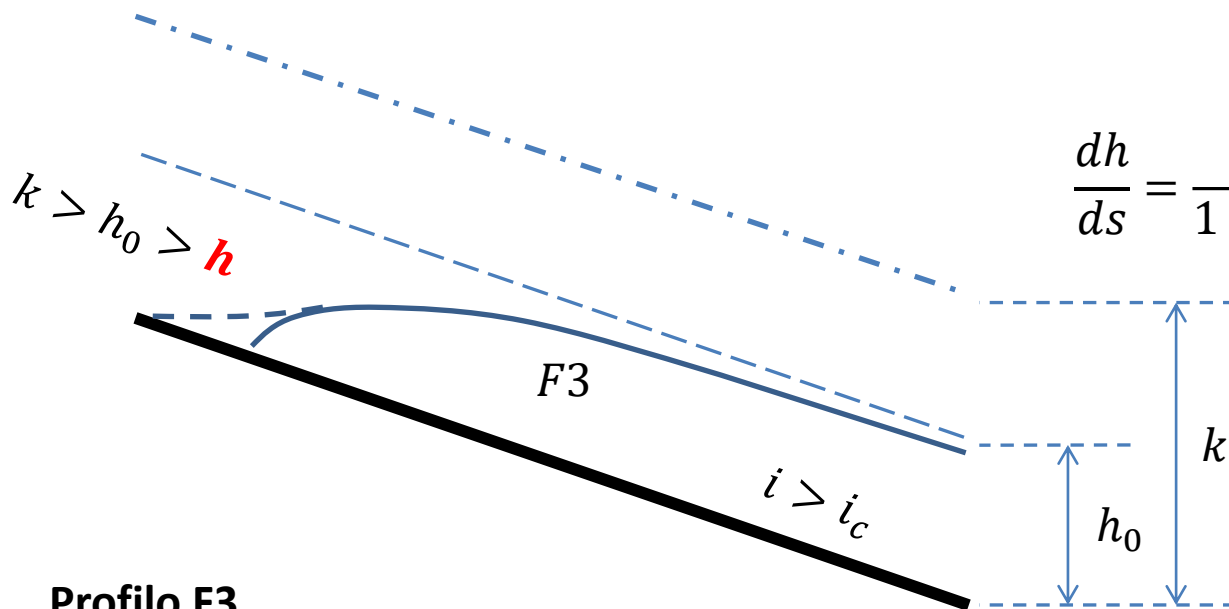
$k > h > h_0$  corrente veloce con altezza inferiore a quella critica e maggiore di quella uniforme. Numeratore positivo e denominatore  $< 0$ ,  $dh/ds < 0$  corrente accelerata.

Verso monte  $h$  cresce, tende a  $k$  ed il profilo tende ad essere a tangente verticale e discendente rispetto al fondo.

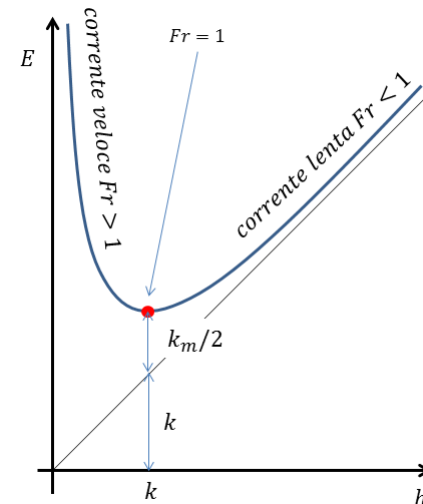
Verso valle  $h$  diminuiscono, tende a  $h_0$  e la pendenza del profilo tende ad  $i$   
Quindi verso valle tende asintoticamente al moto uniforme.

# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

Altezza iniziale	notazione	$i - J$	$1 - Fr^2$	$dh/dx$
$h < h_0 < k$	F3	$< 0$	$< 0$	$> 0$



$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - Fr^2}$$



## Profilo F3

$k > h_0 > h$  corrente veloce con altezza inferiore a quella uniforme. Numeratore e denominatore  $< 0$ ,  $dh/ds > 0$  corrente ritardata.

Verso monte  $h$  decresce, analogamente al caso D3 asintoto orizzontale.

Verso valle  $h$  cresce, tende all'altezza di moto uniforme e la pendenza del profilo tende ad  $i$ .

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

Alvei a debole pendenza, il moto uniforme si ottiene asintoticamente verso monte.

Alvei a forte pendenza, il moto uniforme si ottiene asintoticamente verso valle.

Si richiama quanto detto sulla propagazione dei disturbi.

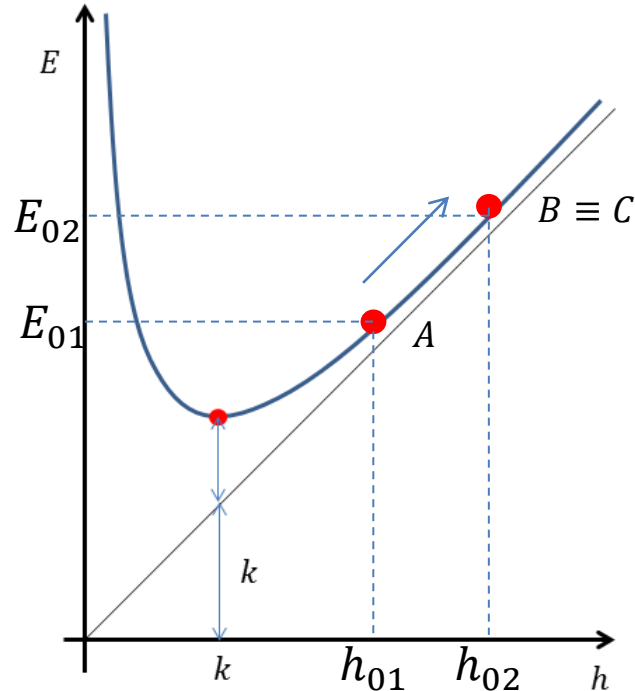
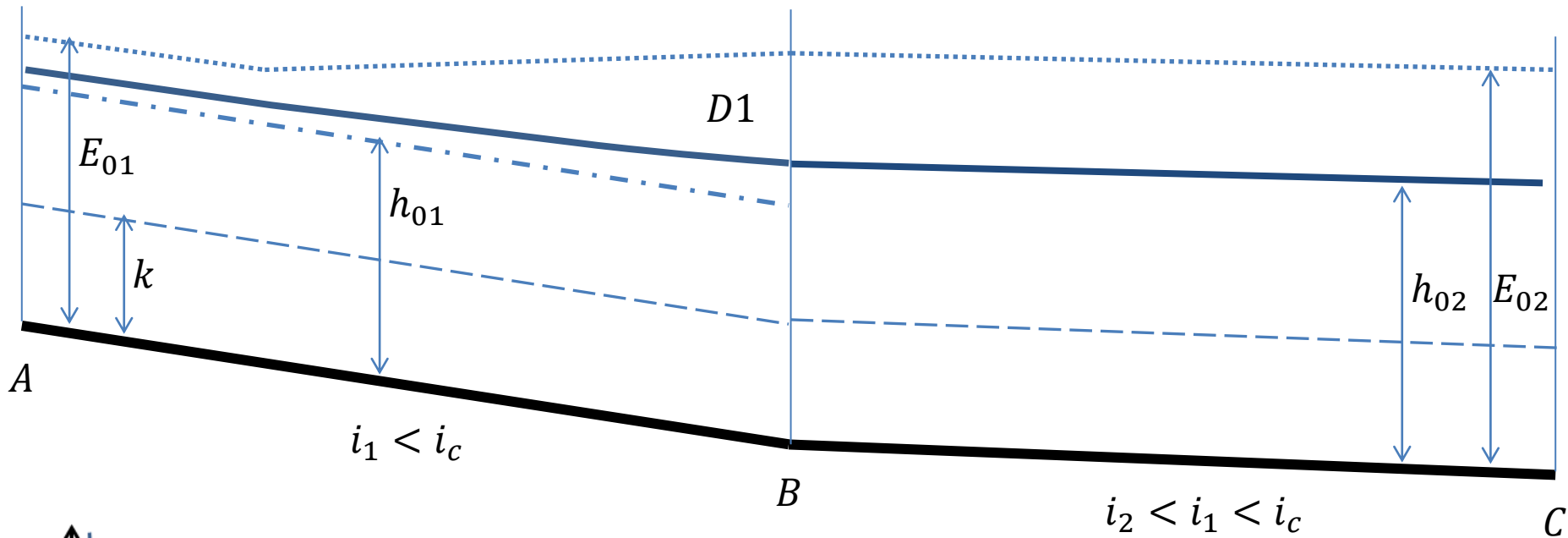
Dei 6 profili quattro sono ritardati e due accelerati, e questi due avvengono quando l'altezza è compresa tra l'altezza critica e quella uniforme

I profili sono determinati dalle condizioni al contorno, di norma per correnti lente la condizione al contorno viene da valle, per le correnti veloci da monte.

A partire da una sezione di controllo che forza le condizioni al contorno si determina il valore di  $h$  e quindi i profili.

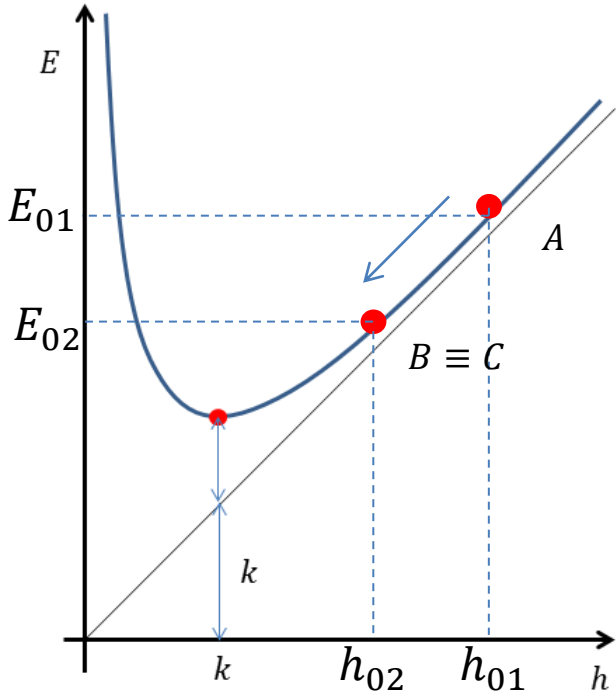
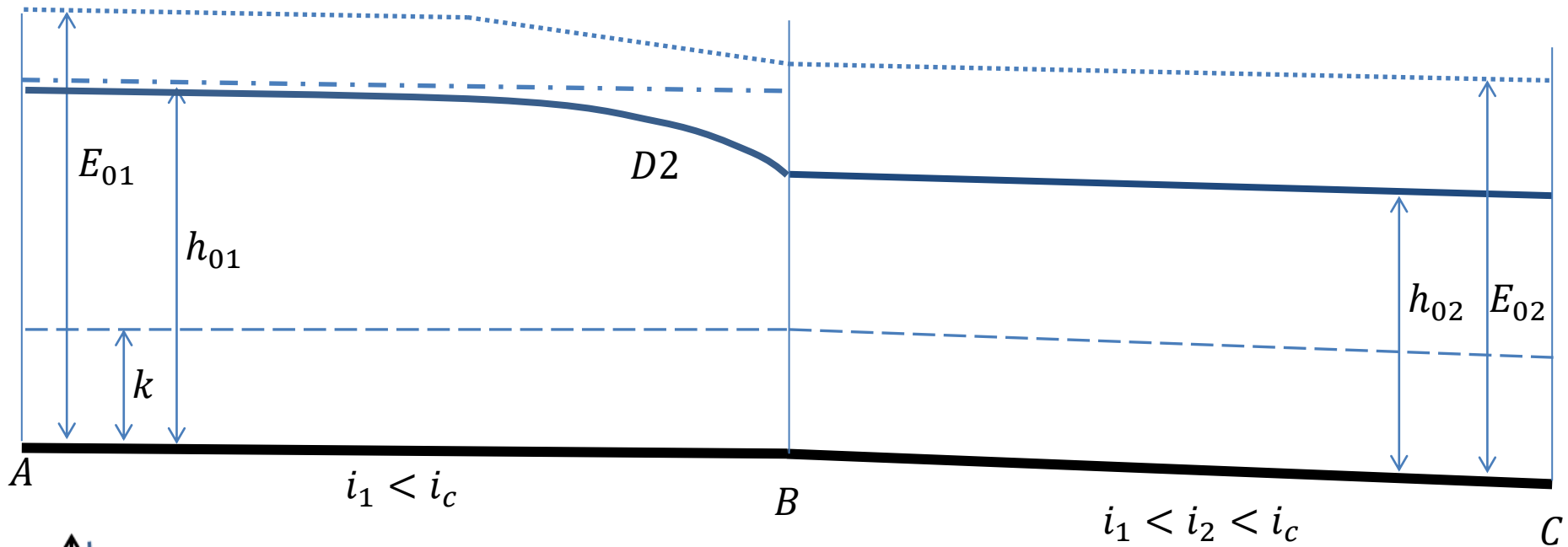
A seguire si mostrano alcuni esempi di profili di corrente.

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO



Tratto AB e tratto BC a debole pendenza con diverse pendenze, essendo  $i_2 < i_1$ , allora l'altezza di moto uniforme  $h_{02} > h_{01}$  vista la dipendenza di  $h_0$  dall'inverso della pendenza. I tratti sono governati da valle essendo correnti di moto uniforme lente. Il tratto AB è governato dalla sezione B, il tratto BC da C. Se infinitamente a valle non ci sono disturbi alla sezione C abbiamo  $h_{02}$  che risale fino alla sezione B. L'altezza  $h_{02}$  (maggiore di  $h_{01}$ ) alla sezione B governa il tratto AB, abbiamo un profilo  $D1$  dalla sezione B che risale verso monte verso le condizioni di moto uniforme  $h_{01}$ . Da A a C l'energia specifica cresce.

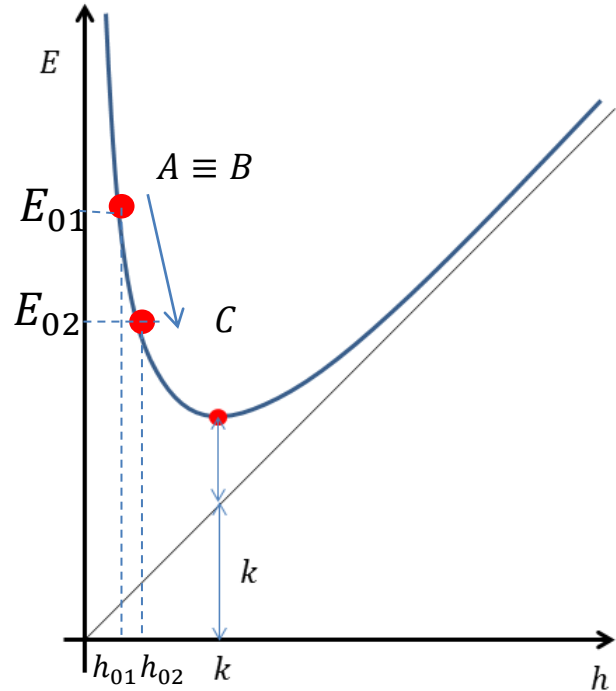
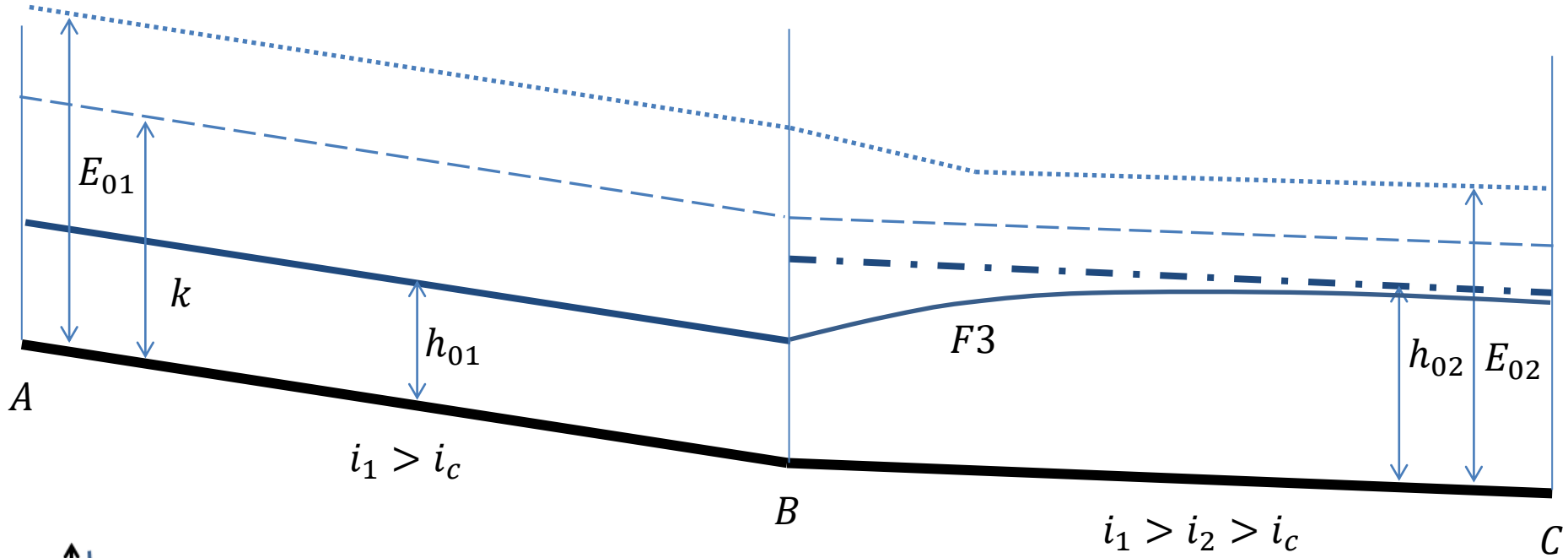
## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO



Tratto AB e tratto BC a debole pendenza con diverse pendenze, essendo  $i_1 < i_2$ , allora l'altezza di moto uniforme  $h_{01} > h_{02}$  vista la dipendenza di  $h_0$  dall'inverso della pendenza. I tratti sono governati da valle essendo correnti di moto uniforme lente. Il tratto AB è governato dalla sezione B, il tratto BC da C. Se infinitamente a valle non ci sono disturbi alla sezione C abbiamo  $h_{02}$  che risale fino alla sezione B. L'altezza  $h_{02}$  (minore di  $h_{01}$ ) alla sezione B governa il tratto AB, abbiamo un profilo D2 dalla sezione B che risale verso monte verso le condizioni di moto uniforme  $h_{01}$ . Da A a C l'energia specifica decresce.

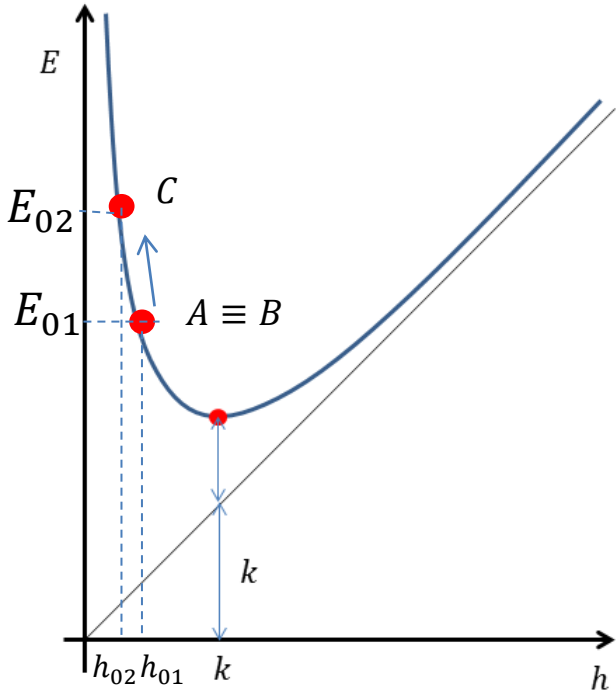
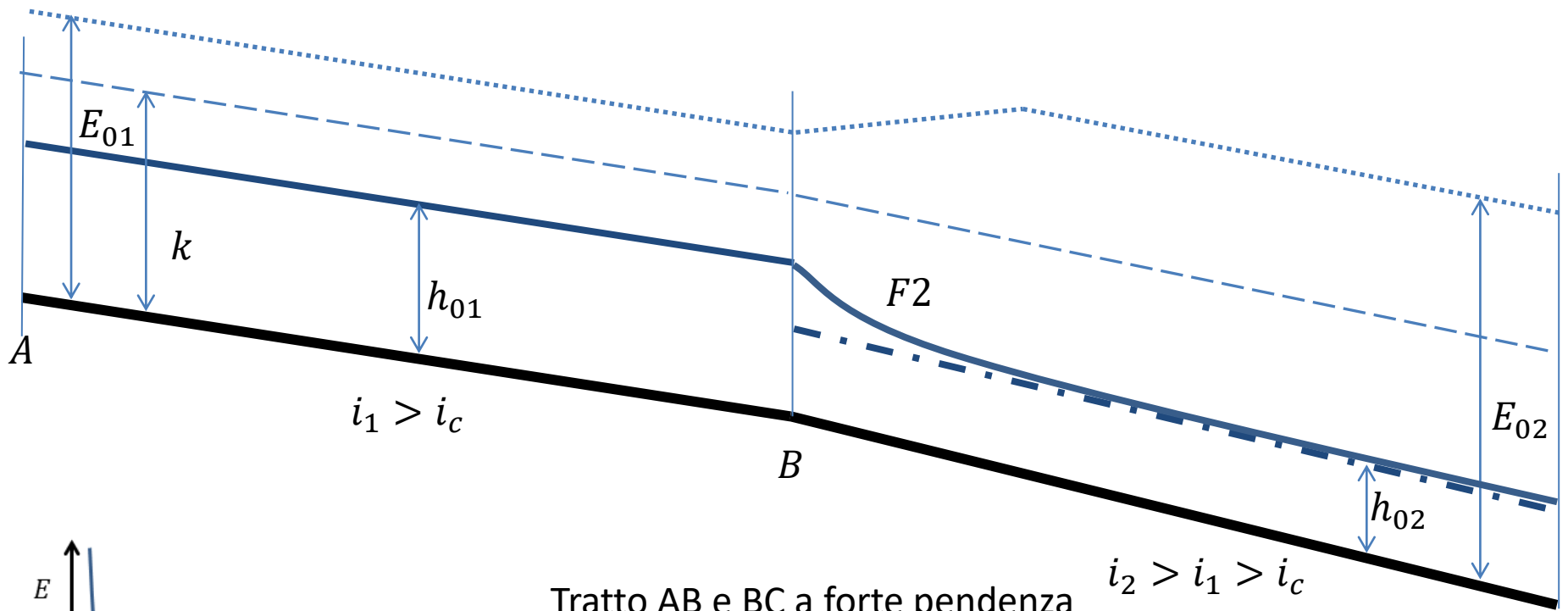


# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO



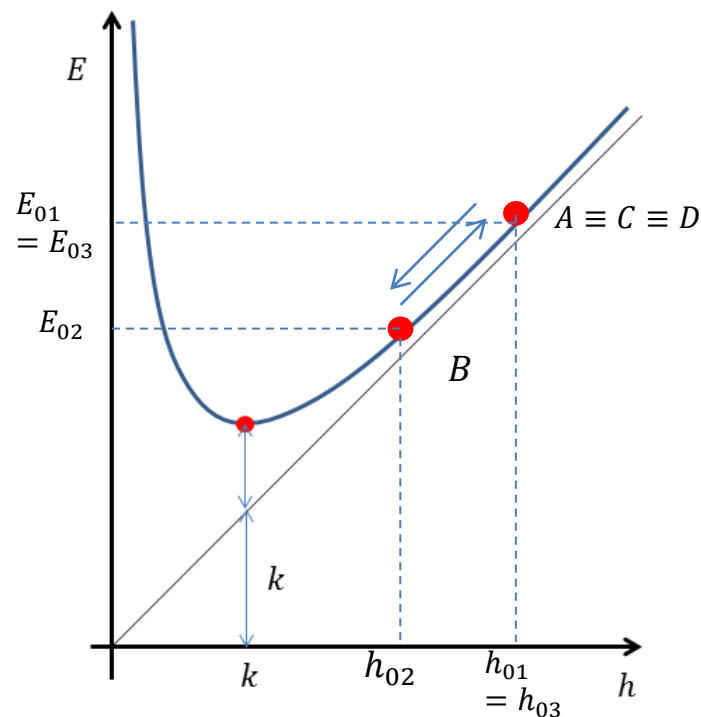
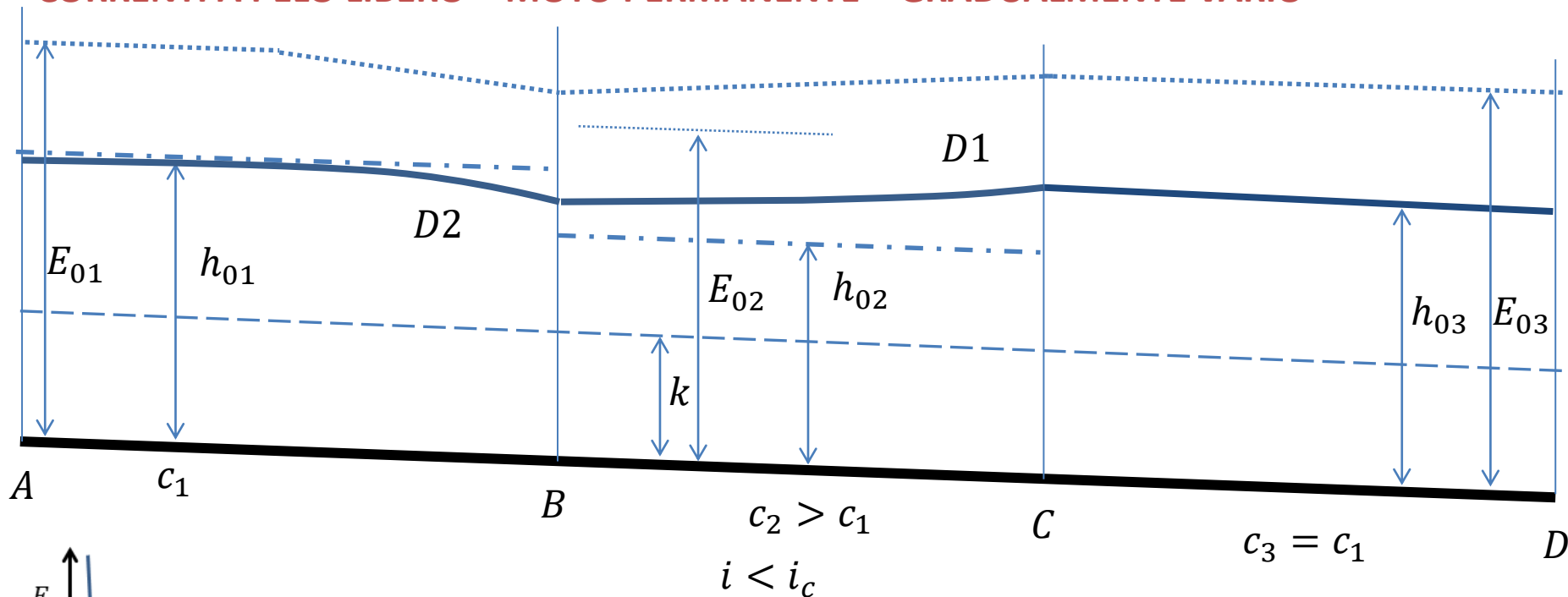
Tratto AB e tratto BC a forte pendenza con diverse pendenze, essendo  $i_2 < i_1$ , allora l'altezza di moto uniforme  $h_{02} > h_{01}$  vista la dipendenza di  $h_0$  dall'inverso della pendenza. I tratti sono governati da monte essendo correnti di moto uniforme veloci. Il tratto AB è governato dalla sezione A, il tratto BC da B. Se infinitamente a monte non ci sono disturbi alla sezione A abbiamo  $h_{01}$  che scende verso valle indisturbata fino a B. L'altezza  $h_{01}$  ( $< h_{02}$ ) alla sezione B governa il tratto BC, abbiamo un profilo F3 dalla sezione B che scende verso valle verso le condizioni di moto uniforme  $h_{02}$ . Da A a C l'energia specifica decresce.

# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO



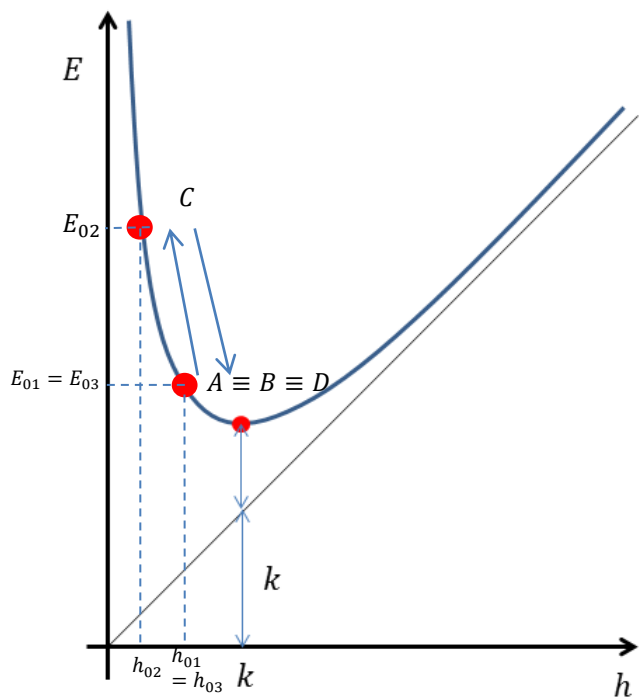
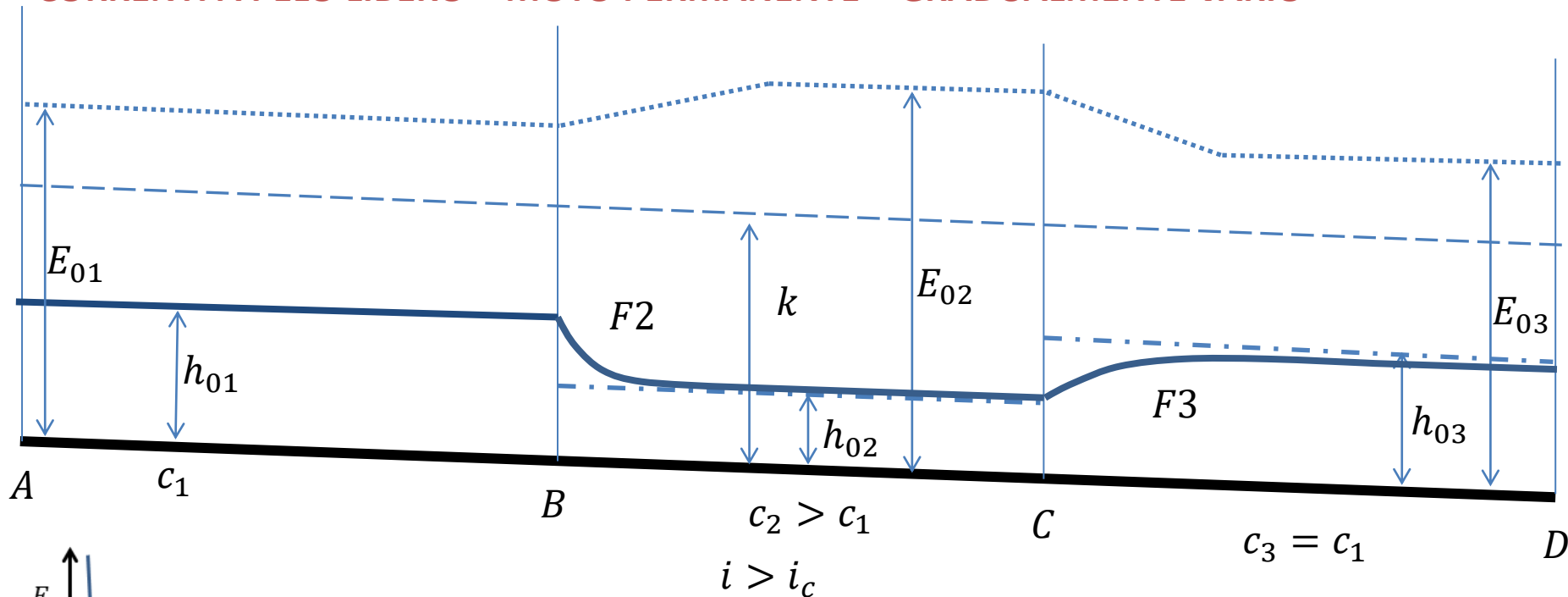
Tratto AB e BC a forte pendenza con diverse pendenze, essendo  $i_2 > i_1$ , allora  $h_{02} < h_{01}$ . I tratti sono governati da monte essendo correnti di moto uniforme veloci. Il tratto AB è governato da A, il tratto BC da B. Se infinitamente a monte non ci sono disturbi alla sezione A abbiamo  $h_{01}$  che scende verso valle indisturbata fino a B. L'altezza  $h_{01}$  ( $> h_{02}$ ) alla sezione B governa il tratto BC, abbiamo un profilo F2 dalla sezione B che scende verso valle verso le condizioni di moto uniforme  $h_{02}$ . Da A a C l'energia specifica cresce.

# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO



Tre tratti in corrente uniforme lenta, con differenti scabrezze, il tratto centrale avendo coefficiente  $C_2 > C_1$  avrà  $h_{02} < h_{01} = h_{03}$ . Il tratto AB è governato da B, BC da C, CD da D, se la corrente in D non è disturbata da valle, tutto il tratto CD è a moto uniforme  $h_{03}$ . Quindi in c ho  $h_{03} > h_{02} \rightarrow$  profilo D1 che porta verso monte a  $h_{02}$ , in base alla lunghezza del tratto BC arriverò in B con un'altezza  $h$  ( $h_{02} < h < h_{01}$ ) che governerà il tratto AB attraverso un profilo D2 per tornare verso monte a moto uniforme con  $h_{01}$ .

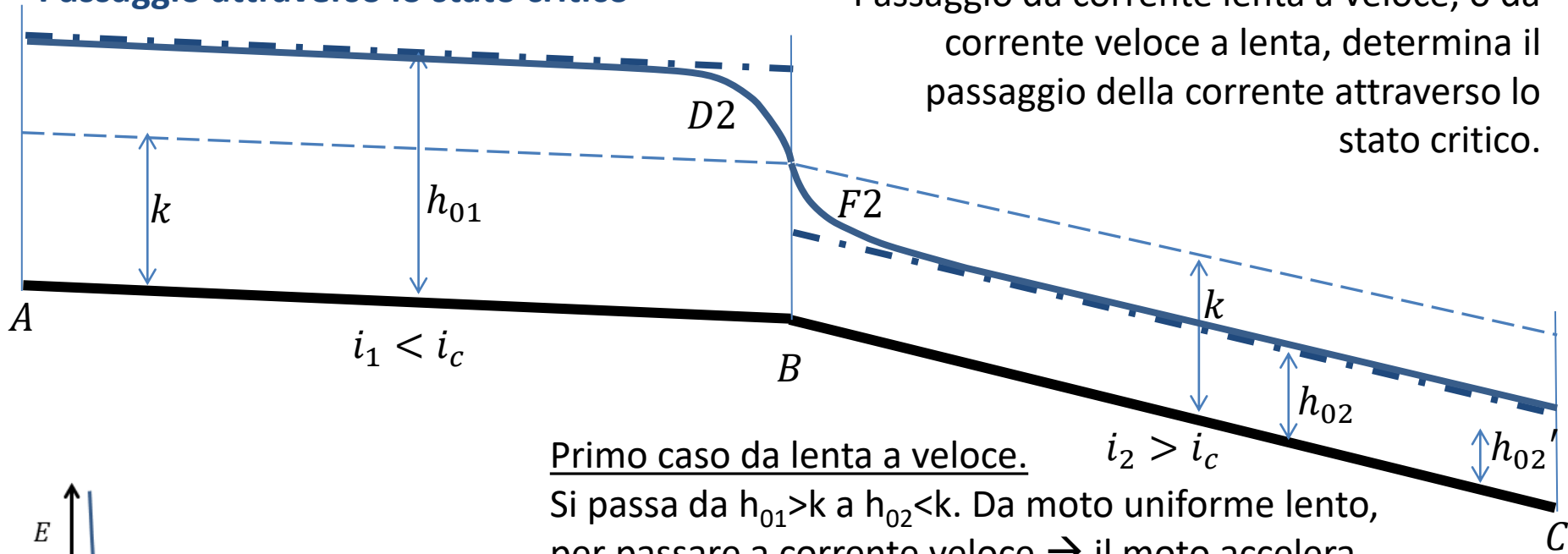
# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO



Tre tratti in corrente uniforme veloce, con differenti scabrezze, il tratto centrale avendo coefficiente  $C_2 > C_1$  avrà  $h_{02} < h_{01} = h_{03}$ . Il tratto AB è governato da A, BC da B, CD da C, se la corrente in A non è disturbata da monte, tutto il tratto AB è a moto uniforme  $h_{01}$ . Quindi in B ho  $h_{01} > h_{02} \rightarrow$  profilo F2 che porta verso valle a  $h_{02}$ , in base alla lunghezza del tratto BC arriverò in C con un'altezza  $h$  ( $h_{02} < h < h_{01}$ ) che governerà il tratto CD attraverso un profilo F3 per tornare verso valle a moto uniforme con  $h_{03}$ .

# CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO

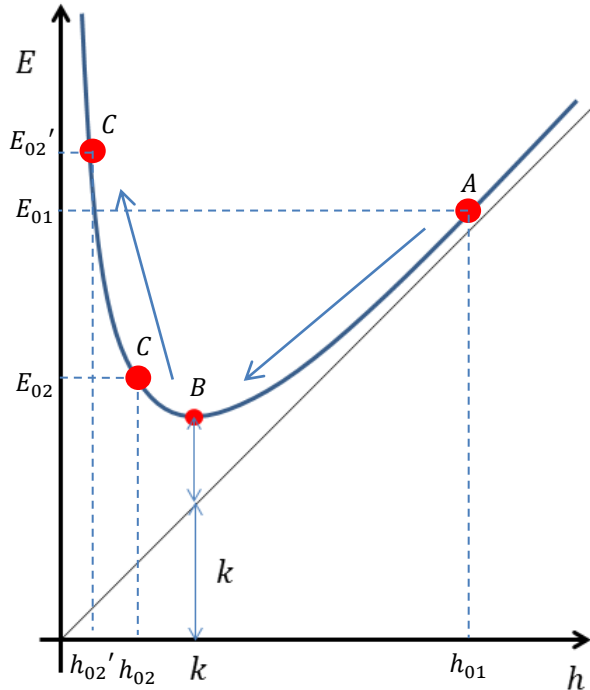
## Passaggio attraverso lo stato critico



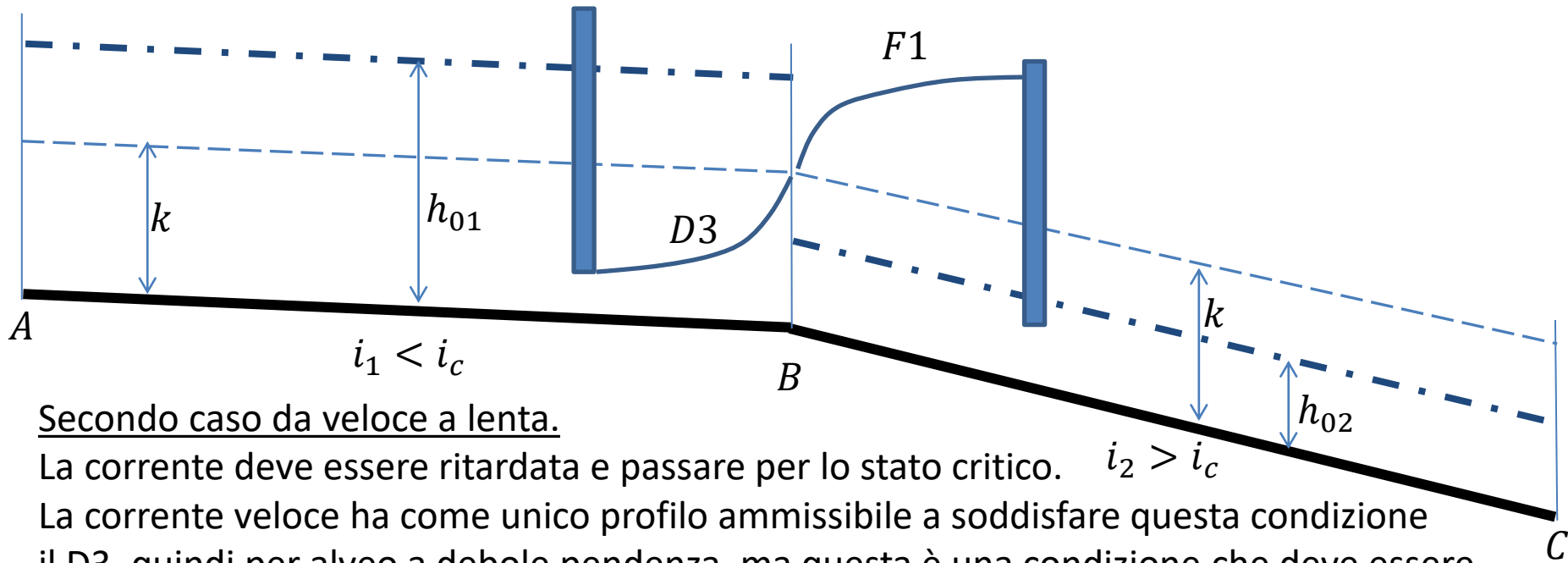
### Primo caso da lenta a veloce.

Si passa da  $h_{01} > k$  a  $h_{02} < k$ . Da moto uniforme lento, per passare a corrente veloce → il moto accelera.

L'unico profilo accelerato per un moto lento è il D2. L'altezza decresce fino a raggiungere lo stato critico  $k$  oltre al quale siamo in condizione di corrente veloce. Questa tende alla condizione di moto uniforme a valle ancora attraverso un profilo accelerato, anche in questo caso il profilo che permette un moto accelerato in un corrente veloce è unico ed è il F2 per alvei a forte pendenza. I tratti AB e BC sono governati da B, ed è in B che avviene il passaggio attraverso lo stato critico.  $E_{02}$  e  $E_{02}'$  a seconda che la corrente veloce sia ad energia maggiore o inferiore della lenta.



## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO PERMANENTE – GRADUALMENTE VARIO



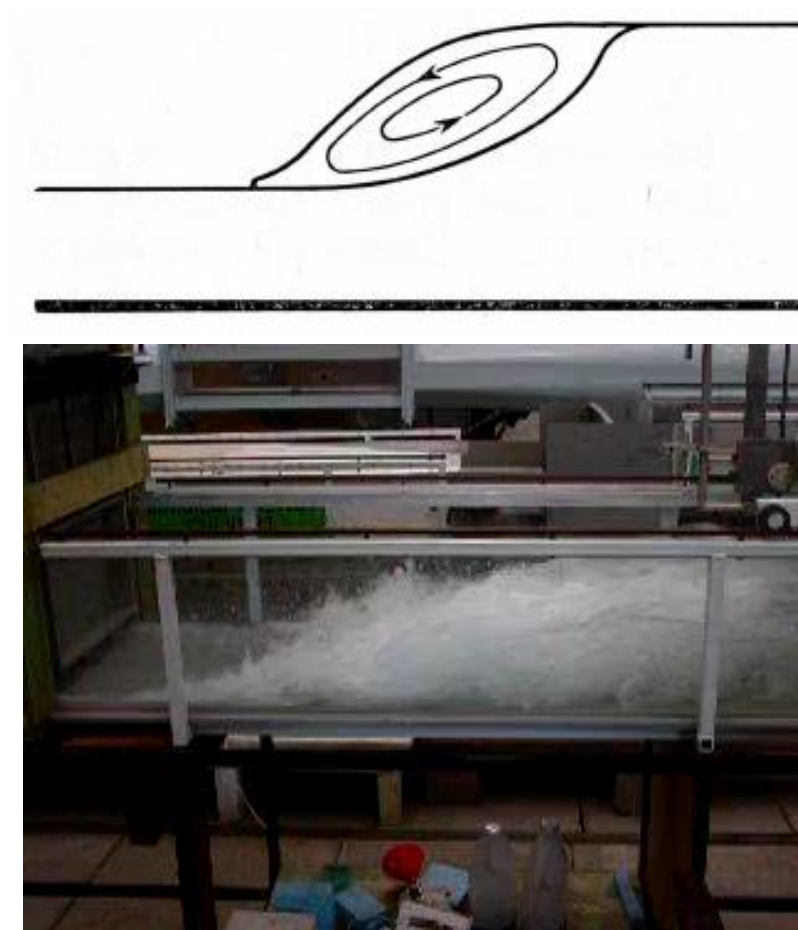
Secondo caso da veloce a lenta.

La corrente deve essere ritardata e passare per lo stato critico.  $i_2 > i_c$

La corrente veloce ha come unico profilo ammissibile a soddisfare questa condizione il D3, quindi per alveo a debole pendenza, ma questa è una condizione che deve essere indotta da monte, da cui nella figura la presenza della paratoia. Analogamente, passato lo stato critico, la corrente deve allontanarsene sempre con una corrente ritardata, per cui necessariamente deve essere un profilo F1 di corrente lenta in alveo a forte pendenza, anche in questo caso la condizione deve essere indotta, come da figura, ad esempio con una paratoia. Il moto gradualmente vario richiederebbe un passaggio per lo stato critico alla sezione B, quindi una perfetta calibrazione delle luci sotto le paratoie. Se si aprisse anche di poco la luce delle paratoie, si sposterebbe la collocazione del passaggio per lo stato critico, e quindi in un tratto brevissimo si avrebbe una variazione brusca delle condizioni di moto, inoltre le perturbazioni generate si troverebbero confinate tra la corrente veloce e quella lenta, accumulandosi.

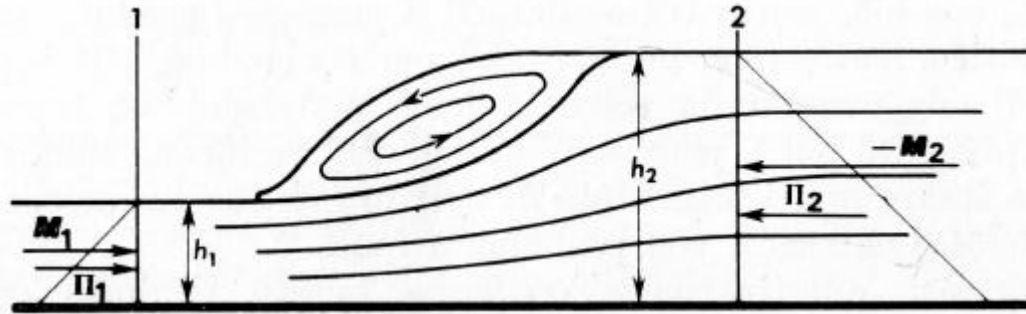
## CORRENTI A PELO LIBERO – RISALTO IDRAULICO

Il passaggio da corrente veloce a lenta non avviene in modo graduale, ma attraverso una discontinuità , un brusco innalzamento del pelo libero detto risalto idraulico, che di norma si esprime con un grande vortice superficiale ad asse orizzontale, con importanti caratteristiche dissipative di energia.



## CORRENTI A PELO LIBERO – RISALTO IDRAULICO

Nella zona del risalto non possiamo considerare come valida l'ipotesi di corrente lineare. Consideriamo pertanto, per analizzare il fenomeno, un volume di controllo che contenga il risalto, tra due sezioni dove si possa considerare ristabilita la condizione di corrente lineare e quindi una distribuzione idrostatica delle pressioni.



Considero sul volume l'eq. della quantità di moto, nella direzione del moto, trascuro pertanto le forze peso, risultano trascurabili anche le inerzie locali e le forze di superficie legate all'attrito per le ridotte dimensioni considerate. L'equazione si riduce alle sole spinte idrostatiche e alla differenza della quantità di moto:

$$\Pi_1 + M_1 = \Pi_2 + M_2$$

Se considero una sezione rettangolare:

$$\rho g \frac{h_1}{2} A_1 + \rho Q V_1 = \rho g \frac{h_2}{2} A_2 + \rho Q V_2$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – RISALTO IDRAULICO – SPINTA TOTALE

Consideriamo ora la quantità di moto come una spinta dinamica indotta dalla corrente, ed introduco il concetto di spinta totale  $S$  come somma della spinta idrostatica e di quella dinamica.

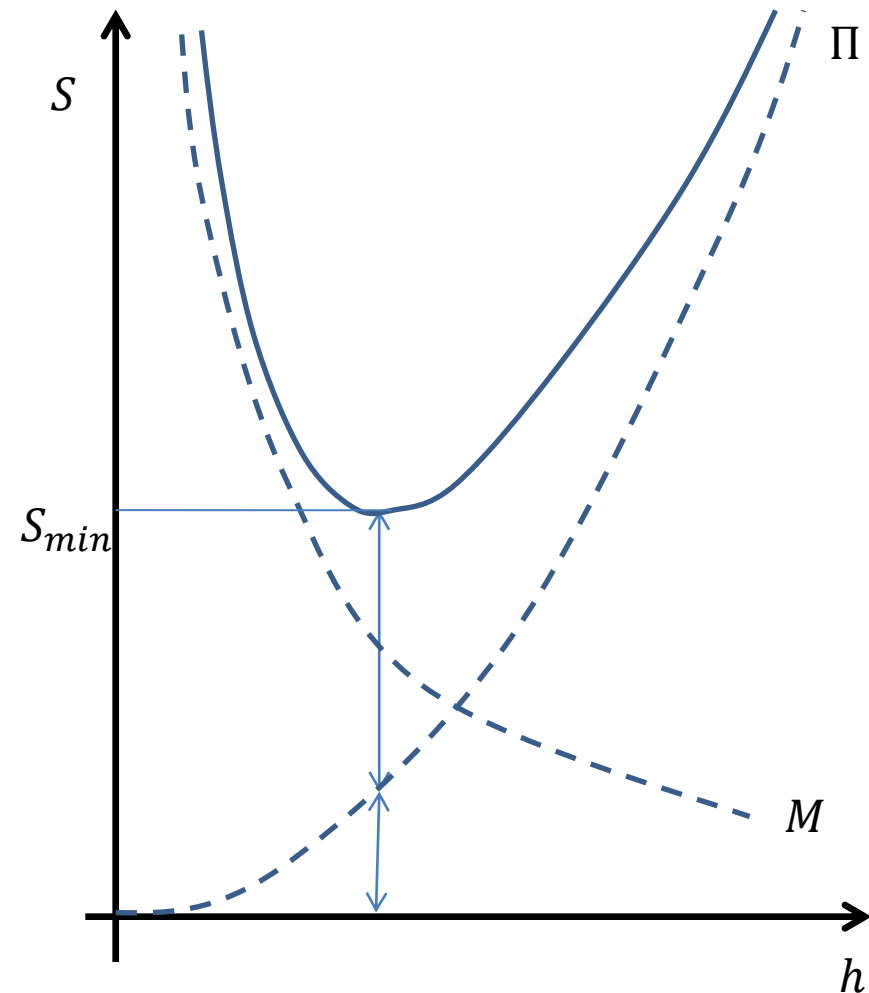
$$S = \underbrace{\frac{1}{2} \rho g B h^2}_{\Pi} + \underbrace{\rho \frac{Q^2}{B h}}_M$$

Data una portata  $Q$ , posso analizzare il comportamento della spinta totale  $S$  in funzione della  $h$ .

Per  $h \rightarrow 0$  abbiamo  $\Pi \rightarrow 0$  e  $M \rightarrow \infty$  essendo  $h$  al denominatore, quindi la somma delle due ci dice che  $S \rightarrow \infty$

Per  $h \rightarrow \infty$  abbiamo  $\Pi \rightarrow \infty$  e  $M \rightarrow 0$  quindi  $S \rightarrow \infty$

A destra, il grafico  $S$ - $h$  dato dalla somma dei contributi delle spinte idrostatiche e dinamiche, presenta un minimo.



## CORRENTI A PELO LIBERO – RISALTO IDRAULICO – SPINTA TOTALE

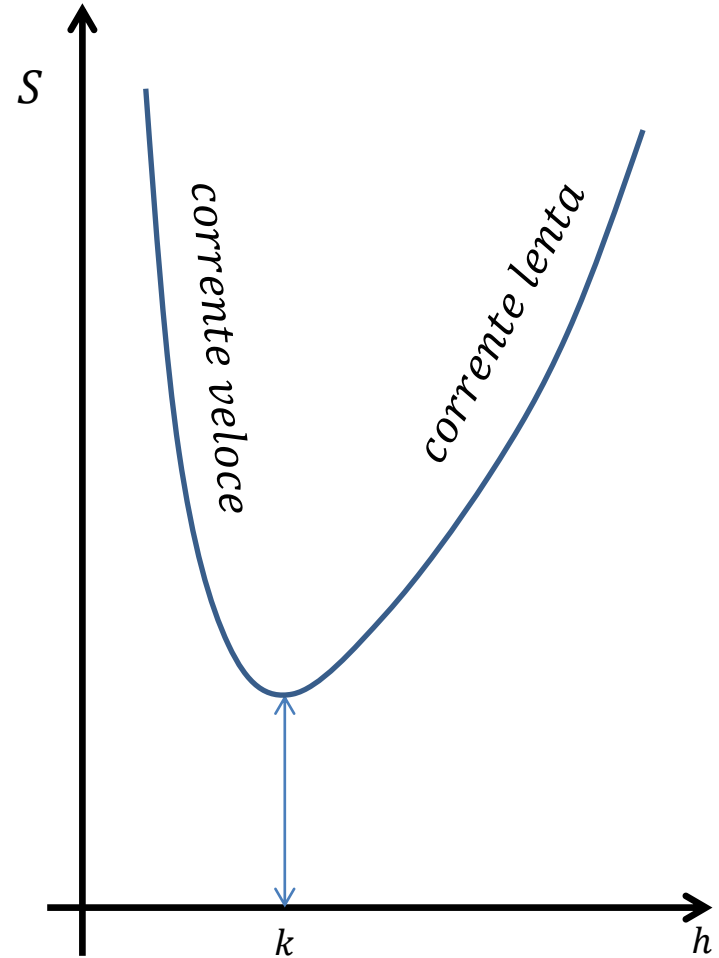
Determino la condizione di minimo imponendo  $dS/dh=0$

$$\frac{dS}{dh} = \rho g B h - \rho \frac{Q^2}{B h^2} = 0$$

Da cui

$$h = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}}$$

Ma la relazione trovata è esattamente quella dell'altezza critica, pertanto il minimo della spinta totale è allo stato critico, e come per il grafico E-h, l'altezza critica suddivide il grafico in due aree, una relativa alle correnti veloci per  $h < k$ , dove la spinta è dominata dalla componente idrodinamica, ed una relativa a correnti lente, per  $h > k$ , dove la spinta totale è dominata dalla componente idrostatica.



## CORRENTI A PELO LIBERO – RISALTO IDRAULICO – SPINTA TOTALE

Il risalto si colloca dove la spinta di monte della corrente veloce, e di valle della corrente lenta si equivalgono.

Nota l'altezza delle corrente di monte, l'altezza di valle deve essere necessariamente quella che fornirà una spinta equivalente, e viceversa.

$h_1$  e  $h_2$  si definiscono **altezze coniugate** del risalto.

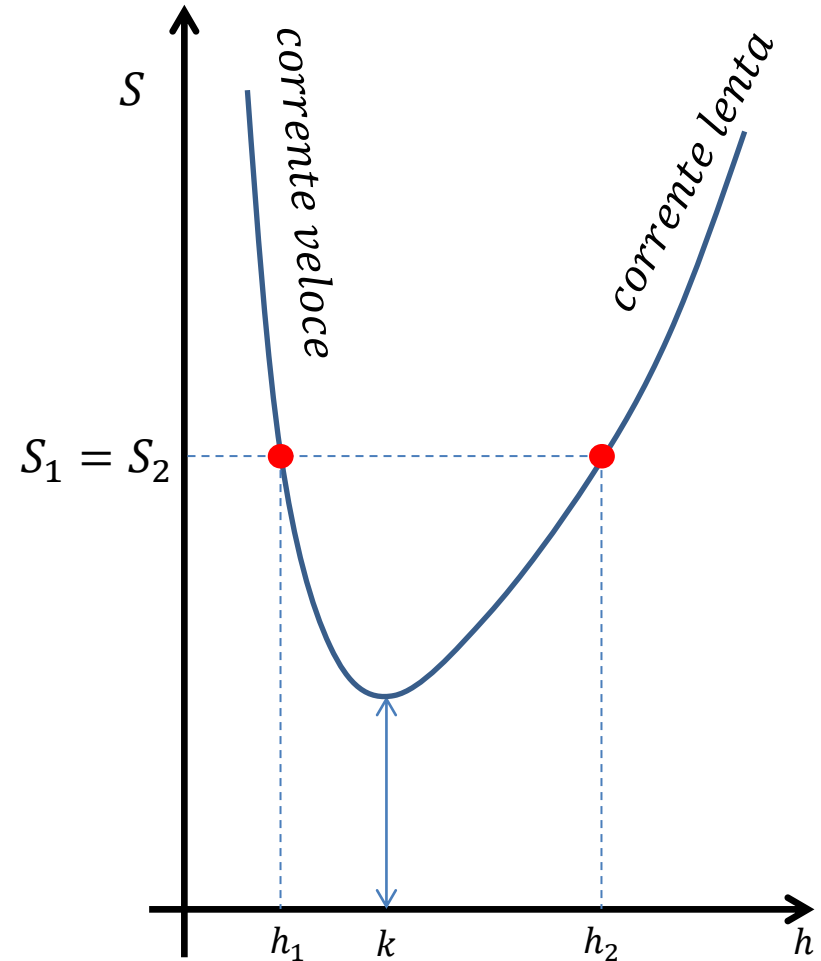
Sempre per alveo a sezione rettangolare considerando la portata unitaria  $q=Q/B$  (portata per unità di larghezza):

$$\frac{1}{2}\rho gh_1^2 + \rho \frac{q^2}{h_1} = \frac{1}{2}\rho gh_2^2 + \rho \frac{q^2}{h_2}$$

$$\frac{h_2^2 - h_1^2}{2} = \frac{q^2}{g} \frac{(h_2 - h_1)}{h_1 h_2} = k^3 \frac{(h_2 - h_1)}{h_1 h_2}$$

$$h_1 + h_2 = \frac{2k^3}{h_1 h_2}$$

Espressione che nota un'altezza permette di calcolare l'altra, nota ad esempio  $h_1$  si moltiplica per  $h_2/h_1^2$



$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2\frac{k^3}{h_1^3} = 0$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – RISALTO IDRAULICO – SPINTA TOTALE

L'equazione di secondo grado fornisce la radice positiva:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \frac{k^3}{h_1^3}} \right)$$

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \frac{k^3}{h_1^3}} \right)$$

osservando che

$$Fr^2 = \frac{V^2}{gh} = \frac{V^2 A^2}{ghA^2} = \frac{Q^2}{gh^3 B^2} = \frac{q^2}{gh^3} = \left( \frac{k}{h} \right)^3$$

ottengo

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right)$$

Nota la condizione di monte, in termini di  $h_1$  e del numero di Froude della corrente di monte  $Fr_1$ , posso determinare l'altezza  $h_2$  coniugata di  $h_1$ .

## CORRENTI A PELO LIBERO – RISALTO IDRAULICO – DISSIPAZIONE EN. SPECIFICA

Il risalto è uno strumento utile se si vuole indurre una riduzione di energia in una corrente, la sua efficienza in termini dissipativi è data dalla frazione di energia dissipata rispetto a quella posseduta

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = 1 - \frac{E_2}{E_1}$$

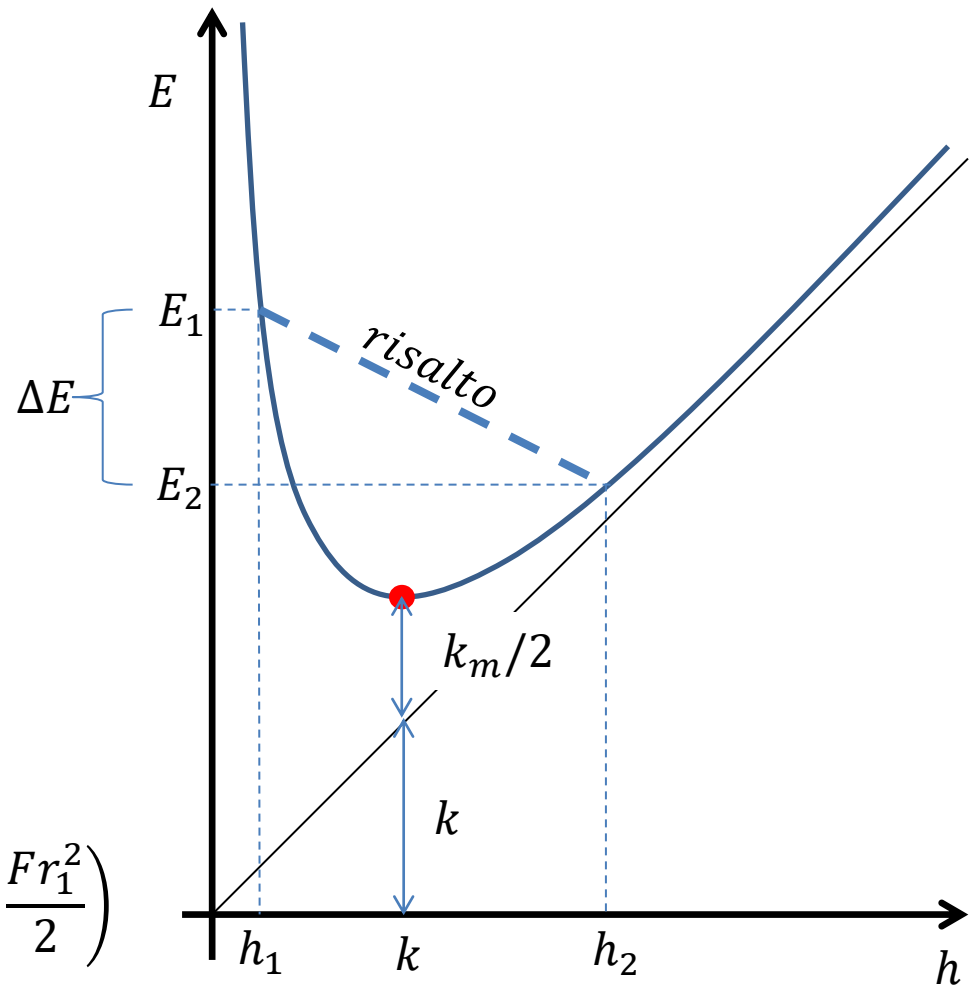
Può essere espressa in funzione del numero di Froude della sola corrente in arrivo

$$E_1 = h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_1 + \frac{h_1}{2} \frac{V_1^2}{gh_1} = h_1 \left( 1 + \frac{Fr_1^2}{2} \right)$$

$$E_2 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} = h_2 + \frac{h_1}{2} \frac{V_1^2}{gh_1} \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 = h_2 \left( 1 + \frac{Fr_1^2}{2} \frac{h_1^3}{h_2^3} \right)$$

Avendo considerato che

$$V_2 h_2 = V_1 h_1$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – RISALTO IDRAULICO – DISSIPAZIONE EN. SPECIFICA

otteniamo:

$$\frac{\Delta E}{E_1} = 1 - \frac{1 + \frac{Fr_1^2}{2} \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3}{\frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{Fr_1^2}{2}\right)}$$

Che è solo funzione di Froude alla sezione 1 visto che vale anche:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right)$$

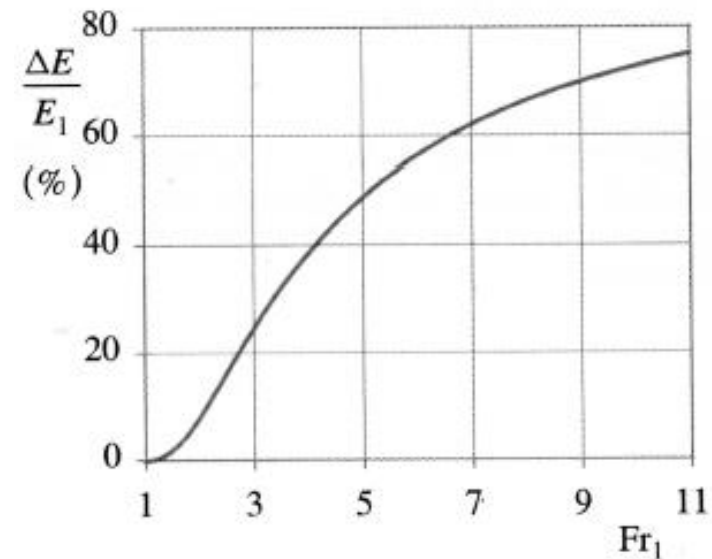
Il risalto si sviluppa in lunghezza per valori in norma pari a 4-7 volte  $h_2$ .

Dalle relazioni precedenti volendo possiamo scrivere anche

$$\Delta E = E_1 - E_2 = h_1 - h_2 + \frac{q^2}{2g} \left( \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right)$$

$$\frac{q^2}{g} = k^3 = \frac{h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{2}$$

$$\Delta E = h_1 - h_2 + \frac{1}{4} \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} (h_2^2 - h_1^2) = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – RISALTO IDRAULICO – DISSIPAZIONE EN. SPECIFICA

$Fr_1$  vicino ad 1  $\rightarrow$   $h_2$  di poco maggiore di  $h_1$  abbiamo un ***risalto ondulato*** caratterizzato da onde stazionarie.

Per  $1,7 < Fr_1 < 2,5$  il rapporto  $h_2/h_1$  varia tra 2 e 3, si osservano piccole ondulazioni e si parla di ***risalto debole***.

Per  $2,5 < Fr_1 < 4,5$  onde importanti che possono determinare danneggiamento delle pareti del canale, si parla di ***risalto oscillante***.

Per  $4,5 < Fr_1 < 9$  il risalto si presenta con onde stazionarie e grande dissipazione di energia, si parla di ***risalto stazionario***.

Per  $Fr_1 > 9$  onde molto violente, ***risalto impetuoso*** con altezze a valle 12 volte quelle di monte.

## OSSERVAZIONE

La trattazione appena vista per sezione rettangolare, in termini di sezione generica

$$S = \rho g A h_G + \rho \frac{Q^2}{A}$$

dove con  $h_G$  si considera l'affondamento del pelo libero del baricentro dell'area, i parametri  $h_G$ ,  $B$ ,  $A$  sono funzioni di  $h$ , pertanto per una data portata  $Q$  anche la spinta totale  $S$  è funzione di  $h$ , da cui l'analisi del suo andamento  $S(h)$  già visto. Per la condizione di minimo  $ds/dh=0$ , innanzitutto esprimo

$h_G$  come:

$$h_G = \frac{\frac{1}{2} \int y^2 db}{A}$$

Sostituisco e derivo in  $h$ :

$$\frac{dS}{dh} = \rho g \int y db - \rho \frac{Q^2}{A^2} \frac{dA}{dh} = 0$$

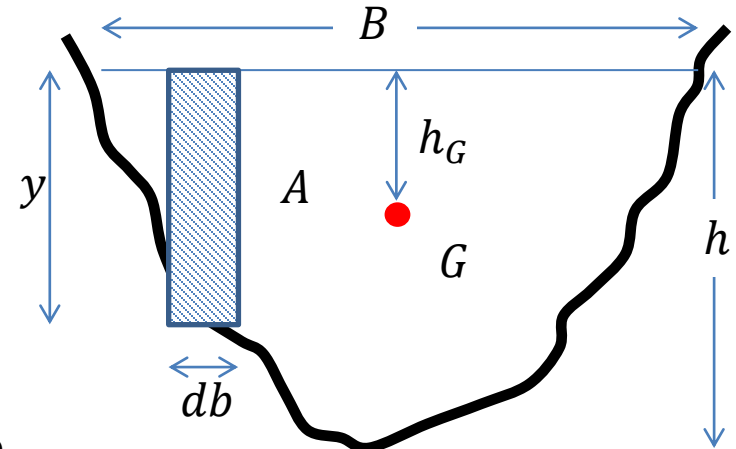
Avendo poi:

$$\int y dB = A \quad e \quad \frac{dA}{dh} = B$$

sostituendo:  $\rho g A - \rho \frac{Q^2}{A^2} B = 0$

$$\frac{A^3}{B} = \frac{Q^2}{g}$$

**Trovando come prima che al minimo di  $S$  corrisponde la condizione critica**

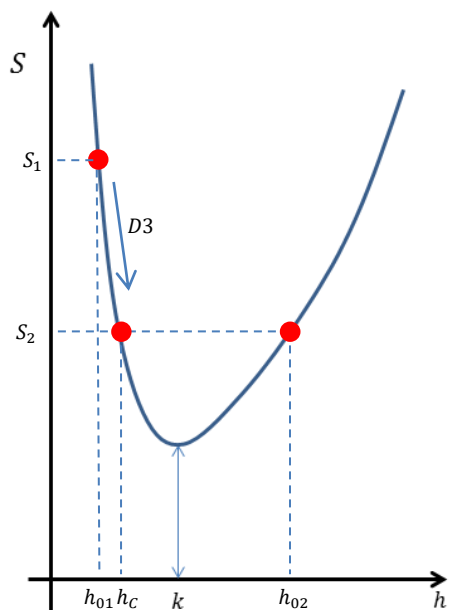
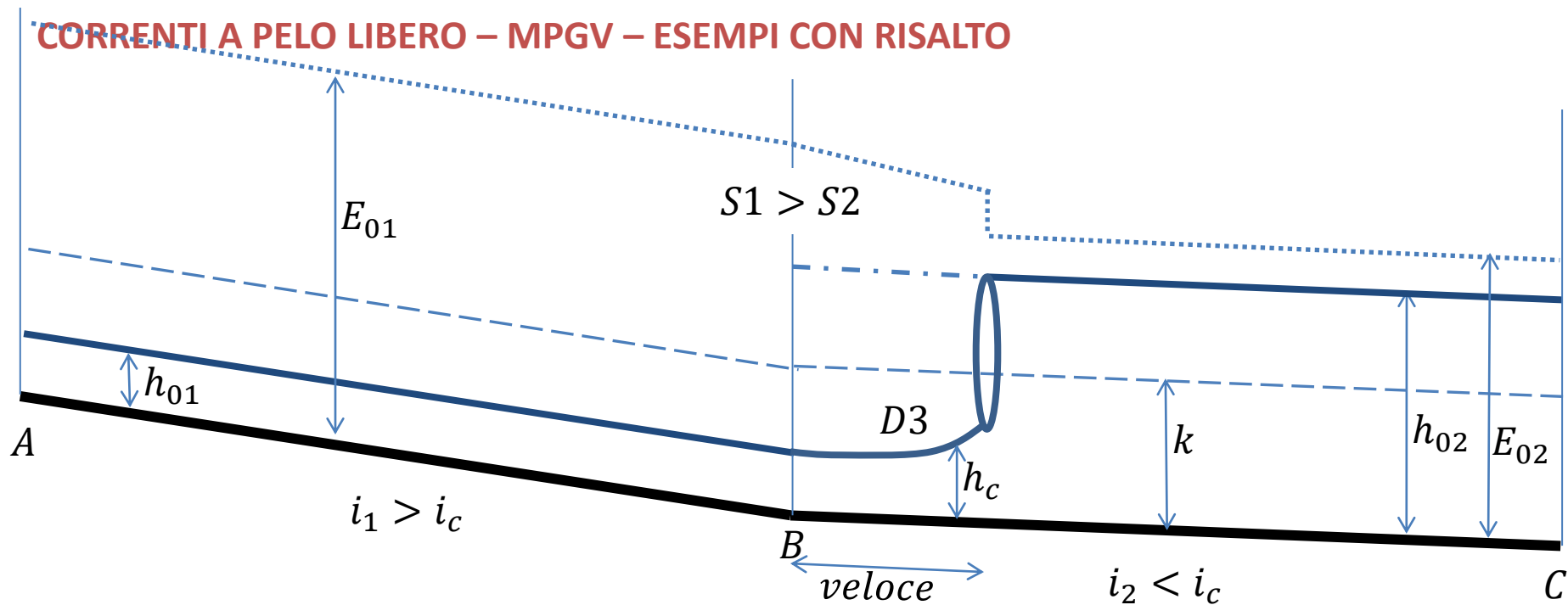


Nota: momento statico rispetto al pelo libero, diviso l'area, per definizione è legato al baricentro di un area

$$MS = \int_A y dA = \frac{1}{2} \int_B y^2 dB$$

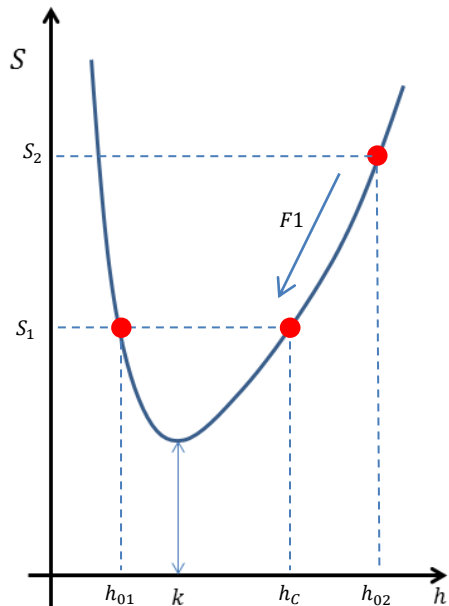
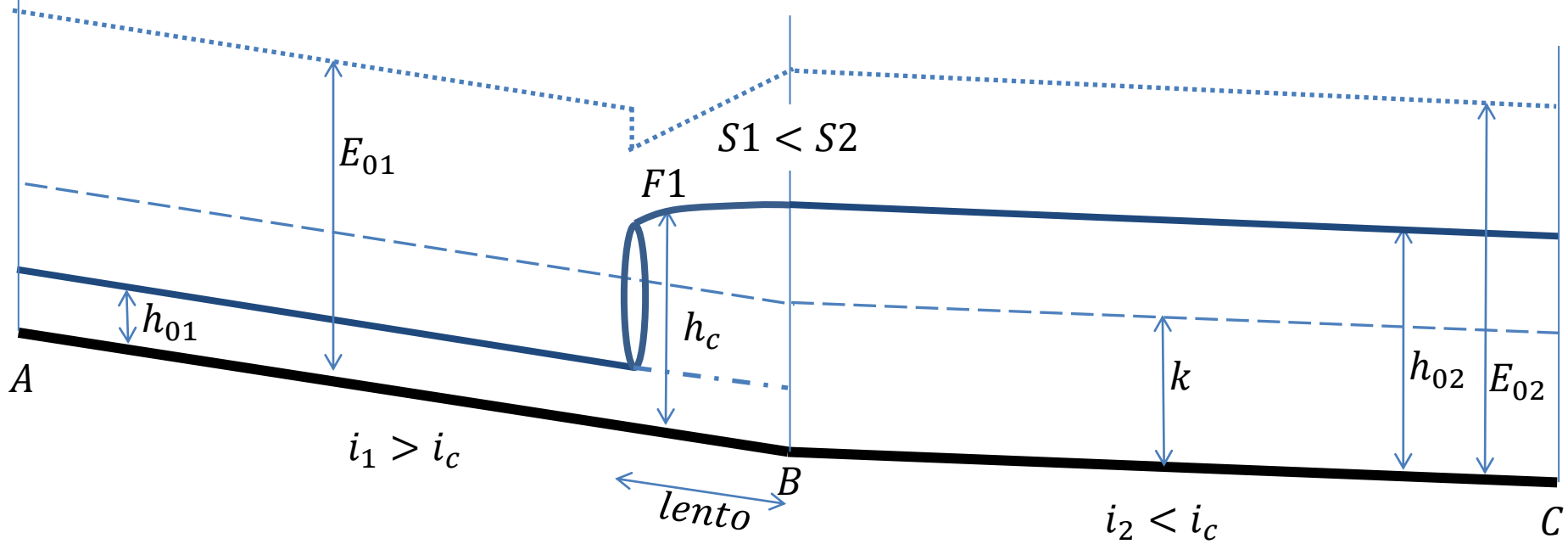


## CORRENTI A PELO LIBERO – MPGV – ESEMPI CON RISALTO



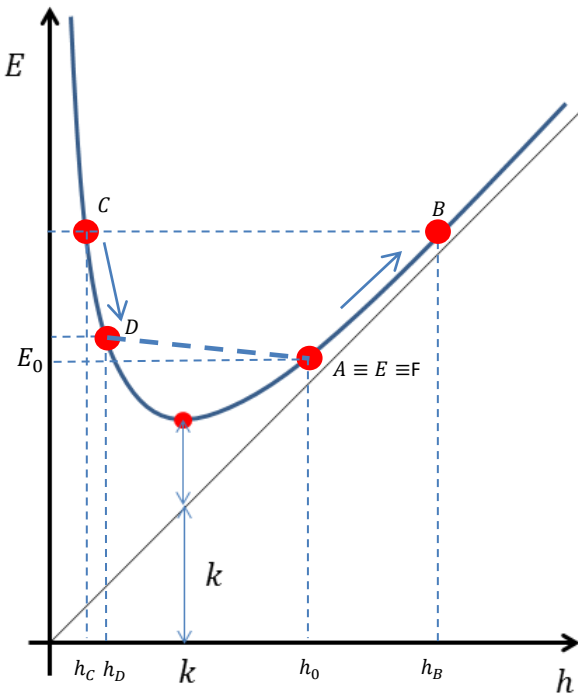
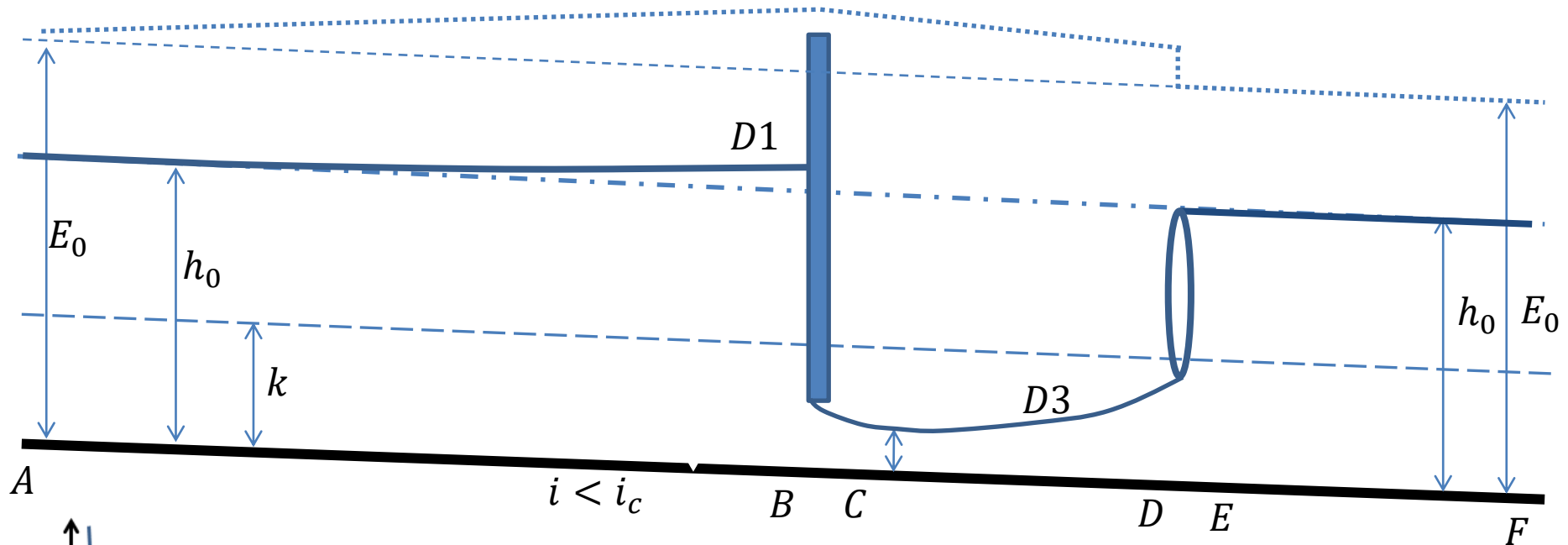
Si consideri il passaggio da corrente veloce a lenta come in figura, per quanto visto si determinerà un risalto. Ipotizziamo che in moto uniforme, la spinta  $S_1$  esercitata dalla corrente veloce, sia maggiore della spinta  $S_2$  esercitata dalla corrente lenta. Il risalto viene traslato verso valle. A destra del risalto ho una corrente lenta governata da valle (sezione C). A sinistra del risalto ho un tratto a corrente veloce in alveo a debole pendenza. Questo tratto veloce è governato da monte, ovvero dalla altezza  $h_{01}$  alla sezione B. Si instaura un profilo D3, mano a mano che il pelo libero della corrente veloce si alza, la spinta si riduce, fino ad arrivare ad una altezza  $h_c$  coniugata di  $h_{02}$ .

## CORRENTI A PELO LIBERO – MPGV – ESEMPI CON RISALTO



Per il caso opposto, ipotizziamo che in moto uniforme la spinta  $S_2$  esercitata dalla corrente lenta, sia maggiore della spinta  $S_1$  esercitata dalla corrente veloce. Il risalto viene traslato verso monte. A sinistra del risalto ho una corrente veloce governata da monte (sezione A). A destra del risalto ho un tratto a corrente lenta in alveo a forte pendenza. Questo tratto lento è governato da valle, ovvero dalla altezza  $h_{02}$  alla sezione B. Si instaura un profilo F1, mano a mano che il pelo libero della corrente lenta si abbassa (procedendo verso monte), la spinta si riduce, fino ad arrivare ad una altezza  $h_c$  coniugata di  $h_{01}$ .

# CORRENTI A PELO LIBERO – MPGV – ESEMPI CON RISALTO - PARATOIA



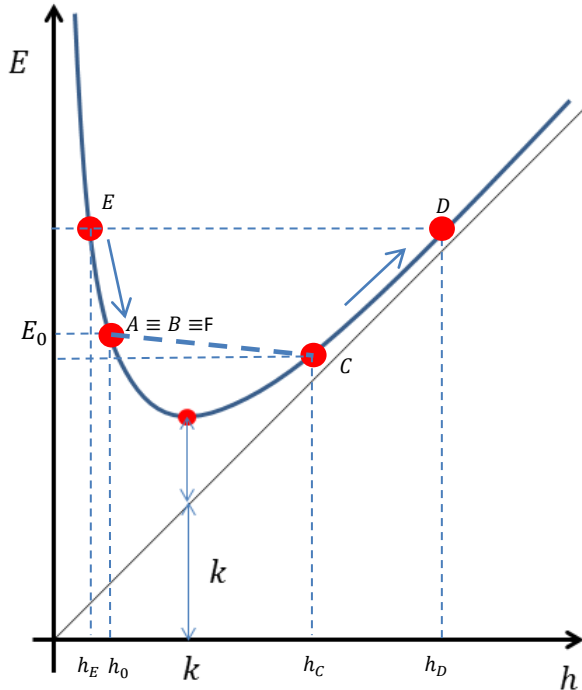
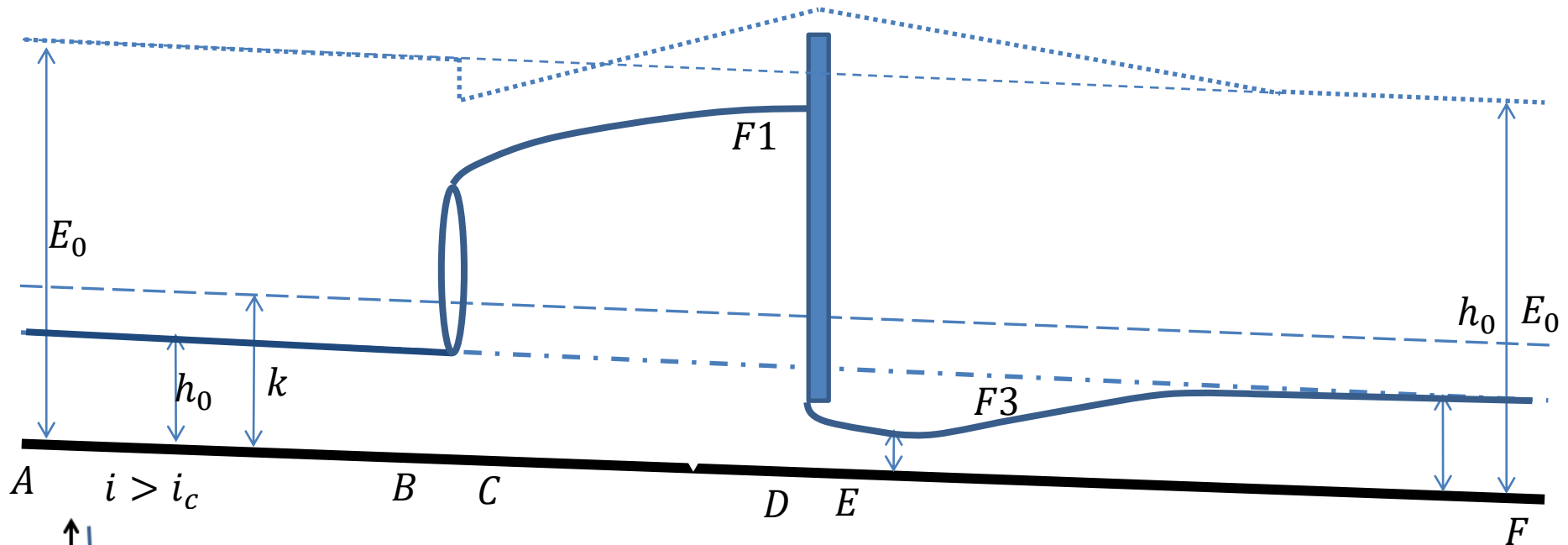
Consideriamo il caso di alveo a debole pendenza, con la presenza di una paratoia. Si ipotizzi che la paratoia non induca perdite locali di energia, per cui alla sezione immediatamente a monte B l'energia specifica sia identica ad una sezione C a valle della paratoia. Le due sezioni hanno altezze del pelo libero diverse, alla stessa energia, il grafico E-h ci mostra che necessariamente devono essere una in corrente veloce ed una in corrente lenta. Pertanto se la luce sotto paratoia è tale da indurre  $h_c < k$ , dovrà essere  $h_B$  lenta.

## CORRENTI A PELO LIBERO – MPGV – ESEMPI CON RISALTO - PARATOIA

Nel tratto a valle della paratoia avremo un risalto, visto il passaggio necessario da corrente veloce a corrente lenta. A partire da  $h_C$ , si instaura un profilo D3 verso lo stato critico, prima di arrivarci si formerà un risalto, a valle del quale avremo una corrente lenta, governata da valle, che quindi arriverà al risalto con la condizione di moto uniforme  $h_{02}$ . Se osserviamo l'andamento dell'energia specifica, si vede che a valle del risalto l'energia deve essere  $E_0$  di moto uniforme, e necessariamente in C l'energia deve essere  $E_C > E_0$ , in quanto deve sostenere la riduzione di energia specifica che avverrà lungo il profilo D3, più quella che verrà persa col risalto.

Allora, per le ipotesi fatte, anche l'energia alla sezione B dovrà avere un'energia superiore a  $E_0$ , ovvero uguale ad  $E_C$ . Quindi la corrente lenta a monte della paratoia, deve acquisire energia per poter oltrepassare l'ostacolo della paratoia. L'aumento di energia avverrà attraverso un innalzamento del profilo,  $h_B > h_0$ . Il tratto lento è governato da valle a partire dalla sezione B, quindi si instaura un profilo D1, che da  $h_B$  tende all'infinito verso monte alla condizione di moto uniforme  $h_0$ .

## CORRENTI A PELO LIBERO – MPGV – ESEMPI CON RISALTO - PARATOIA



Stesso caso di prima ma nel caso di alveo a forte pendenza, con la presenza di una paratoia. Si ipotizzi che la paratoia non induca perdite locali di energia, per cui alla sezione immediatamente a monte D l'energia specifica sia identica ad una sezione C a valle della paratoia. Le due sezioni hanno altezze del pelo libero diverse, alla stessa energia, il grafico E-h ci mostra che necessariamente devono essere una in corrente veloce ed una in corrente lenta. Pertanto se la luce sotto paratoia è tale da indurre  $h_E < k$ , dovrà essere  $h_D$  lenta.

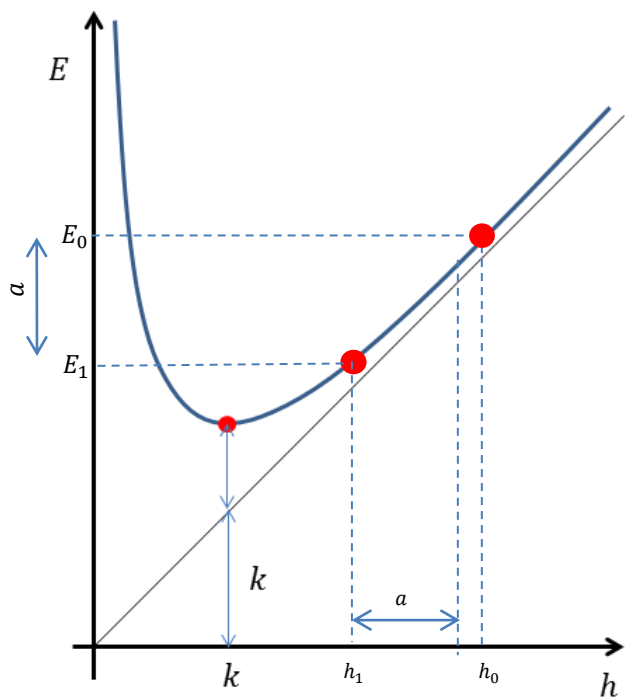
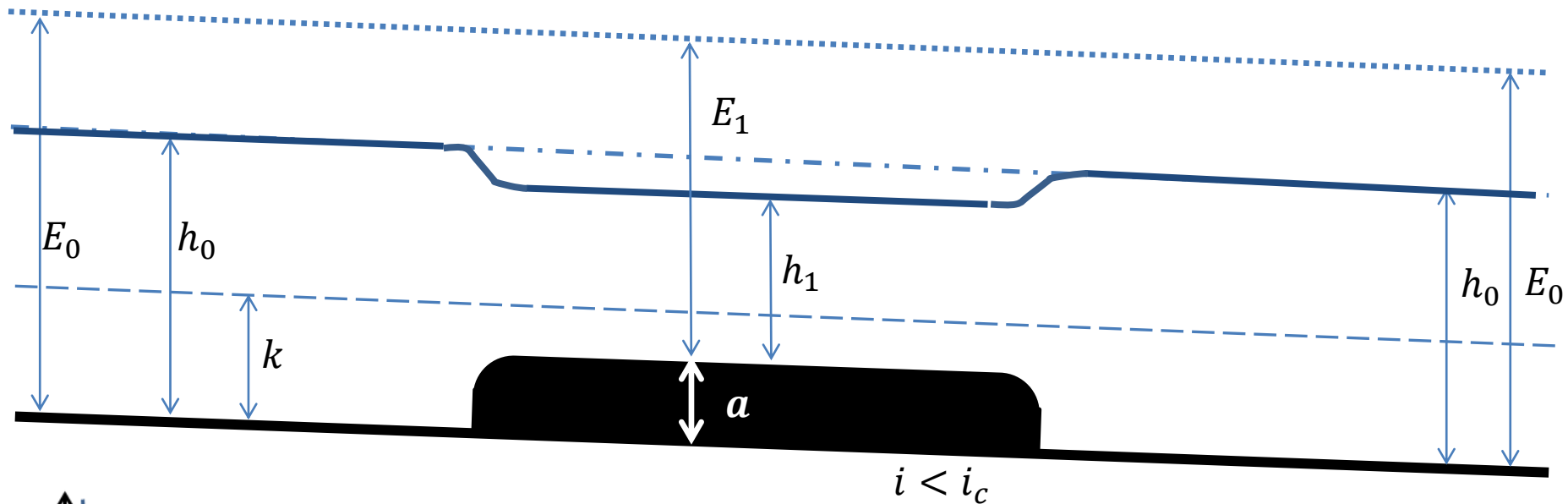
## CORRENTI A PELO LIBERO – MPGV – ESEMPI CON RISALTO - PARATOIA

Nel tratto a valle della paratoia avremo un'altezza  $h_E < h_0 < k$ , in un alveo a forte pendenza, si instaura un profilo F3 che all'infinito verso valle tenderà a riportare l'altezza da  $h_E$  a quella di moto uniforme  $h_0$ . Muoverci lungo il profilo F3 ci dice che alla sezione E dobbiamo avere un'energia specifica  $E_E > E_0$ .

A monte della paratoia la corrente deve quindi acquisire un'energia specifica maggiore di quella di moto uniforme  $E_0$ . La corrente veloce per acquisire l'energia sufficiente, deve necessariamente passare a corrente lenta, ed aumentare l'energia tramite innalzamento del pelo libero, infatti aumentare la propria energia rimanendo corrente veloce e riducendo l'altezza del pelo libero, significherebbe che la corrente veloce risente di una condizione imposta da valle, concettualmente in contrasto col fatto che una corrente veloce è necessariamente governata da monte. Il passaggio a monte della paratoia da corrente veloce a lenta implica la presenza di un risalto. Quindi inizialmente ci sarà una perdita di energia dovuta al risalto, lungo il tratto lento C-D si instaura un profilo F1 governato dall'altezza  $h_D$ , dove la corrente acquisisce l'energia necessaria a passare la paratoia sostenendo la perdita di energia che ci sarà lungo il profilo F3 di valle.

Ricapitolando, la presenza di una paratoia determina una cinematica molto diversa, a seconda che ci si trovi in alveo a debole o forte pendenza: nel caso di alveo a debole pendenza, si osserva la formazione di un risalto a valle della paratoia, nel caso di corrente veloce il risalto si forma a monte della paratoia.

## CORRENTI A PELO LIBERO – PASSAGGIO SU SOGLIA



Consideriamo in un alveo a debole pendenza, quindi corrente di moto uniforme lenta, la presenza di una soglia di fondo di altezza  $a$ . Ipotizziamo che la soglia sia ben raccordata e non determini perdite locali di energia (in termini totali). L'energia specifica è definita rispetto all'altezza del fondo, pertanto passando sopra la soglia si osserva una perdita di energia specifica di una quantità  $a$ . Avremo quindi la relazione  $E_0 = E_1 + a$ . Se osserviamo il grafico E-h la perdita di una quantità  $a$  di energia specifica determina il passaggio dell'altezza da  $h_0$  a  $h_1 < h_0$ , quindi avremo un abbassamento del profilo del pelo libero.

## CORRENTI A PELO LIBERO – PASSAGGIO SU SOGLIA

Non solo  $h_1 < h_0$ , ma anche  $h_1 + a < h_0$ , questo si osserva anche graficamente dal plot E-h. Se  $h_1 < h_0$  per continuità sappiamo che necessariamente deve essere  $V_1 > V_0$  da cui:

$$\frac{V_1^2}{2g} > \frac{V_0^2}{2g}$$

Abbiamo poi che sopra la soglia

$$E_1 = E_0 - a \qquad h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_0 + \frac{V_0^2}{2g} - a$$

Ipotizziamo che  $h_1 + a$  differisca da  $h_0$  per una quantità  $\Delta h$  positiva o negativa, per cui:

$$h_1 + a + \Delta h = h_0$$

sostituisco

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_1 + a + \Delta h + \frac{V_0^2}{2g} - a \qquad \longrightarrow \qquad \frac{V_1^2}{2g} = \Delta h + \frac{V_0^2}{2g}$$

Ma per essere vera  $\frac{V_1^2}{2g} > \frac{V_0^2}{2g}$  Deve necessariamente essere  $\Delta h > 0$

ovvero

$$h_1 + a < h_0$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – PASSAGGIO SU SOGLIA

Riprendendo la valutazione dell'energia sopra la soglia:

$$E_1 = E_0 - a$$

Per l'equazione di continuità per unità di larghezza:

$$V_1 h_1 = V_0 h_0 \qquad V_1 = \frac{h_0}{h_1} V_0$$

sostituendo:

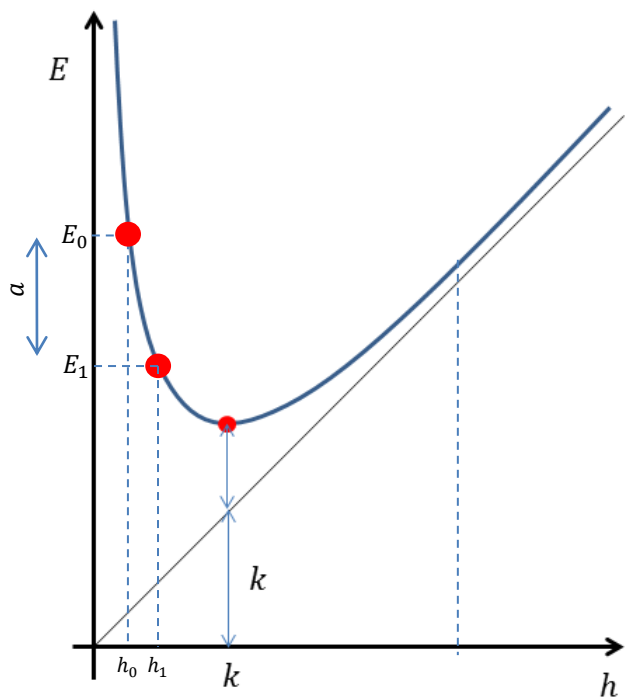
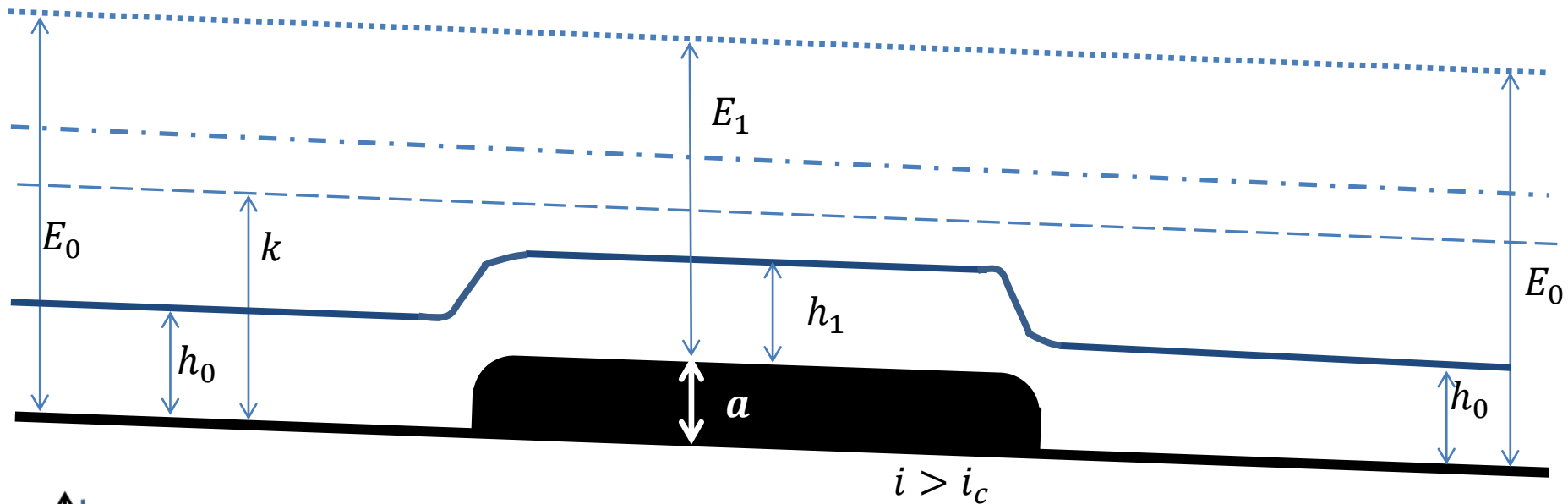
$$E_0 - a = h_1 + \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 \frac{V_0^2}{2g}$$

Da cui:

$$h_1^3 - (E_0 - a)h_1^2 + \frac{V_0^2}{2g} h_0^2 = 0$$

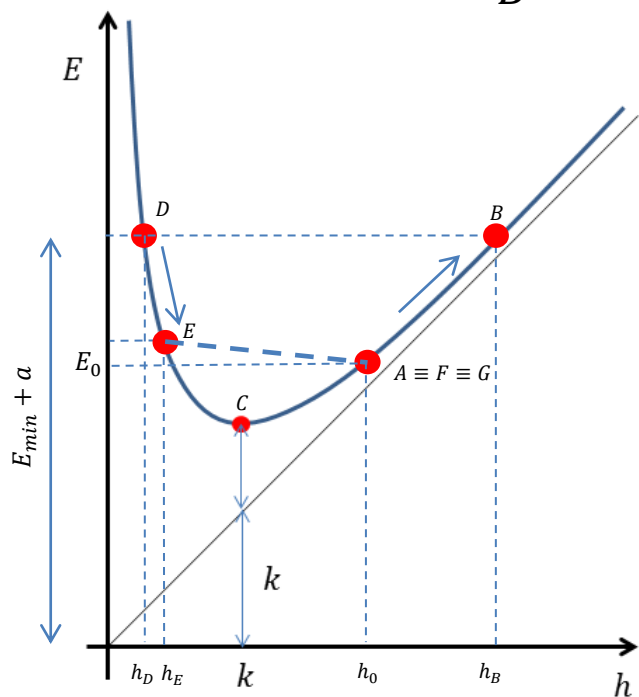
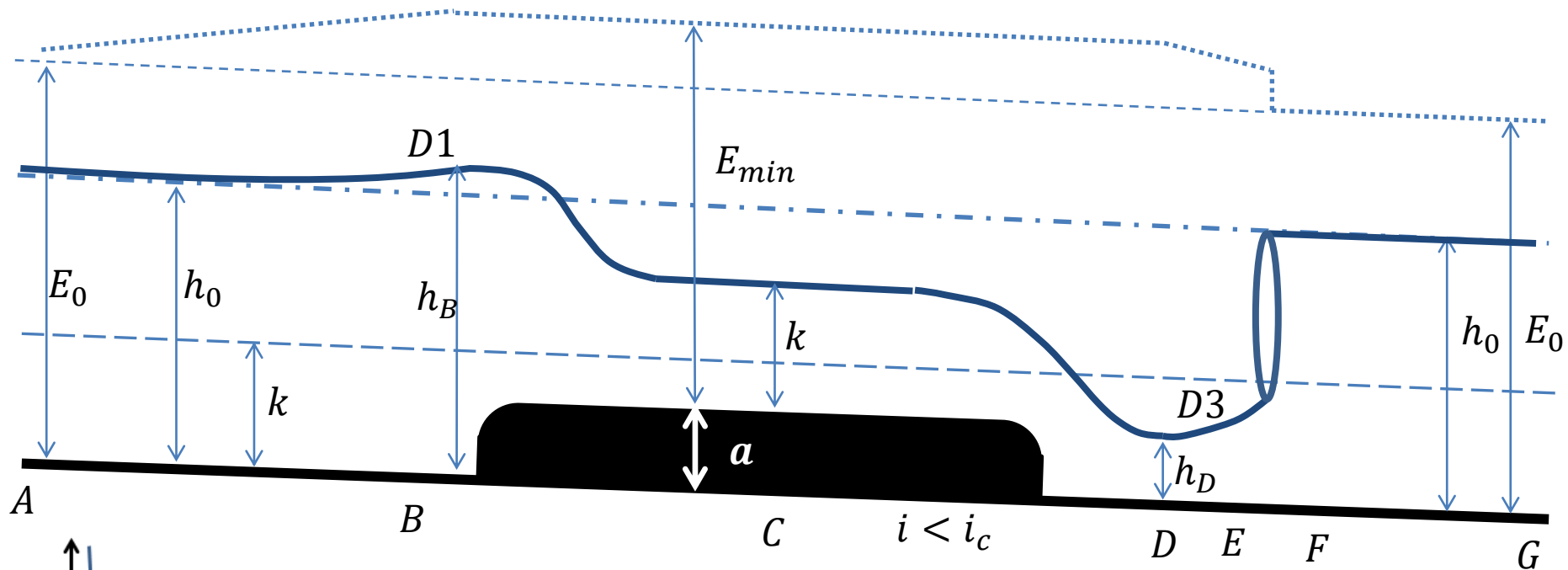
L'equazione sopra fornisce due radici positive (scartando la soluzione negativa) una per corrente lenta ed una per corrente veloce.

## CORRENTI A PELO LIBERO – PASSAGGIO SU SOGLIA



Stesso caso ma a forte pendenza, in questo caso la perdita di energia a rispetto al fondo determina per una corrente veloce un innalzamento del pelo libero, come si osserva anche dal grafico E-h, per cui  $h_1 > h_0$

## CORRENTI A PELO LIBERO – PASSAGGIO SU SOGLIA



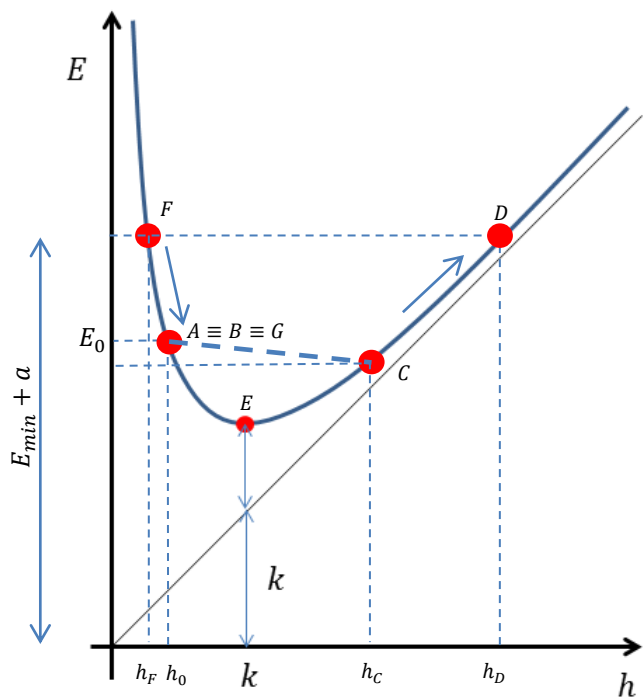
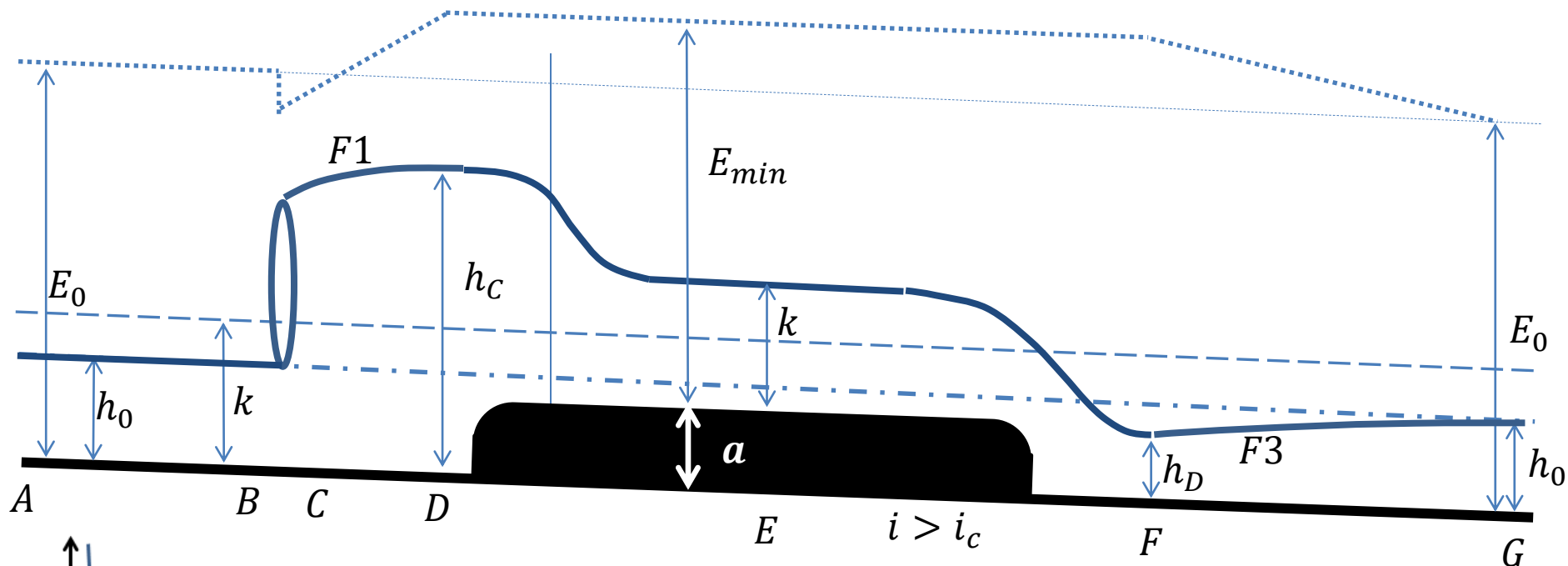
Se la soglia ha un'altezza  $a$ , tale per cui  $E_0 - a < E_{min}$ , significa che la corrente non ha l'energia sufficiente ad oltrepassare l'ostacolo. In corrente uniforme lenta, la corrente, che risente a valle della presenza della soglia, dovrà aumentare la propria energia innalzando l'altezza del proprio pelo libero, in modo che passando sopra la soglia (sottraendo la quantità  $a$ ), si abbia la condizione di energia minima per garantire il transito della portata  $Q$ , ovvero  $E_{min}$ , la condizione critica.

## CORRENTI A PELO LIBERO – PASSAGGIO SU SOGLIA

A monte della soglia avremo quindi un'altezza  $h_B > h_0$ , che essendo in corrente lenta governerà il tratto di monte, determinando la presenza di un profilo D1 che risalirà la corrente all'infinito verso monte portando alla condizione di moto uniforme  $h_0$ .

Poi il passaggio sopra la soglia avverrà, passando per lo stato critico. Lo stato critico, governerà da monte la condizione che si viene a determinare a valle della soglia. Qui l'energia specifica aumenterà ad una quantità  $E_{\min} + a$ , dovendo essere governata da monte (dalla soglia) subito dopo la soglia avremo una condizione di corrente veloce, quindi un'altezza  $h_D < k < h_0$  in alveo a debole pendenza, per tornare alle condizioni di moto uniforme si instaurerà un profilo D3 di corrente veloce decelerata, da valle però risale una condizione di corrente lenta, pertanto prima di raggiungere la condizione critica si verrà a determinare un risalto, che porterà la corrente da veloce a lenta e quindi nuovamente alle condizioni di moto uniforme.

## CORRENTI A PELO LIBERO – PASSAGGIO SU SOGLIA



Vediamo ora lo stesso caso, ma in condizioni di alveo a forte pendenza, sempre nell'ipotesi che  $E_0 - a < E_{min}$ , ovvero che la corrente non abbia l'energia sufficiente a passare la soglia. Anche in questo caso a monte della soglia la corrente deve aumentare la propria energia, di una quantità tale che sopra la soglia si configuri la condizione di  $E_{min}$ . In questo caso la corrente non può rimanere veloce, ovvero, l'aumento di energia non può avvenire riducendo l'altezza del pelo libero, perché questo significherebbe che la corrente veloce è governata da una condizione a valle.

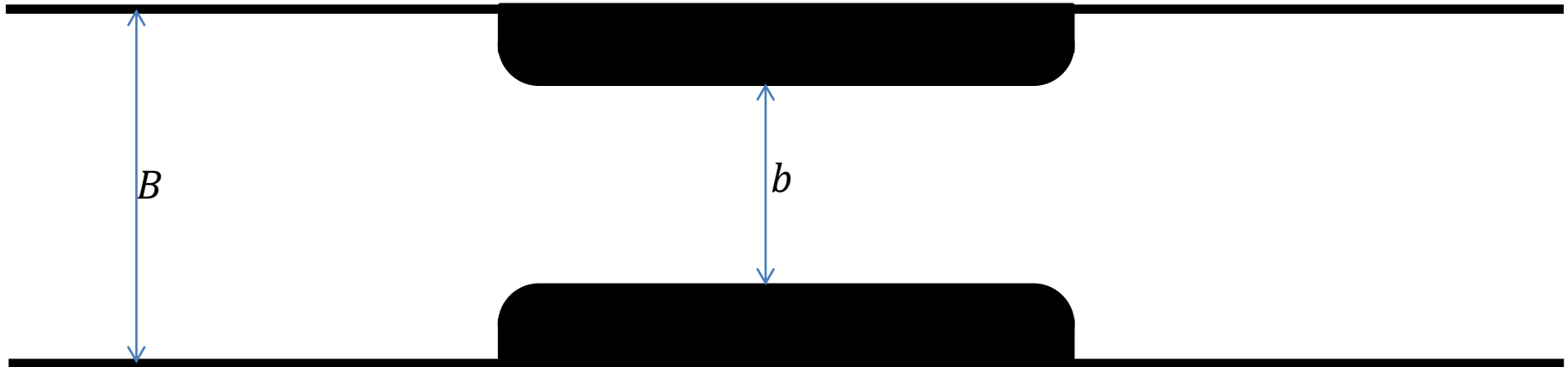
## CORRENTI A PELO LIBERO – PASSAGGIO SU SOGLIA

Necessariamente la corrente deve passare a lenta prima della soglia e quindi acquisire energia con un innalzamento del pelo libero. Il passaggio da lenta a veloce, quindi attraverso lo stato critico, determina la formazione di un risalto a monte della soglia. L'energia specifica dalla condizione di moto uniforme  $E_0$ , inizialmente diminuirà per la presenza del risalto, quindi attraverso una corrente lenta ritardata (profilo F1), governata da valle, aumenterà la propria energia specifica. L'aumento sarà tale per cui, sopra la soglia, tolta la quantità  $a$ , si venga a determinare la minima condizione di energia necessaria al transito della portata  $Q$ , ovvero  $E_{\min}$ , corrispondente alla condizione critica. Immediatamente a valle della soglia rimane quanto già visto per la corrente lenta. Ci troveremo ad una altezza  $h_D$  inferiore a quella di moto uniforme, essendo però in un alveo a forte pendenza, in questo caso si instaurerà un profilo F3 che porterà all'infinito verso valle alle condizioni di moto uniforme  $h_0$ .

Il comportamento appena visto, ci mostra come in presenza di una soglia, il comportamento è diametralmente opposto se siamo in corrente lenta o veloce, visto che nel primo caso abbiamo la formazione di un risalto a valle della soglia, mentre in corrente veloce il risalto si forma a monte.

Lo stesso fenomeno si osserva anche in presenza di un restringimento, come ad esempio la presenza di pile di ponte.

## CORRENTI A PELO LIBERO – RESTRINGIMENTO



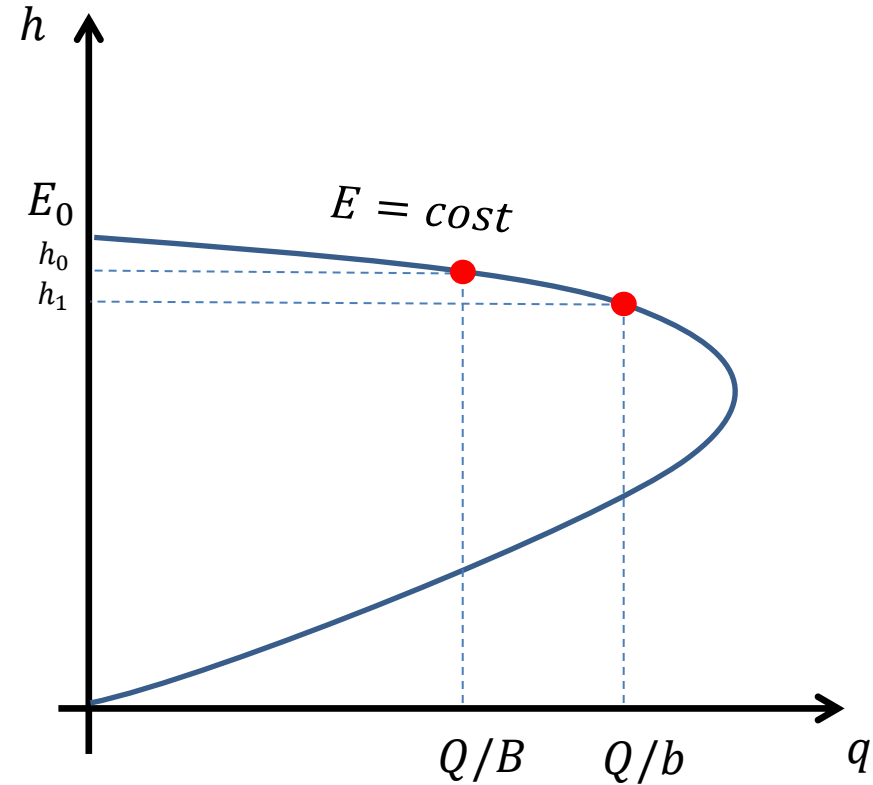
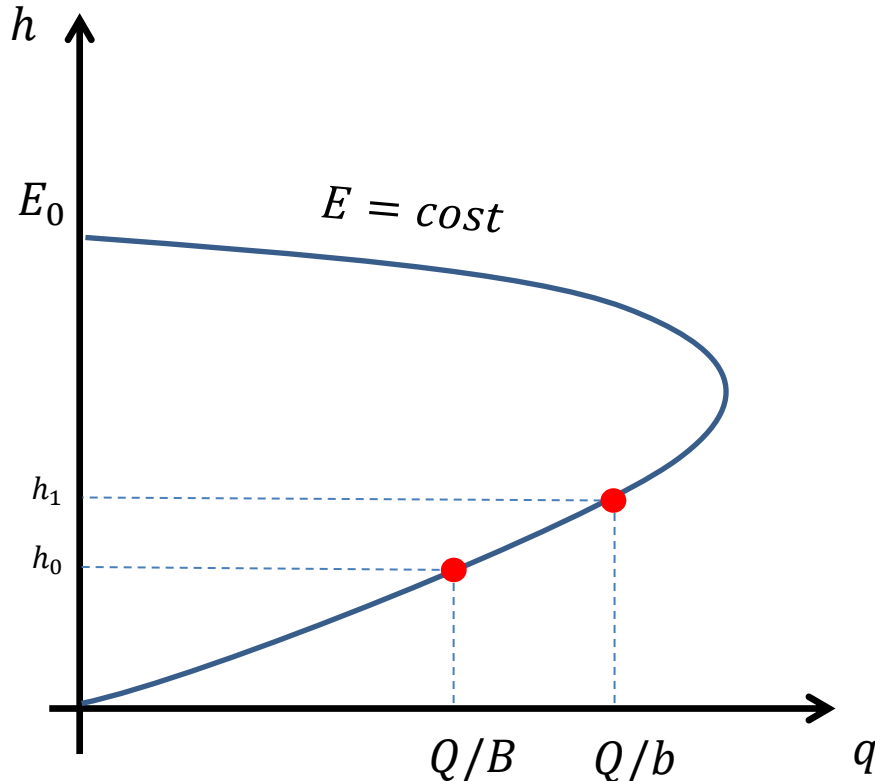
Si consideri il caso di restringimento, come nella figura sopra (vista dell'alveo dall'alto), dove il canale passa da una larghezza  $B$  ad una larghezza  $b < B$ , ipotizzando che il restringimento sia ben raccordato e non determini perdite di energia specifica. In questo caso, rispetto alla soglia, si deve ragionare in termini di energia specifica costante e di variazione di portata. Infatti, la portata  $Q$  rimane costante, ma non la portata per unità di larghezza. Avremo  $q_0 = Q/B < q_1 = Q/b$  visto che  $b < B$ .

In questo caso è opportuno ragionare almeno inizialmente non tramite il grafico  $E-h$ , ma attraverso il grafico  $Q-h$ , ovvero come varia la portata  $Q$  in funzione dell'altezza  $h$  per una data energia  $E$  mantenuta costante. Nel nostro caso si considererà  $q$  invece di  $Q$ , e  $E_0$  come energia specifica contenuta dalla corrente.

## CORRENTI A PELO LIBERO – RESTRINGIMENTO

### Corrente lenta.

Lungo il grafico  $q$ - $h$  ad energia costante  $E_0$ , si osserva che il passaggio da  $Q/B$  a  $Q/b$  determina un abbassamento del pelo libero da  $h_0$  a  $h_1$ , analogamente al caso della soglia.



### Corrente veloce.

Lungo il grafico  $q$ - $h$  ad energia costante  $E_0$ , si osserva che il passaggio da  $Q/B$  a  $Q/b$  si determina un innalzamento del pelo libero da  $h_0$  a  $h_1$ , analogamente al caso della soglia.

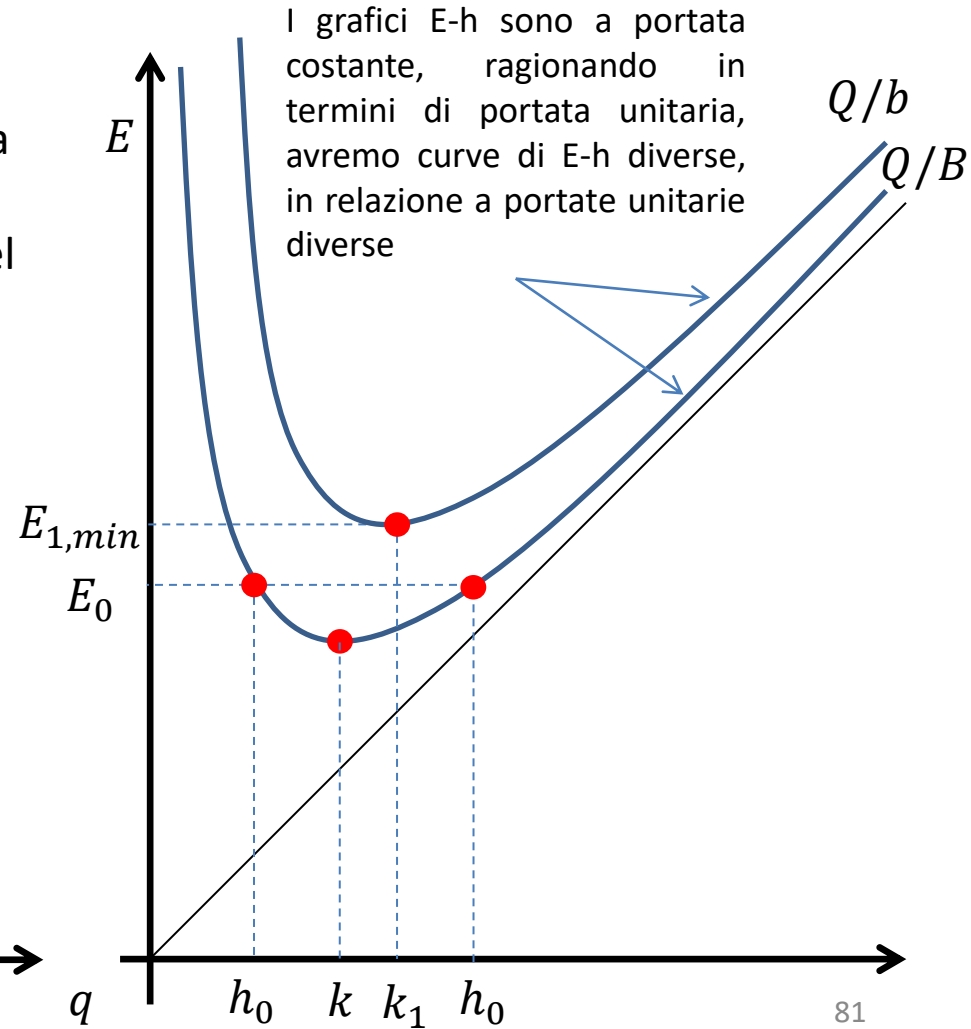
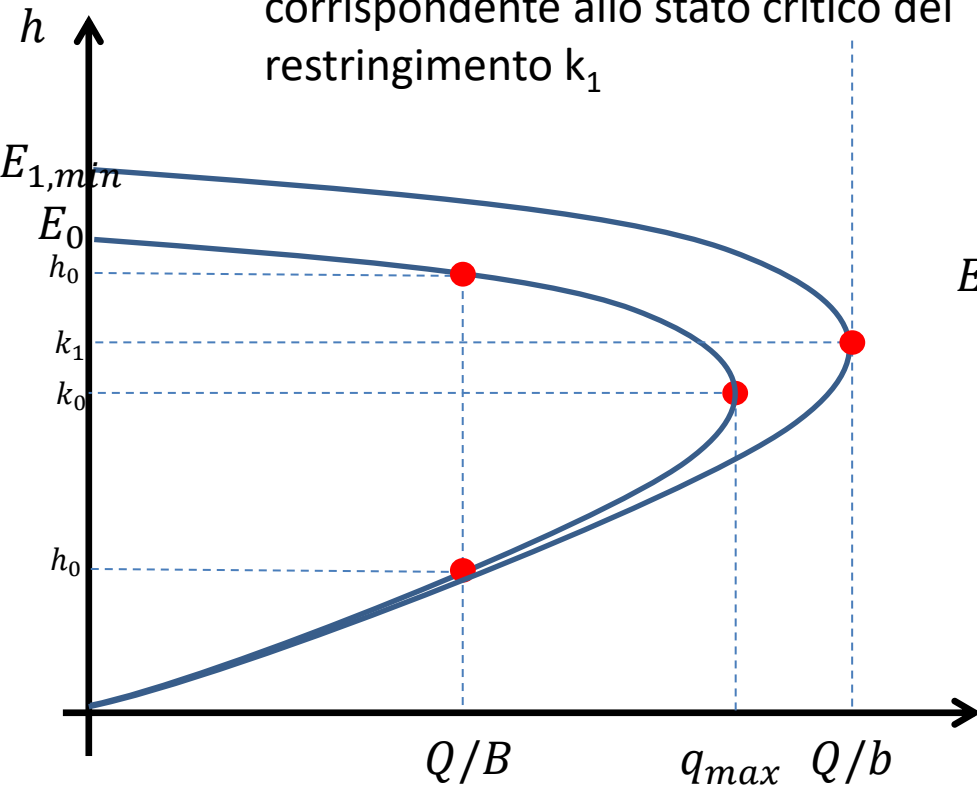


## CORRENTI A PELO LIBERO – RESTRINGIMENTO

I profili di corrente possono variare notevolmente nel caso in cui  $Q/b$  sia maggiore della  $q_{max}$  che può essere raggiunta con l'energia specifica  $E_0$ . L'altezza critica è funzione della larghezza dell'alveo, quindi  $k_1$  nel restringimento è maggiore di quella  $k$  nel canale

$$k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} < k_1 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}$$

Avere  $Q/b > q_{max}$ , significa che la corrente ha un'energia  $E_0$  inferiore all'energia corrispondente allo stato critico del restringimento  $k_1$



## CORRENTI A PELO LIBERO – RESTRINGIMENTO

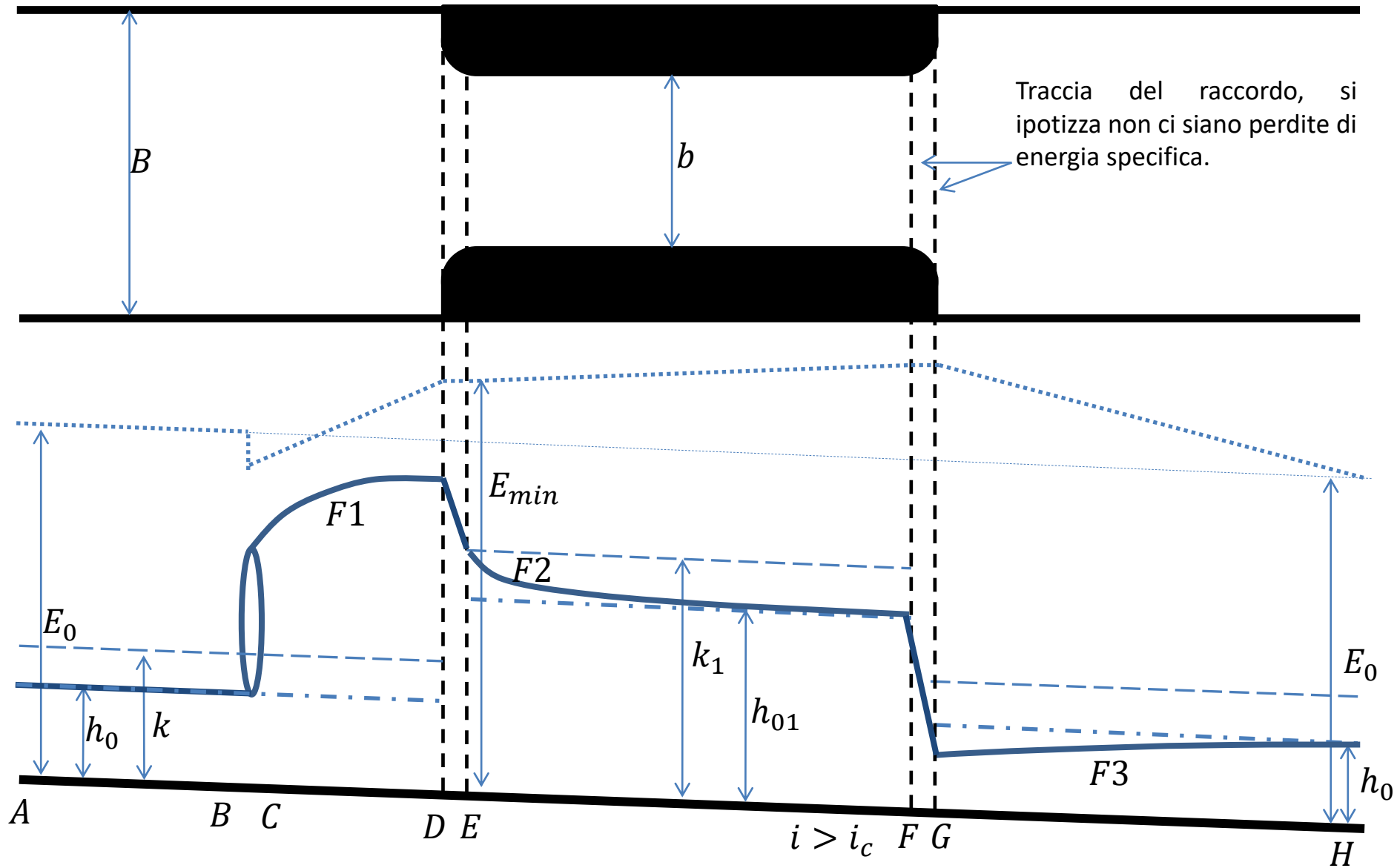
Consideriamo il caso di alveo a forte pendenza (si faccia riferimento alla prossima pagina per la figura ed i riferimenti in essa presente), con corrente che non possiede l'energia necessaria a superare un restringimento. Poniamo inoltre che nel restringimento, se fosse infinitamente esteso, si raggiungerebbe una condizione di moto uniforme con altezza  $h_{01}$ . Sia per ipotesi  $h_{01} < k_1$ , quindi anche nel restringimento siamo in una condizione di corrente veloce uniforme.

Per lo stesso ragionamento fatto per la soglia, a monte del restringimento la corrente deve passare da veloce a corrente lenta, attraverso un risalto, per acquisire l'energia necessaria a superare l'ostacolo. L'energia da raggiungere alla sezione D, sarà la minima necessaria al passaggio, quindi legata alla condizione critica  $k_1$  che si verrà a determinare nel restringimento. Nell'ipotesi di corrente uniforme veloce nel restringimento, dovendo questa essere governata da monte, per convenzione, si ipotizza che il passaggio per lo stato critico  $k_1$  avvenga alla sezione E. Il tratto di corrente lenta C-D è governato dall'altezza  $h_D$ , questa può essere determinata a partire da  $h_E = k_1$  nell'ipotesi che nel passaggio da B a b non ci siano perdite di energia specifica.

$$E_E = E_{1,min} = \frac{3}{2}k_1 = E_D = h_D + \frac{Q^2}{2gB^2h_D^2}$$

Dal grafico E-h si osserva come, nel passaggio da B a b, a energia costante, risulti necessariamente che  $h_D > h_E$

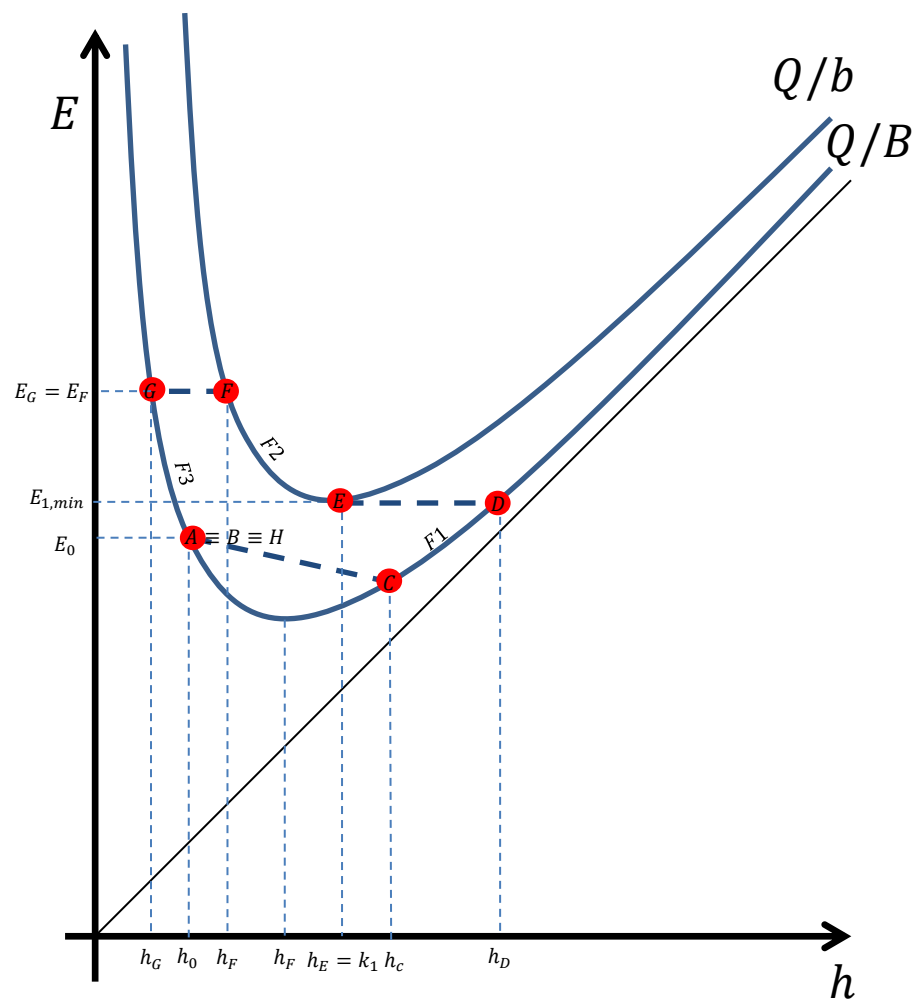
# CORRENTI A PELO LIBERO – RESTRINGIMENTO



## CORRENTI A PELO LIBERO – RESTRINGIMENTO

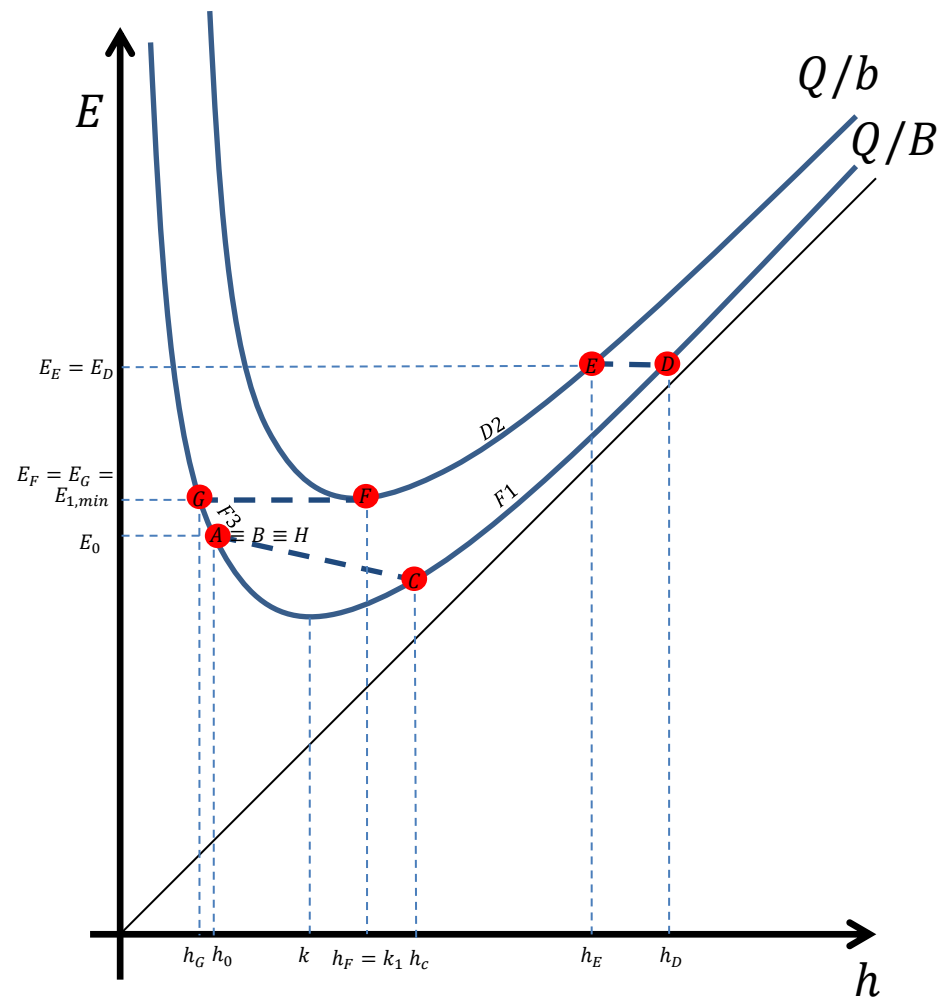
Nel restringimento, a partire dalla condizione critica in E, si svilupperà un profilo F2 che verso valle tenderà asintoticamente all'altezza  $h_{01}$ . Lungo il profilo F2 si arriverà ad una certa altezza  $h_F > h_{01}$  alla sezione di fine restringimento, che dipende dalla lunghezza L del restringimento stesso (nella figura solo per comodità  $h_F$  circa uguale a  $h_{01}$ ).

Dalla sezione F alla sezione G, nuovamente si passa da b a B come larghezza, mantenendo l'energia specifica, il grafico E-h mostra come necessariamente  $h_F > h_G$ . Non solo, dovrà anche necessariamente essere  $h_G < h_A = h_0$  visto che ci troviamo in corrente veloce ad una energia  $E_G > E_0$ . Quindi in G essendo  $h_G < h_0 < k$  si instaurerà un profilo F3, che all'infinito verso valle tenderà a portare il pelo libero alle condizioni di moto uniforme.



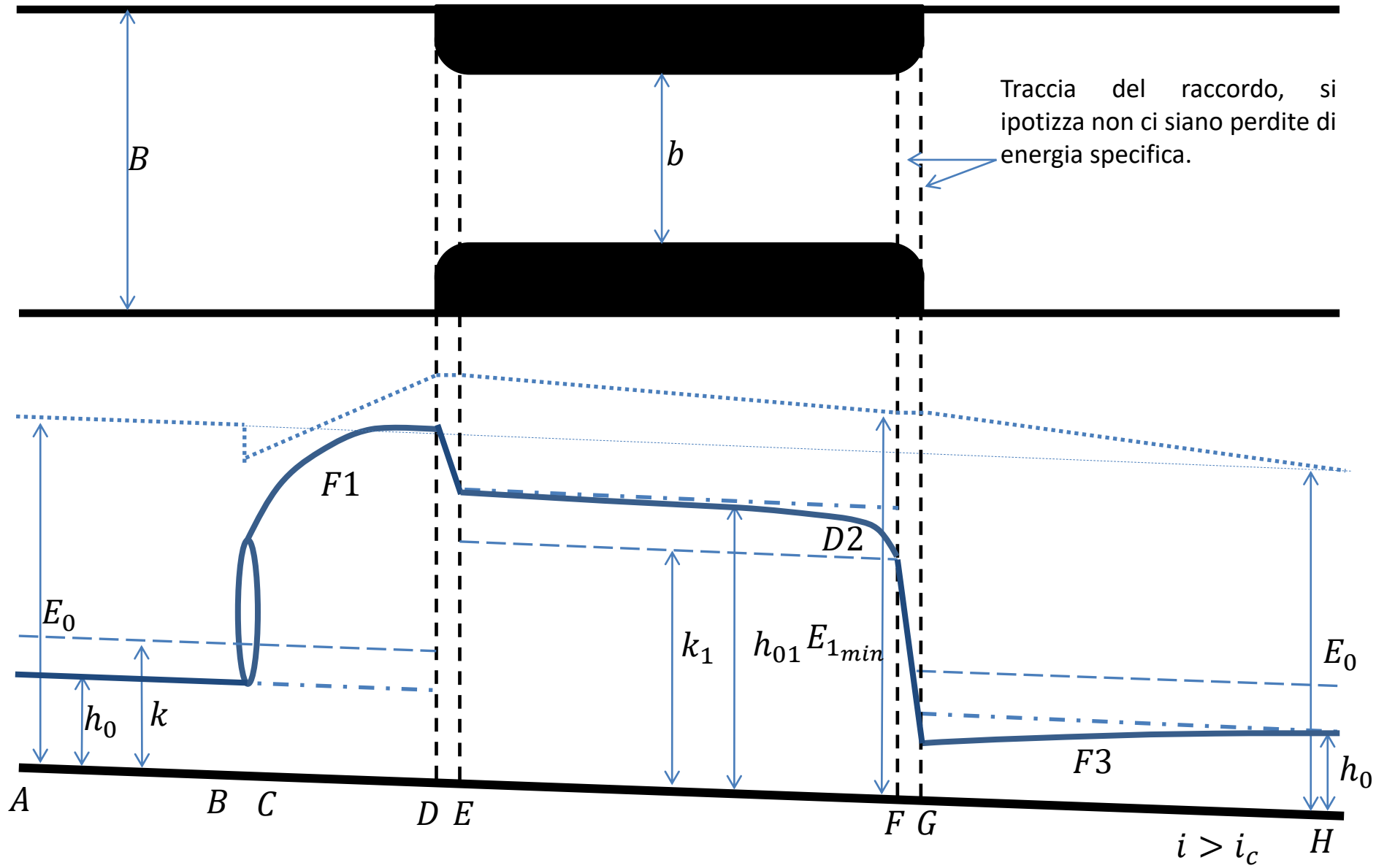
## CORRENTI A PELO LIBERO – RESTRINGIMENTO

Consideriamo lo stesso caso, ma poniamo che nel restringimento la condizione di moto uniforme  $h_{01}$ , sia di tipo lento,  $h_{01} > k$ . Questo tratto sarà governato da valle, in questo caso allora, il passaggio per lo stato critico  $k_1$  viene posto per convenzione alla sezione F. Da F risalendo verso monte alla sezione E, si dovrà instaurare un profilo D2, essendo  $h_F = k_1 < h_{01}$ . Allora in questo caso, rispetto al precedente, lungo il profilo F1 del tratto C-D si dovrà raggiungere un'altezza  $h_D$  maggiore, dato che l'energia specifica in D, dovrà essere sufficiente a tenere conto della perdita di energia lungo il tratto E-F per via del profilo D2, in modo da garantire in F il livello  $E_{1min}$ . Per il resto il ragionamento è analogo al caso precedente.

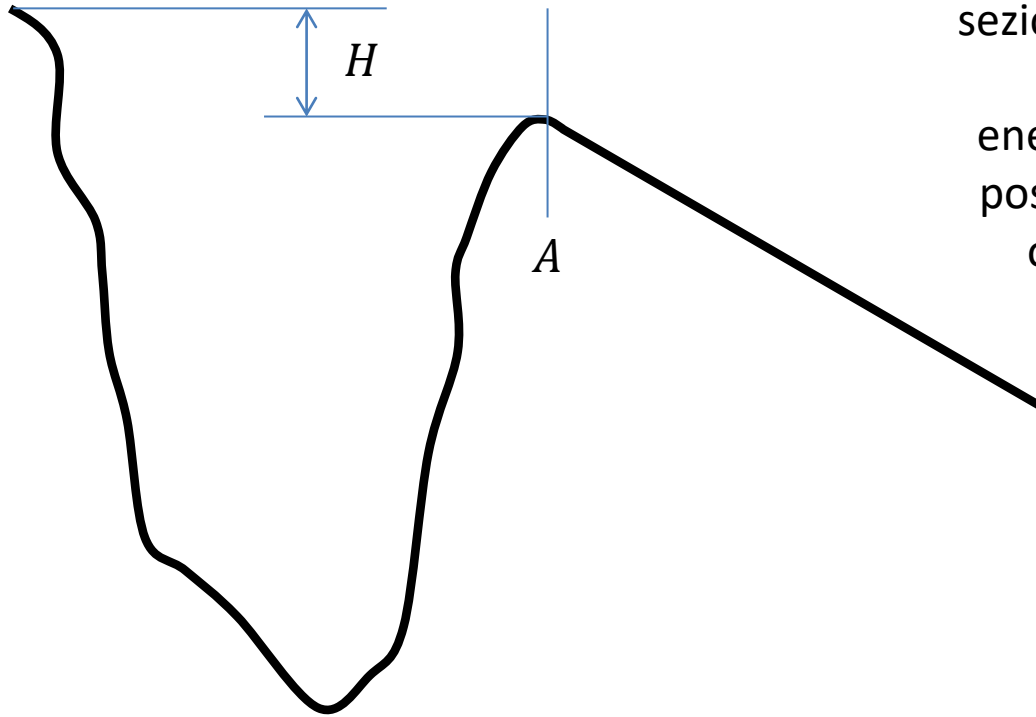


In questo caso l'altezza in G si può calcolare da: 
$$E_F = E_{1,min} = \frac{3}{2} k_1 = E_G = h_G + \frac{Q^2}{2gB^2 h_G^2}$$

# CORRENTI A PELO LIBERO – RESTRINGIMENTO



## CORRENTI A PELO LIBERO – PORTATA DA SERBATOIO



Si consideri un serbatoio ben raccordato alla sezione A con un canale, poniamo pertanto che si possano trascurare le perdite di energia specifica, e l'energia alla sezione A possa essere considerata pari all'altezza H, ovvero la differenza tra il pelo libero del serbatoio ed il fondo alla sezione A. Avremo allora alla sezione A:

$$E_A = h_A + \frac{V_A^2}{2g} = H$$

L'energia disponibile alla sezione A è quindi fissa e determinata dal serbatoio, la portata che ne deriverà nel canale, dipende dalla pendenza di questo. Ipotizziamo ora che il canale abbia una debole pendenza, tale da poter assicurare una condizione di corrente lenta, dove in moto uniforme sappiamo che varrà

$$Q_0 = cA_0 Ri_0^{2/3} \sqrt{i}$$

La corrente lenta è però governata da valle, e la condizione di moto uniforme  $h_0$  risalirà verso monte alla sezione A.

## CORRENTI A PELO LIBERO – PORTATA DA SERBATOIO

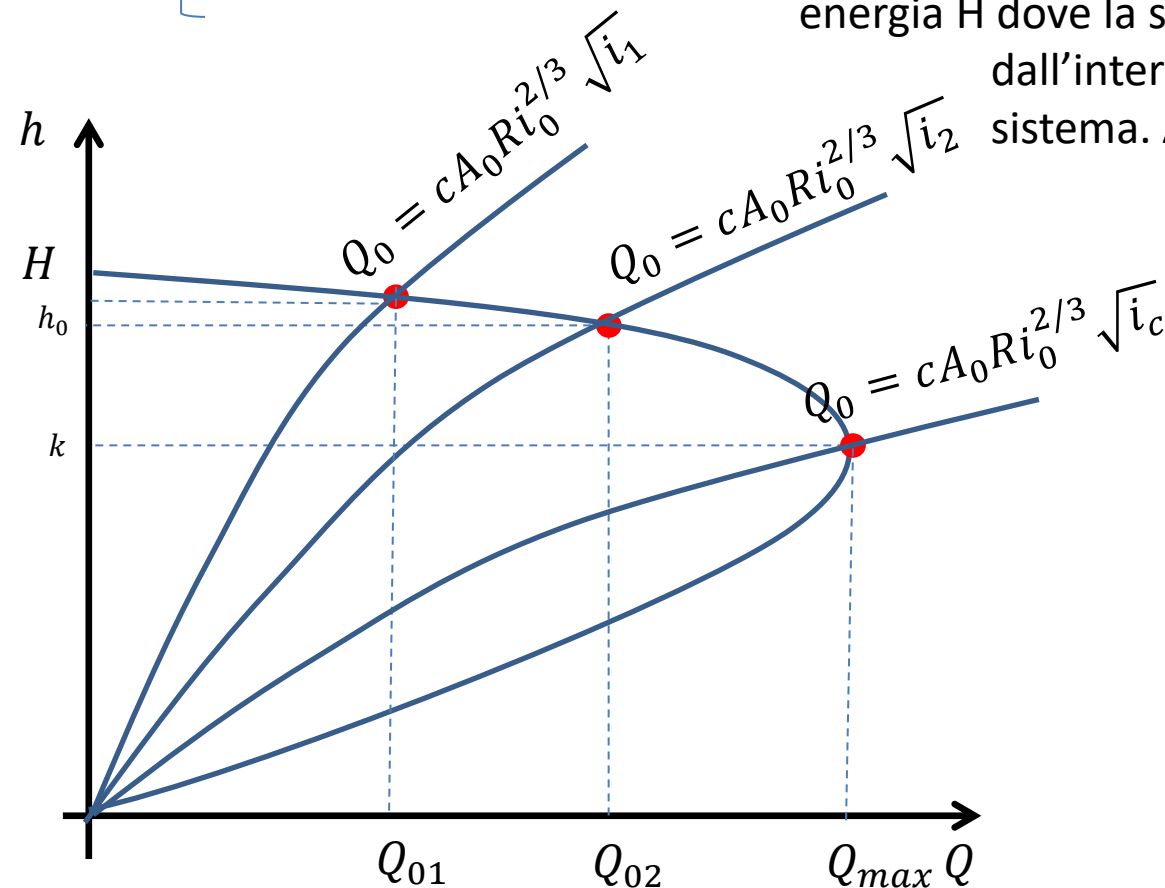
Alla sezione A allora varrà contemporaneamente:

$$H = h_0 + \frac{Q_0^2}{2gA_0^2}$$

$$Q_0 = cA_0 R i_0^{2/3} \sqrt{i}$$

La soluzione di questo sistema permette di determinare la  $h_0$  e la portata  $Q$  che dal serbatoio transita nel canale. Se adesso consideriamo di variare la pendenza ad esempio da  $i_1$  a  $i_2$  con  $i_2 > i_1$ , la portata aumenta come si osserva anche dal grafico  $Q$ - $h$  a energia  $H$  dove la soluzione del sistema è dato dall'intersezione tra le due curve del sistema. Aumentando la pendenza, la

portata aumenterà, fino ad una pendenza per cui raggiungeremo la condizione di portata massima che può essere transitata con l'energia  $H$ . In questa condizione saremo alla pendenza critica corrispondente allo stato critico. Per pendenze maggiori saremo in condizioni di corrente veloce, ma la portata non potrà aumentare rispetto a  $Q_{max}$ .





## CORRENTI A PELO LIBERO – PORTATA DA SERBATOIO

Pertanto per qualsiasi pendenza che garantisca la condizione di corrente veloce, verrà trasportata la portata  $Q_{max}$ . In corrente veloce avremo il passaggio proprio in A per lo stato critico  $k$  con energia specifica pari ad  $H$ .

Vista la relazione tra energia specifica e altezza critica sappiamo che

$$E_A = \frac{3}{2}k = H$$

Inoltre allo stato critico, per sezione rettangolare avremo

$$Q = Q_{max} = AV_c = bk\sqrt{gk}$$

Pertanto data  $H$ , in canale a pendenza forte, la portata può essere facilmente calcolata. Nel caso di corrente lenta è invece richiesta la soluzione del sistema precedente, che può essere risolto iterativamente attraverso:

$$H = h_0 + \frac{c i}{2g} Ri_0^{4/3}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – LUCI SOTTO BATTENTE

Richiamo alla luce sotto battente.

Caso con serbatoio. Applico Bernoulli tra 1 e 2, con  $v_1=0$  (fluido in quiete):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Visto che

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - z_2 - \frac{p_2}{\gamma} = z_1 + \gamma \frac{h - z_1}{\gamma} - z_2 - \gamma \frac{aC_c - z_2}{\gamma} =$$

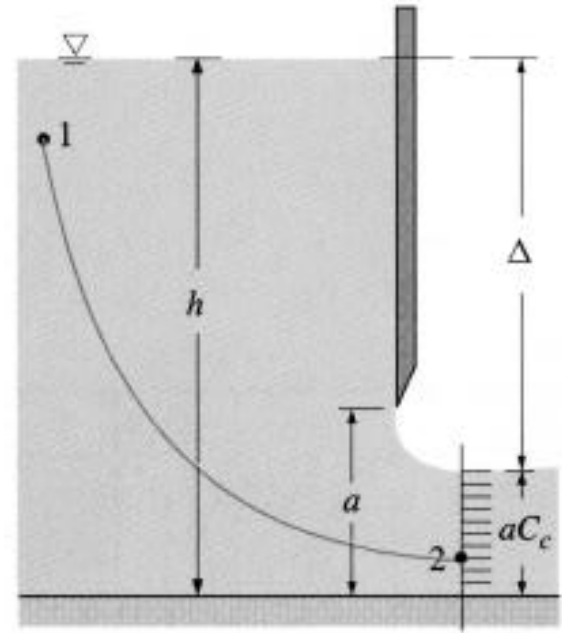
$$= h - aC_c = \Delta$$

Dove  $C_c$  è il fattore di contrazione che a partire dalla luce sotto battente mi definisce la sezione contratta, ottengo:

$$V_2 = \sqrt{2g\Delta} \quad Q = aC_c b \sqrt{2g\Delta}$$

Se a monte della paratoia non avessi un serbatoio ma una corrente, considerando nulle le perdite di carico indotte dalla paratoia, e uguagliando le energie specifiche a monte e valle:

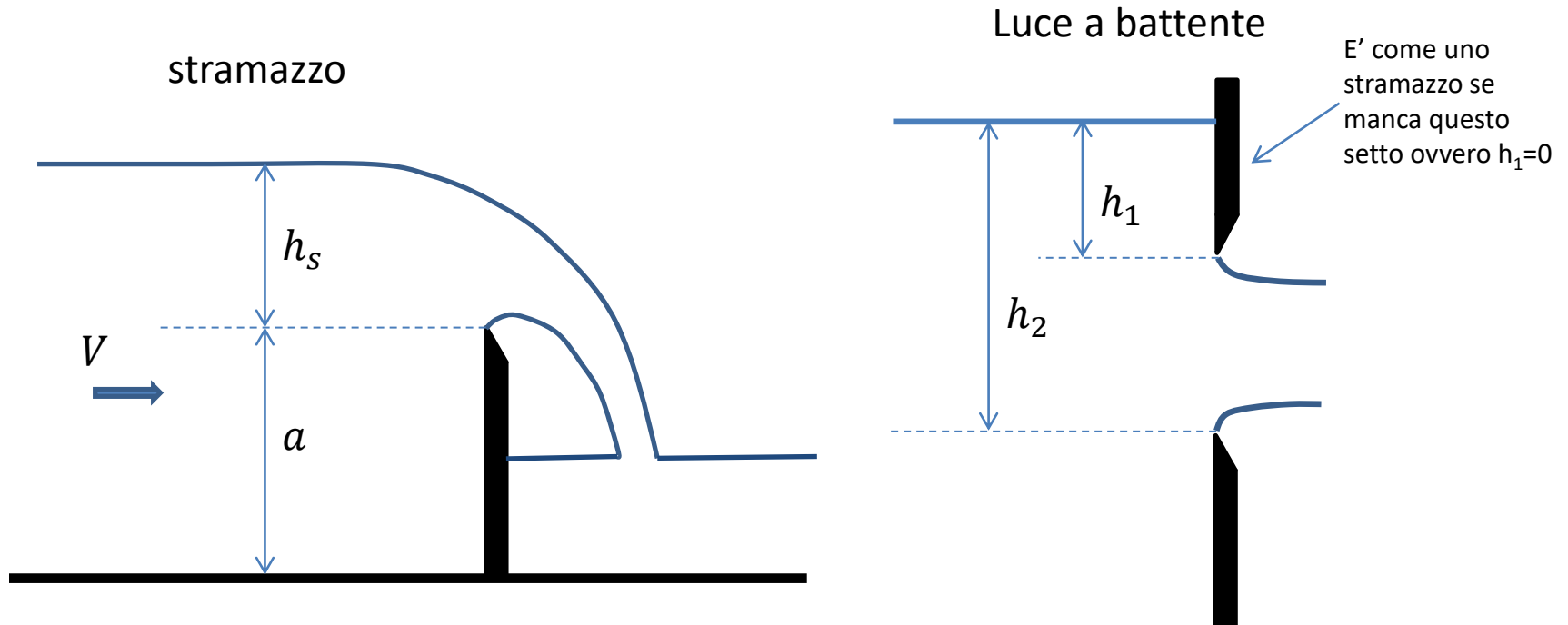
$$h + \frac{Q^2}{2gb^2h^2} = aC_c + \frac{Q^2}{2gb^2a^2C_c^2} \quad Q = \mu ab \sqrt{2gh} \quad \text{con} \quad \mu = \frac{C_c}{\sqrt{1 + \frac{aC_c}{h}}}$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – STRAMAZZI

Permettono la misura della portata di una corrente a superficie libera, a partire dall'altezza ad una sezione opportuna. Gli stramazzi propriamente detti, sbarrano inferiormente una corrente, la obbligano a rigurgitare a monte e a formare una vena liquida che staccandosi dal bordo superiore *stramazza* a valle.

Date le forti curvature non si può applicare Bernoulli. Si può assimilare però il comportamento a una luce a battente con battente nullo.



## CORRENTI A PELO LIBERO – STRAMAZZI

La distribuzione della velocità nella sezione contratta di una luce a battente è parabolica. Per luci di piccole dimensioni rispetto al carico si può usare come velocità media quella al baricentro della sezione e considerare il profilo di velocità come lineare. Per luci di grandi dimensioni rispetto al carico, la portata va calcolata integrando su tutta la sezione la velocità

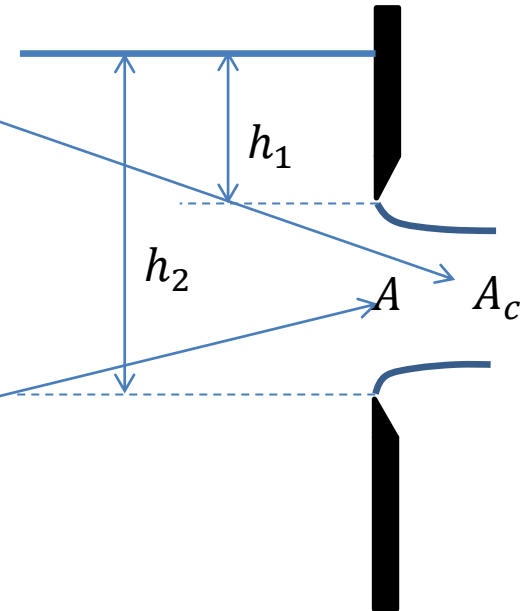
$$Q = \int_{A_c} \sqrt{2gh} dA$$

Con  $h$  l'affondamento, se rapporto alla sezione stessa della luce (tramite un coefficiente  $\mu$ ) posso approssimare a

$$Q = \mu \int_A \sqrt{2gh} dA$$

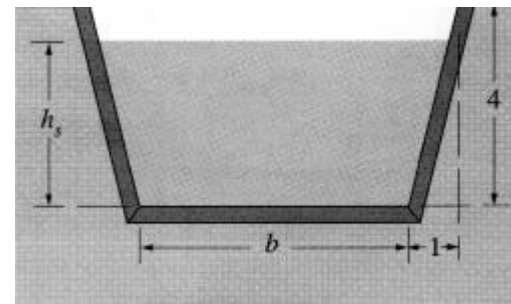
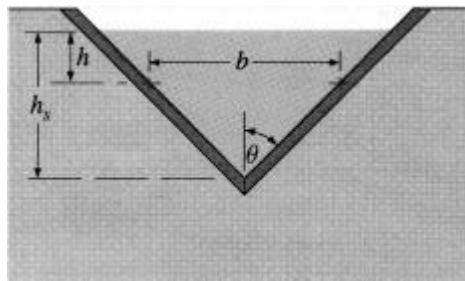
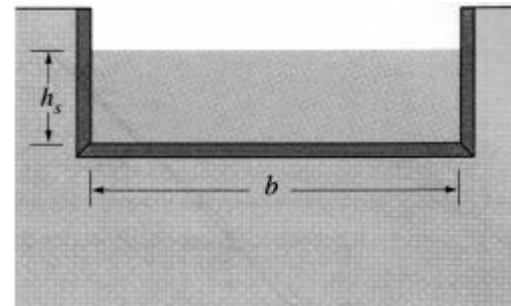
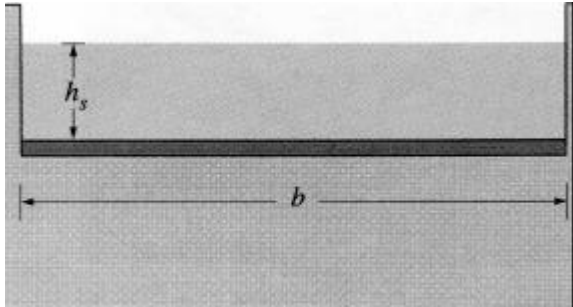
Per sezione rettangolare di larghezza  $b$

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{h} dh = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right)$$

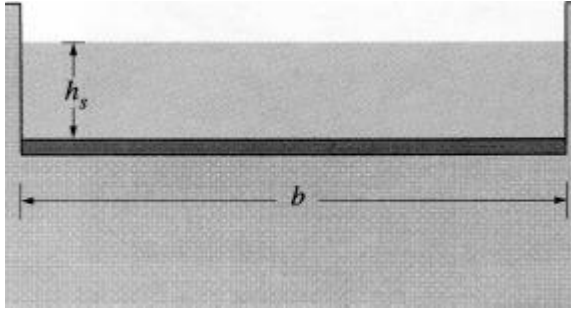


## CORRENTI A PELO LIBERO – STRAMAZZI A SPIGOLO VIVO

Costituiti da parete verticale con una luce superiore di varie forme possibili

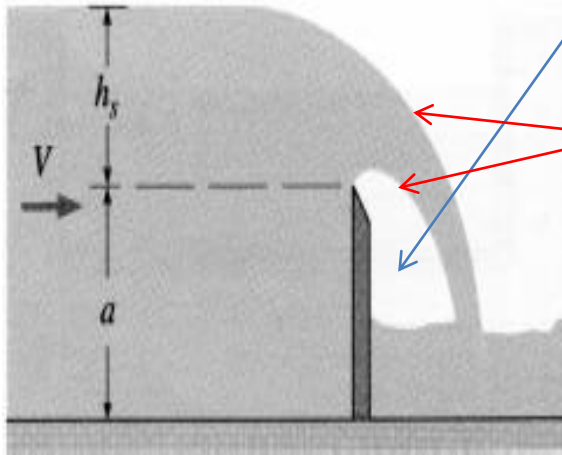


## CORRENTI A PELO LIBERO – STRAMAZZI



**Stramazzo di Bazin.** Larghezza  $b$  uguale a quella del canale.

Problema, la vena effluente ha la stessa larghezza del canale, la zona sotto la vena è chiusa da pareti laterali, efflusso e parete. La pressione tende a diminuire rispetto a quella atmosferica per discioglimento dell'aria nel fluido.



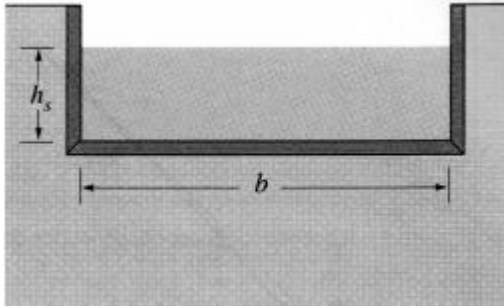
Mi trovo con un  $\Delta P$  tra superficie superiore e inferiore della vena, la vena si abbassa verso la parete (vena depressa), aumentando la differenza di pressione la vena può aderire alla parete (vena aderente). Variando la pressione varia la legge di flusso e quindi lede il funzionamento come misuratore di portata.

(Basta aggiungere un aeroforo che connetta il volume d'aria sotto la luce con l'esterno)

Portata luce a battente nullo  $h_1=0$ ,  $h_2=h_s$

$$Q = \frac{2}{3} \mu b h_s \sqrt{2gh_s} = \mu_s b h_s \sqrt{2gh_s} ; \mu_s = 0,4$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – STRAMAZZI

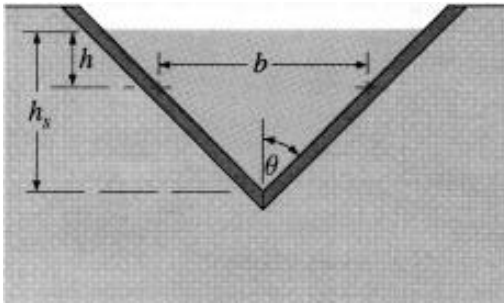


**Stramazzo di Hégly.** Larghezza  $b$  inferiore a quella del canale. C'è un effetto legato alla contrazione laterale. Si comporta come se avesse larghezza  $b - 0,2h_s$ .

$$Q = \frac{2}{3} \mu (b - 0,2h_s) h_s \sqrt{2gh_s}$$

Per la contrazione ho una riduzione di portata:

$$\Delta Q = \frac{2}{3} \mu 0,2h_s h_s \sqrt{2gh_s} = \frac{2}{15} \mu h_s^2 \sqrt{2gh_s}$$



**Stramazzo triangolare.** Permette di avere valori alti di carico anche per portate modeste. Adatto quindi ad uno spettro ampio di portate.

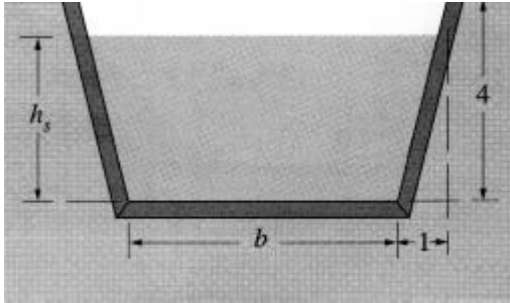
$$b = 2(h_s - h) \tan \theta$$

$$Q = 2\mu \tan \theta \sqrt{2g} \int_0^{h_s} (h_s - h) \sqrt{h} dh = \frac{8}{15} \mu \tan \theta \sqrt{2g} h_s^{5/2}$$

Per  $\theta = 45^\circ$  stramazzo Thomson:

$$Q = \frac{8}{15} \mu h_s^2 \sqrt{2gh_s} \sim 0,315 h_s^2 \sqrt{2gh_s}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – STRAMAZZI



Stramazzo Cipolletti, trapezoidale,

I lati inclinati servono a compensare la perdita di portata dello stramazzo contratto (tipo Hégly)

$$\Delta Q = \frac{2}{15} \mu_s h_s^2 \sqrt{2gh_s}$$

$$Q = \frac{8}{15} \mu \tan \theta \sqrt{2gh_s}^{5/2}$$

$$\frac{2}{15} \mu_s h_s^2 \sqrt{2gh_s} = \frac{8}{15} \mu \tan \theta \sqrt{2gh_s}^{5/2} \quad \text{da cui} \quad \theta = \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$

Fornisce una portata:

$$Q = \mu_s b h_s \sqrt{2gh_s} \quad ; \quad \mu_s = 0,415$$



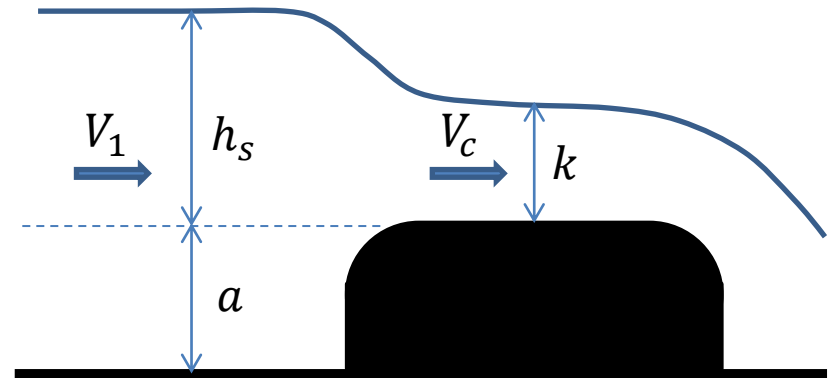
## CORRENTI A PELO LIBERO – STRAMAZZI A LARGA SOGLIA

Abbiamo visto che il passaggio sopra una soglia sufficientemente alta obbliga la corrente a passare sopra il manufatto allo stato critico → si sfrutta ciò per misurare la portata, vengono chiamati misuratori a risalto.

$$Q = AV_c = bk\sqrt{gk}$$

Più semplice misurare la  $h$  a monte (corrente lenta) piuttosto che  $k$ .  
Trascurando le perdite di carico:

$$h_s + \frac{V_1^2}{2g} = k + \frac{V_c^2}{2g} = \frac{3}{2}k$$



esprimo  $\frac{V_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gb^2(h_s + a)^2} = \frac{k^3}{2(h_s + a)^2}$  per cui  $h_s + \frac{k^3}{2(h_s + a)^2} = \frac{3}{2}k$

Se altezza cinetica di monte trascurabile  $k=2/3h_s$

$$Q = AV_c = bk\sqrt{gk} = \frac{2}{3\sqrt{3}}bh_s\sqrt{2gh_s}$$

Serve una lunghezza opportuna di soglia per garantire lo stato critico  $2h_s < L < 12h_s$

## CORRENTI A PELO LIBERO – SFIORATORE LATERALE

Serve ad evitare che l'altezza del profilo superi dei valori massimi consentiti, viene fatta sfiorare la portata in esubero.

Altezza e lunghezza della soglia vanno calcolate, in modo che a valle, anche nel caso di portata massima prevedibile il livello idrico non superi un valore assegnato.

L'altezza può essere posta di poco superiore al profilo nelle condizioni di portata di esercizio. Rimane da definire la lunghezza.

E' utile determinare i profili che si instaurano



## CORRENTI A PELO LIBERO – SFIORATORI LATERALI

Si assume che la tracimazione avvenga senza perdita di energia  $E=\text{cost}$ , consideriamo inoltre una sezione rettangolare

$$\frac{dE}{dx} = 0$$

$$E = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Analizzo il profilo della corrente, considero che  $E$  varia lungo la  $x$  per tramite dell'altezza  $h$  e della portata  $E=E(h,Q)$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\partial E}{\partial h} \frac{dh}{dx} + \frac{\partial E}{\partial Q} \frac{dQ}{dx} = 0 \quad \text{avendo} \quad \frac{\partial E}{\partial Q} = \frac{Q}{gA^2} \quad \text{ottengo} \quad \frac{dh}{dx} = -\frac{Q}{gA^2} \frac{\frac{dQ}{dx}}{\frac{\partial E}{\partial h}}$$

Per capire l'andamento di  $dh/dx$  ne valuto il segno

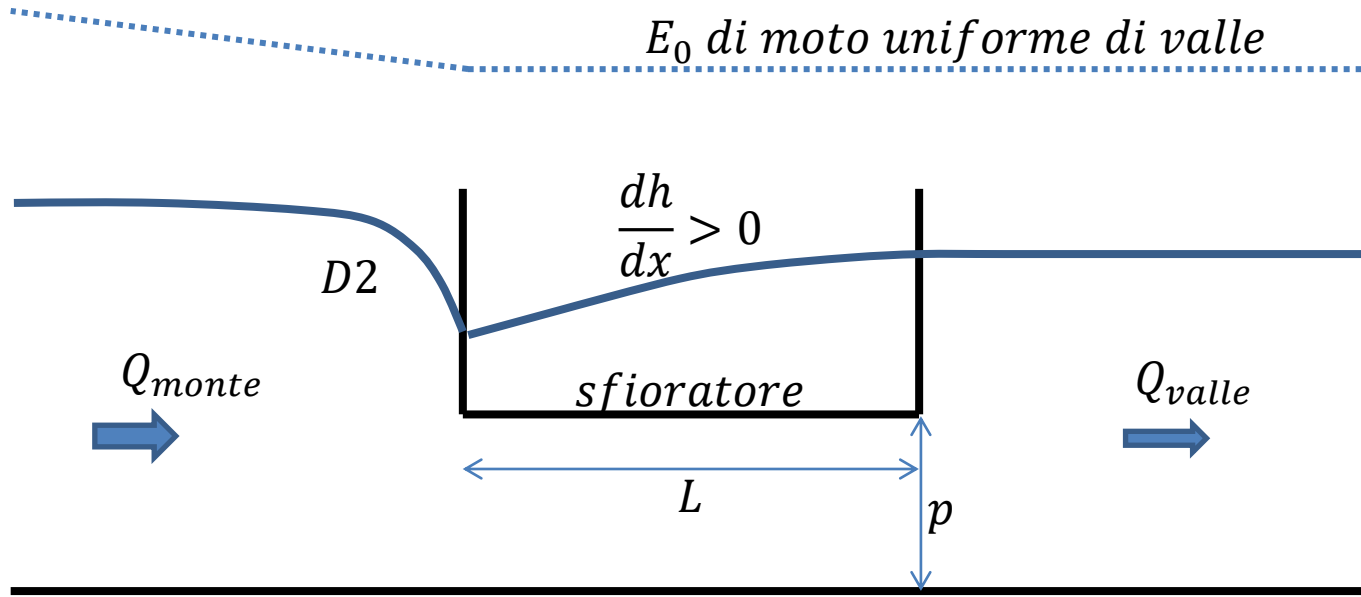
Per il numeratore lo sfioratore determina  $\frac{dQ}{dx} < 0$

Per il denominatore il segno di  $dE/dh$  dipende se siamo in corrente veloce ( $dE/dh < 0$ ) oppure in corrente lenta ( $dE/dh > 0$ )

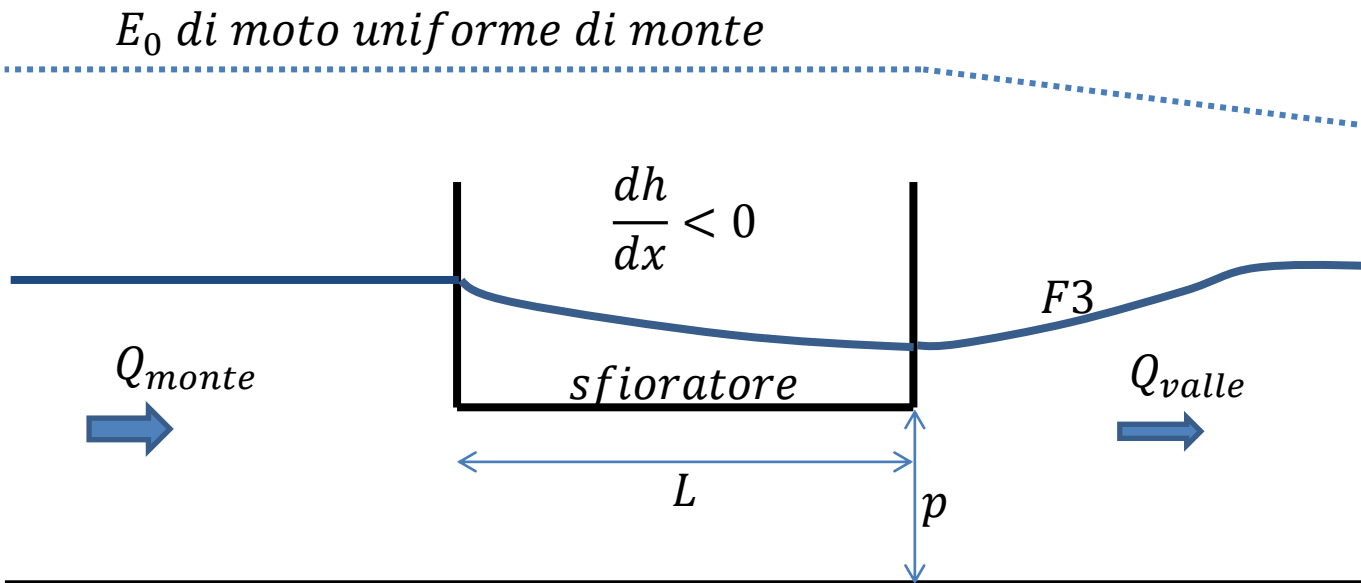
in uno sfioratore con corrente in arrivo lenta  $\frac{dh}{dx} > 0$  il profilo si alza

in uno sfioratore con corrente in arrivo veloce  $\frac{dh}{dx} < 0$  il profilo si abbassa

## CORRENTI A PELO LIBERO – SFIORATORI LATERALI



Nel caso di corrente lenta, il profilo è governato da valle



Nel caso di corrente veloce, il profilo è governato da monte

## CORRENTI A PELO LIBERO – SFIORATORE LATERALE

La portata scaricata per unità di lunghezza si calcola come fossimo con uno stramazzo, quindi considerando l'altezza  $h$  sopra il parapetto  $p$

$$\frac{dQ}{dx} = \mu_s (h - p) \sqrt{2g(h - p)}$$

Con

$$\mu_s = 0,38 - 0,40$$

Per correnti lente si usa

$$\mu = 0,93\mu_s$$

Problemi di verifica:

- Noti  $i, b, c, p, L$  e la portata a valle determinare la portata a monte
- Noti  $i, b, c, p, L$  e la portata a monte determinare la portata a valle

Problemi di progetto:

- Noti  $i, b, c$  la portata di moto uniforme  $Q$  a monte e valle determinare lunghezza  $L$  e altezza parapetto  $p$

Nel presente caso i problemi di verifica e di progetto si studiano in modo uguale

## CORRENTI A PELO LIBERO – SFIORATORE LATERALE

L'altezza  $p$  si impone uguale alle condizioni di moto uniforme nel caso di portata di esercizio, quindi  $p=h_0$  ottenuto da

$$Q_0 = cA_0 Ri^{2/3} \sqrt{i}$$

Che rappresenta la portata che non deve innescare lo sfioratore. In caso di progetto manca da determinare la lunghezza  $L$ , e considero note  $Q_1$  e  $Q_2$  le portate di monte e di valle, determinate ad esempio da eventi che superano la condizione di esercizio ( $Q_1$ ) e dal massimo di portata che voglio avere a valle ( $Q_2$ )

Consideriamo il caso di corrente lenta, quindi governato da valle, alla sezione di valle dello sfioratore abbiamo altezza  $h_{02}$  e energia  $E_{02}$ .

Si procede con un metodo alle differenze finite fissando un intervallo di lunghezza  $\Delta L$ , su tale intervallo si considera un carico costante  $h$  che caratterizza l'intera lunghezza  $\Delta L$ , per cui nella corrente vale:

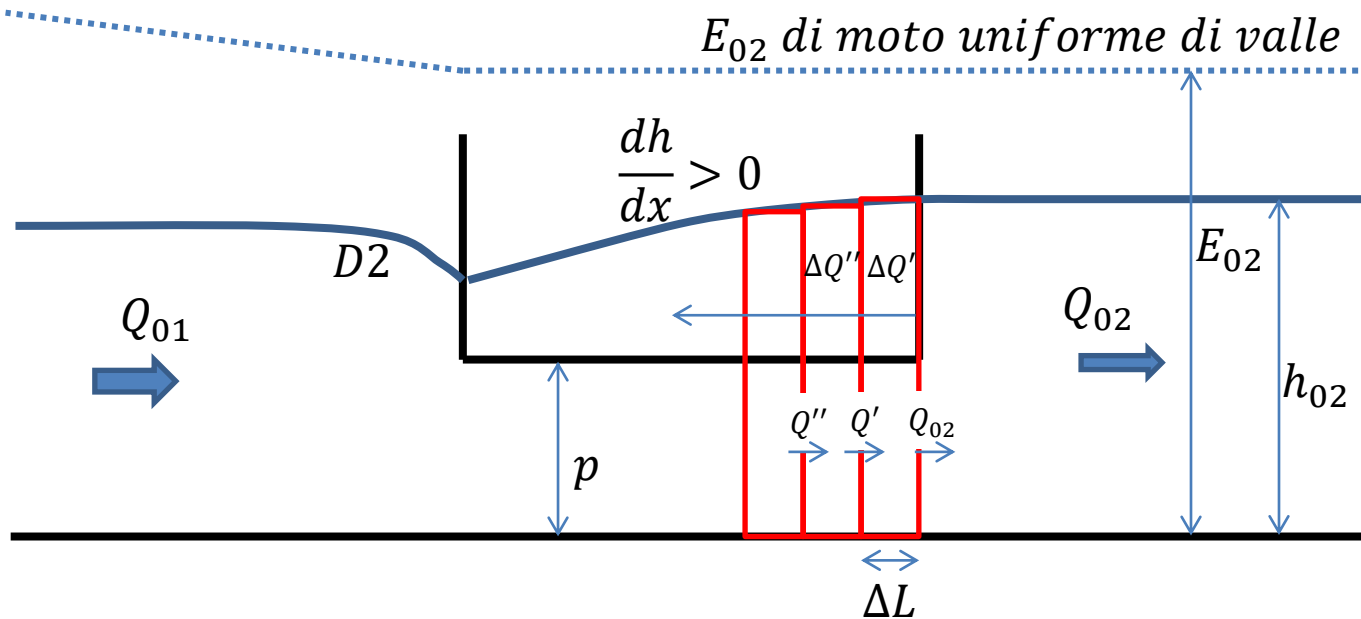
$$Q = A \sqrt{2g(E_{02} - h)}$$

Sempre su un elemento di lunghezza  $\Delta L$  sfiorerà la portata

$$\Delta Q = \mu \Delta L (h - p) \sqrt{2g(h - p)}$$

Per corrente lenta procedo da valle verso monte (in senso opposto se fossi in corrente veloce)

## CORRENTI A PELO LIBERO – SFIORATORE LATERALE



Al primo elemento  $\Delta L$  considero  $h_{02}$ , allora sfiorerà:  $\Delta Q' = \mu \Delta L (h_{02} - p) \sqrt{2g(h_{02} - p)}$

L'elemento successivo (verso monte) avrà allora una portata  $Q' = \Delta Q' + Q_2$

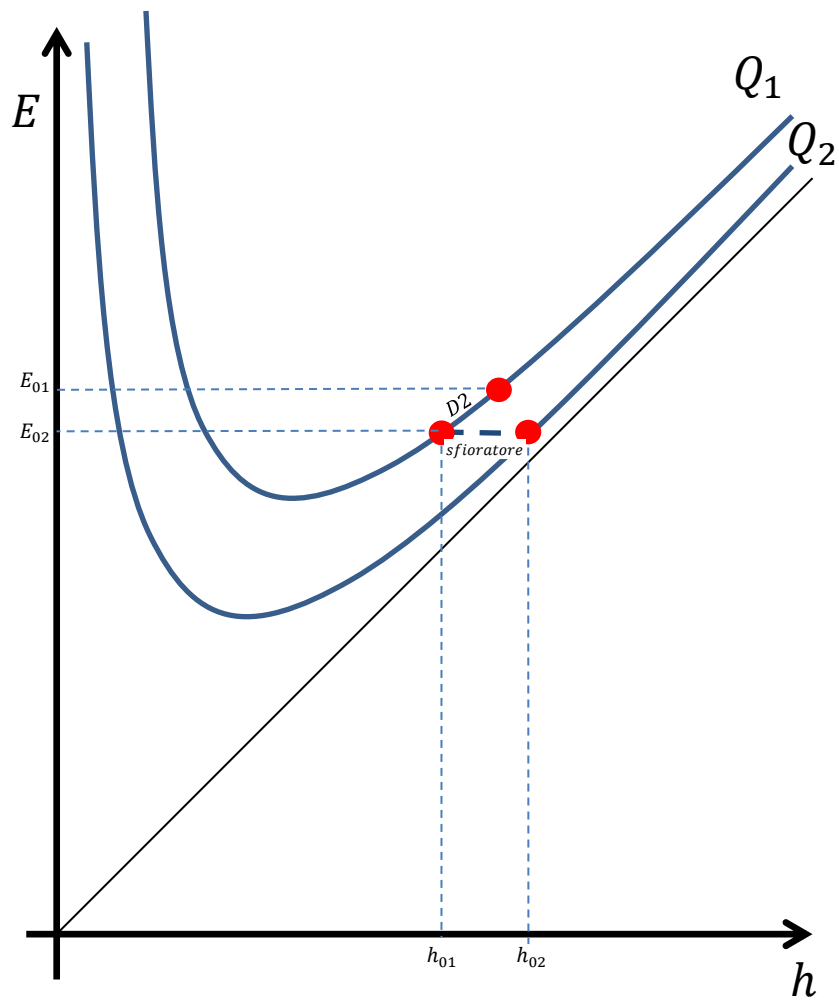
Entro con questa portata in  $Q' = A \sqrt{2g(E_{02} - h')}$  e ricavo  $h'$  quindi

$$\Delta Q'' = \mu \Delta L (h' - p) \sqrt{2g(h' - p)}$$

Aggiorno la portata  $Q'' = \Delta Q'' + \Delta Q' + Q_2$

Continuo a procedere in questo modo verso monte, mi fermo quando  $Q=Q_1$ , e vedo  $L$  come somma dei  $\Delta L$  che mi hanno portato a quel valore.

# CORRENTI A PELO LIBERO – SFIORATORE LATERALE





# **IDRAULICA APPLICATA**

## **PARTE 2 – Correnti a pelo libero**

### **Capitolo 2 – moto vario (cenni), moto bidimensionale, onde stabili**

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO VARIO

Riguarda principalmente lo studio della propagazione di onde.

Onda: propagazione di un segnale attraverso un mezzo materiale con una distinta velocità di propagazione detta celerità. Il segnale può subire nel corso della propagazione variazioni di forma, intensità e velocità.

Per le correnti a superficie libera il segnale riguarda la variazione di quota del pelo libero.

Si possono distinguere in relazione alla causa primaria di perturbazione, ad esempio, onde di mare (azione del vento), onde di marea (attrazione lunare), onde di piena (determinate da afflussi provenienti dalle diverse porzioni del bacino di alimentazione di un corso d'acqua).

Una classe importante di onde è quella delle onde lunghe, ovvero onde su acque basse, di interesse perché rappresentano il caso di onde di piena, di marea e di mare sotto costa, dove i fondali risultano più bassi.

Trattazione unidimensionale. Le variabili dipendenti del problema,  $Q$  (portata volumetrica) ed il carico piezometrico (o la profondità della corrente e quindi l'area  $A$ ) sono nel caso di moto vario funzioni sia della coordinata longitudinale  $x$  che del tempo  $t$ .

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO VARIO

### Equazioni del moto vario

Serve applicare anche in questo caso i principi di conservazione della massa e della quantità di moto per derivare le equazioni che governano il moto.

Le equazioni sono le stesse che abbiamo già visto per il caso di correnti in pressione, considerando la densità costante, l'equazione di continuità risulterà:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Nel caso di correnti in pressione la variazione dell'area nel tempo era legato alle deformazioni della condotta, nel caso di correnti a pelo libero deriva da un bilancio di massa che consideri, al passaggio di un onda, del sovrizzo del pelo libero. Quindi l'equazione ci dice che un aumento nella direzione  $x$  della portata volumetrica viene bilanciato da un abbassamento del pelo libero (o viceversa).

Per l'equazione del moto, sempre trascurando le variazioni di densità, avremo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0$$

Se come fatto nel capitolo precedente, scorporiamo l'altezza del fondo dalla derivata spaziale, e valutiamo il carico piezometrico in termini dell'altezza del pelo libero avremo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h + \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = i - J$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO VARIO

La variazione nello spazio dell'energia specifica, trovata nel capitolo precedente per il moto permanente  $dE/dx=i-J$  risulta nient'altro che una semplificazione dell'equazione appena scritta, trascurando la variazione nel tempo.

Per il moto vario abbiamo allora il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = i - J \end{cases}$$

Avendo esploso la derivata spaziale nei suoi due termini

La cadente  $J$  è esprimibile con le formule valide per il moto uniforme, quindi in funzione del quadrato della velocità, garantendo però evidenza del segno del vettore velocità (ovvero  $V|V|$ ).

In generale non sono risolvibili  $\rightarrow$  si procede numericamente

Dal punto di vista pratico si possono descrivere col metodo delle caratteristiche.

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Come già fatto per l'analisi del colpo d'ariete considero una combinazione delle due equazioni attraverso un operatore  $\lambda$ . Se considero ad esempio una sezione rettangolare di larghezza  $b$  costante avrò:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + \lambda \left[ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \right] = \lambda[i - J]$$

$$bV \frac{\partial h}{\partial x} + bh \frac{\partial V}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda \left[ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \right] = \lambda[i - J]$$

Raccogliendo i termini in  $V$  e  $h$

$$b \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \left( \frac{\lambda}{b} + V \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\lambda}{g} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{bhg}{\lambda} + V \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \lambda[i - J]$$

I termini tra parentesi quadre sono le derivate totali di  $h$  e  $V$  se

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{b} + V \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{bhg}{\lambda} + V$$

Che uguagliate mi forniscono il valore di  $\lambda$  che soddisfa la condizione di cui sopra

$$\frac{\lambda}{b} + V = \frac{bhg}{\lambda} + V \qquad \lambda = \pm b \sqrt{gh}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Sostituendo i valori ottenuti

$$\left[ \frac{\partial h}{\partial t} + (V \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} \right] \pm \sqrt{\frac{h}{g}} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (V \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \pm \sqrt{gh} [i - J]$$

Che assume la forma

$$\left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \pm \sqrt{\frac{h}{g}} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \pm \sqrt{gh} [i - J]$$

$$\frac{dh}{dt} \pm \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{dV}{dt} = \pm \sqrt{gh} [i - J]$$

Formulazione che è valida solo lungo le mie linee caratteristiche:

$$\frac{dx}{dt} = c = V \pm \sqrt{gh}$$

### Onde di piena

Si considera una forma approssimata delle equazioni considerando il carattere lentamente variabile nello spazio e nel tempo delle onde di piena dei corsi d'acqua.

Si tratta il moto come una successione di moti uniformi con appunto variazioni lente nello spazio e nel tempo.

Quindi si trascurano i seguenti aspetti:

- La superficie non è parallela al fondo → modello cinematico (impongo quindi  $i=J$ )
- Si trascura l'inerzia della massa fluida (acc. Locale e convettiva) → modello parabolico

### Modello cinematico

E' il modello più semplice da adottare, ma fornisce comunque informazioni utili sulla propagazione di un onda di piena. Invece delle equazioni del moto vario nella loro forma generale, si considera una scala di deflusso. Ovvero si trascurano tutti i termini imponendo  $i=J$ , si instaura una relazione univoca alla sezione tra area e portata

$$Q = kA^m$$

Questo approccio permette una trattazione elementare del fenomeno delle onde di piena.

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Si considera sia nota la variazione nel tempo della portata volumetrica o dell'area ad una data sezione di controllo (ad esempio tramite un misuratore come visto nelle pagine precedenti), che consideriamo come punto iniziale della coordinata  $x$  che definisce longitudinalmente il corso d'acqua.

La propagazione dell'onda di piena si riduce a determinare le funzioni

$$A(x, t) \quad Q(x, t)$$

a valle rispetto alla nostra sezione di controllo.

Si considera alveo cilindrico, per cui la scala di deflusso, ovvero  $m$  e  $k$  non variano lungo  $x$ . Posso considerare la scala di deflusso come una funzione composta, ovvero assumta la sua validità, mi permette di dire che la variazione nello spazio della portata può essere espresso per tramite della variazione dell'area  $A(x, t)$

$$Q = Q[A(x, t)]$$

Allora posso esprimere la variazione spaziale della  $Q$  per tramite di come dipende da  $A$ :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dQ}{dA} \frac{\partial A}{\partial x} \quad Q = kA^m \quad \frac{dQ}{dA} = mkA^{m-1} = m \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = m \frac{Q}{A} \frac{\partial A}{\partial x}$$

Considero l'equazione di continuità e quanto appena visto

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial t} + m \frac{Q}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

$$\frac{\partial A}{\partial t} + m \frac{Q}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

Anche in questo caso, l'espressione appena ricavata, rappresenterebbe la mia derivata totale di A se:

$$\frac{dx}{dt} = m \frac{Q}{A}$$

Questa è la nostra equazione caratteristica nello spazio x-t, e  $c=mQ/a$  indica la velocità di propagazione di A. Lungo tale linea caratteristica vale:

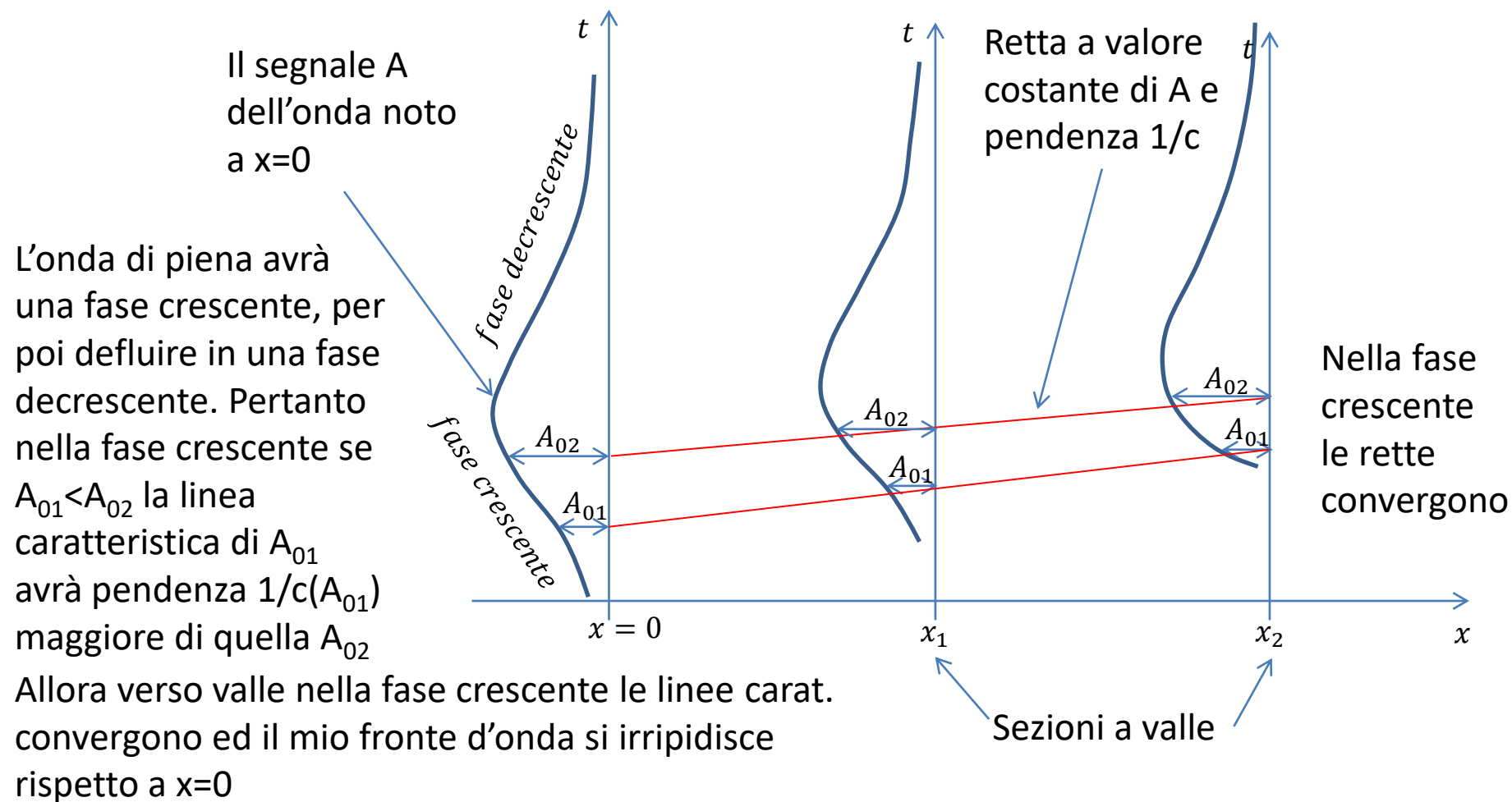
$$\frac{dA}{dt} = 0$$

Quindi la derivata totale dell'incognita A rispetto al tempo è nulla per un osservatore che si muove lungo una curva caratteristica. Una volta misurata l'area A (e tramite la scala di deflusso avrò Q) ad una sezione di partenza ne posso analizzare la propagazione nello spazio e nel tempo lungo la linea caratteristica, lungo la quale A rimarrà costante.

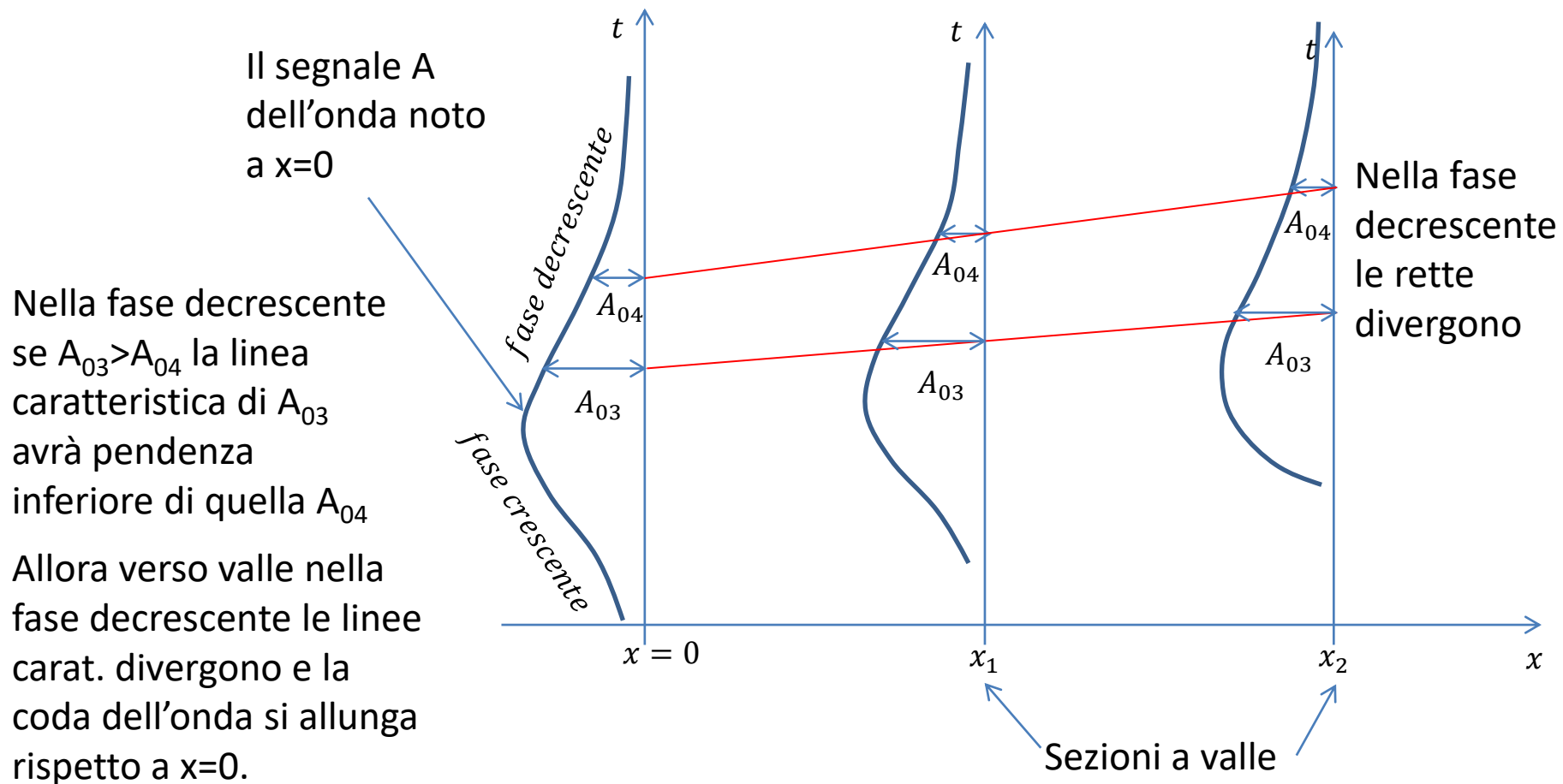
## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Su ciascuna di tali linee l'area della sezione  $A$  (quindi la portata) si mantiene costante, ma in tale condizione anche  $c=mQ/A$ , la celerità, che è una funzione di  $A$ , si mantiene costante, e quindi le curve caratteristiche risultano essere delle rette di pendenza costante  $1/c$ .

Considero di aver misurato alla sezione  $x=0$  il segnale  $A$  dell'onda di piena, graficamente la soluzione risulta:



## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO



L'onda in questo modello non cambia la sua ampiezza, si propaga senza attenuazione, ma modifica la sua forma verso valle, allungandosi e irripidendosi.

La limitazione maggiore di questo modello è aver assunto il fenomeno come una successione locale e istantanea di condizioni di moto uniforme, trascurando l'inerzia, e il non parallelismo del pelo libero al fondo. Inoltre il modello è legato alla sola condizione iniziale, trascurando effetti di valle che si possono propagare verso monte (es. maree).

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

### Equazione parabolica dell'onda di piena

Considero le equazioni del moto vario

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = i - J$$

Rispetto al modello cinematico non faccio l'assunzione  $i=J$ , ma considero comunque che l'onda di piena sia un fenomeno lento e trascuro le variazioni nello spazio e nel tempo della velocità, il sistema diventa:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i - J$$

Considero sezione rettangolare di larghezza  $B$  e derivo la prima in  $x$  e la seconda in  $t$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial J}{\partial t}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

### OSSERVAZIONE

Considero l'equazione del moto

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i - J)$$

Faccio un'analisi dimensionale considerando una lunghezza scala  $L$  ed un tempo scala  $L/V$ ,  
Abbiamo poi detto che è un fenomeno molto lento  $Fr \ll 1$

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t}} + \boxed{V \frac{\partial V}{\partial x}} + \boxed{g \frac{\partial h}{\partial x}} = g(i - J)$$
  
$$\boxed{\frac{V}{L/V}} = \boxed{\frac{V^2}{L}} \quad \boxed{\frac{gh}{L}}$$

$$Fr^2 = \frac{V^2}{gh} \ll 1; \quad V^2 \ll gh$$

I primi due termini a sinistra dell'uguale sono trascurabili rispetto al terzo termine a sinistra dell'uguale ( $L$  lunghezza d'onda)

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Le combino eliminando la derivata mista

$$\frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial J}{\partial t}$$

La cadente J espressa con Chezy è funzione di A e Q, quindi di portata e altezza del pelo libero nel caso di sezione rettangolare

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Ma dalla equazione di continuità se considero una larghezza B

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

sostituisco

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B} \frac{\partial J}{\partial h} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial Q} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B} \frac{\frac{\partial J}{\partial h}}{\frac{\partial J}{\partial Q}} \frac{\partial Q}{\partial x} \right]$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Dalla combinazione della equazione del moto e di continuità avevo ottenuto

$$\frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial J}{\partial t}$$

Inserisco nella formulazione ottenuta per  $dJ/dt$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B} \frac{\frac{\partial J}{\partial h}}{\frac{\partial J}{\partial Q}} \frac{\partial Q}{\partial x} \right]$$

ottenendo

$$\frac{\frac{1}{B} \frac{\partial J}{\partial Q}}{\frac{\partial J}{\partial Q}} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\frac{1}{B} \frac{\partial J}{\partial h}}{\frac{\partial J}{\partial Q}} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Coeff. di diffusione
Celerità propagazione

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ho ottenuto un'equazione differenziale del secondo ordine di forma

D e c li considero come due parametri globali del problema che inglobano caratteristiche geometriche e scabrezza

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Quindi eq. 2° ordine di tipo diffusivo-advettivo, ha forma parabolica

$c$  rappresenta la celerità dell'onda cinematica, se riconsidero come avevo espresso la derivata parziale della cadente nel tempo

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B} \frac{\frac{\partial J}{\partial h}}{\frac{\partial J}{\partial Q}} \frac{\partial Q}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} \right]$$

Nel caso di onda cinematica avevamo assunto  $J=i$ , quindi non funzione del tempo e sopra si riduce a

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Ricordando che se  $dx/dt=c$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ottenendo  $\frac{dQ}{dt} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$  Descrive come un osservatore che scende lungo il corso d'acqua con velocità  $c$ , vede variare la portata

Moto uniforme  $\rightarrow$  scala delle portate  $\rightarrow$  rapporto univoco tra area sezione (ovvero tirante  $h$ ) e portate

Moto vario  $\rightarrow$  relazione tra  $h$  e  $Q$  non è più univoco, assume un **andamento a coppia** la cui larghezza dipende dalla ripidità dell'onda

Riconsidero Chezy per il moto uniforme e considero la nostra equazione del moto vario nella semplificazione adottata

$$Q = cA\sqrt{RiJ} = cA\sqrt{Ri\left(i - \frac{\partial h}{\partial x}\right)} = cA\sqrt{Ri}i\sqrt{1 - \frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{i}} = Q_0\sqrt{1 - \frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{i}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i - J$$

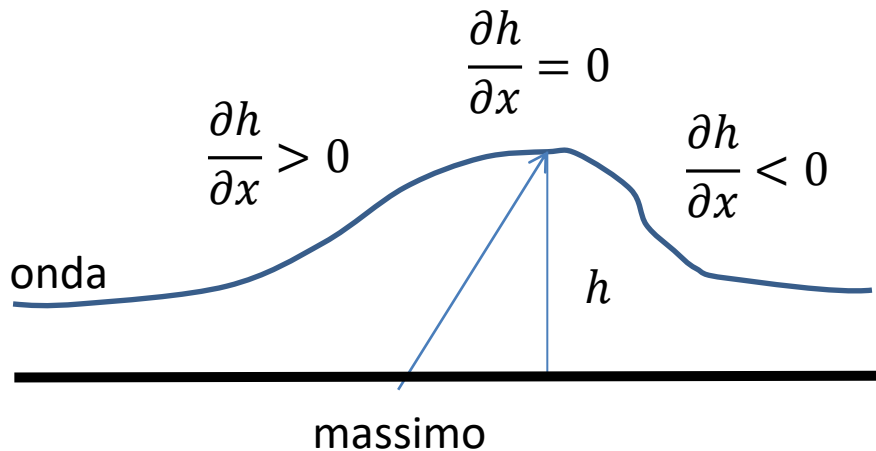
quindi

$$Q = Q_0\sqrt{1 - \frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{i}}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

$$Q = Q_0 \sqrt{1 - \frac{\partial h}{\partial x}}{i}$$

Valutiamo Q rispetto a  $Q_0$



$$\frac{\partial h}{\partial x} > 0 \rightarrow Q < Q_0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} < 0 \rightarrow Q > Q_0$$



Q cresce  
Anche  
dopo il  
max  
spaziale  
di h

Ne deriva che dove abbiamo il massimo spaziale della portata  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

si trova più a valle di quella in cui abbiamo il massimo del tirante  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Dalla eq. di continuità  $\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0$

Al massimo spaziale della portata  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

Corrisponde il massimo temporale del tirante  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$

Se considero la sezione in cui la portata raggiunge il massimo valore nel tempo  $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$

E' plausibile ipotizzare che questo massimo locale  $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$  non sia troppo

distante dalla condizione di massimo spaziale  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

quando  $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$

L'equazione parabolica diventa da:  $D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x}$  a  $\frac{D}{c} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

I valori D e c sono  $>0$ , se siamo in un intorno della condizione di massimo spaziale ( $dQ/dx=0$ ) la derivata seconda di Q in x deve essere  $<0$ , pertanto deve essere

$$\frac{\partial Q}{\partial x} < 0$$

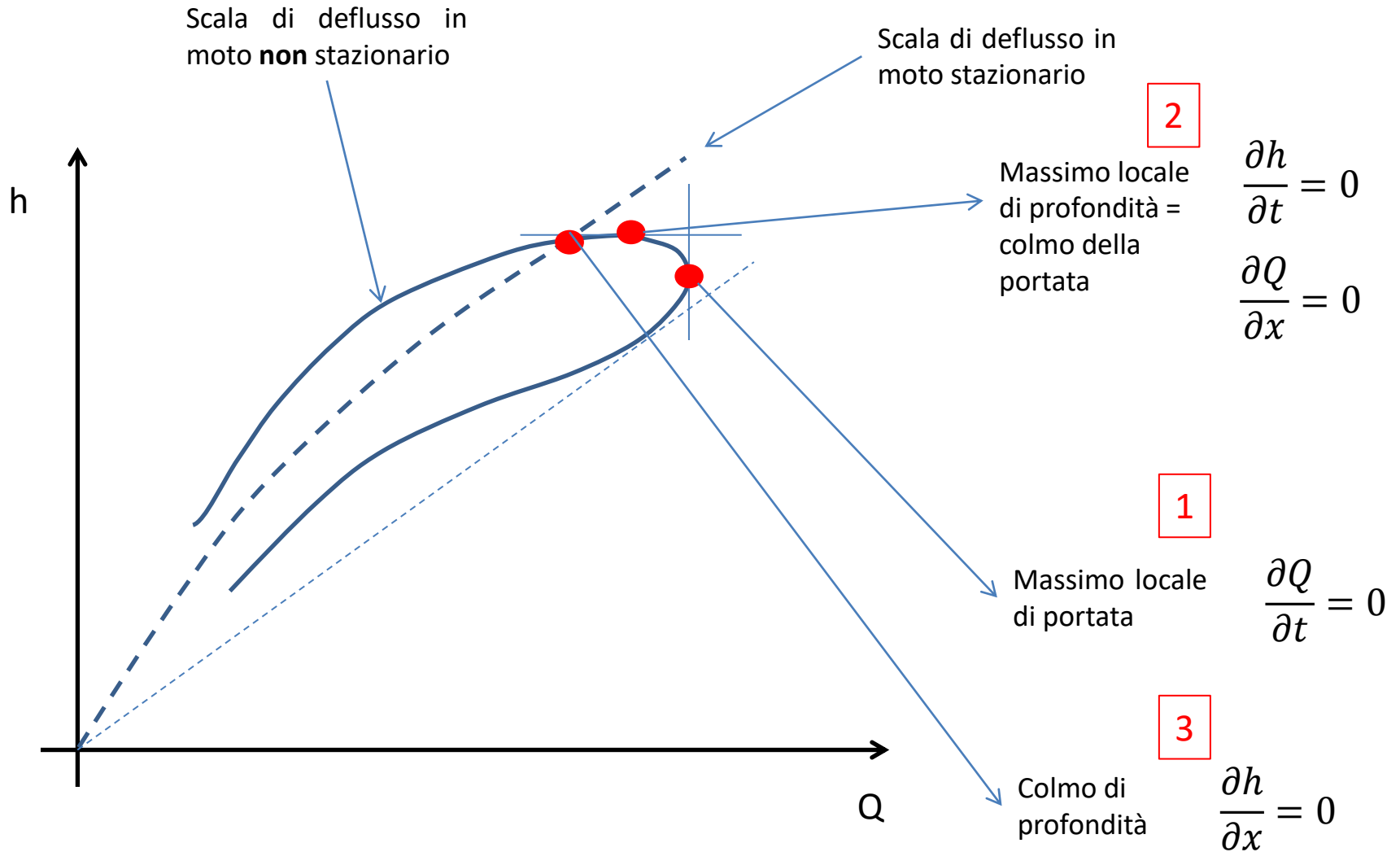
Il massimo di portata nel tempo è a valle rispetto al massimo spaziale

**Massimo locale:** valore di una grandezza cinematica (portata, velocità, profondità) in una data sezione quando si annulla la sua derivata temporale

**Colmo:** valore di una grandezza cinematica (portata, velocità, profondità) ad un istante fissato nella sezione in cui si annulla la sua derivata spaziale

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Andamento a coppia. Si percorre in senso antiorario. Siamo ad una data sezione



## CORRENTI A PELO LIBERO – CURVA (CORRENTE LENTA)

Descriviamo ora alcuni effetti bidimensionali che si possono incontrare nelle correnti a pelo libero, nello specifico l'andamento in curva per corrente lenta.

Considero di essere in corrente lenta ed in una condizione di moto irrotazionale, si avrà una altezza del pelo libero più alta all'estradosso e inferiore all'intradosso.

Posso esprimere la velocità radiale come

$$v(r) = \frac{C}{r}$$

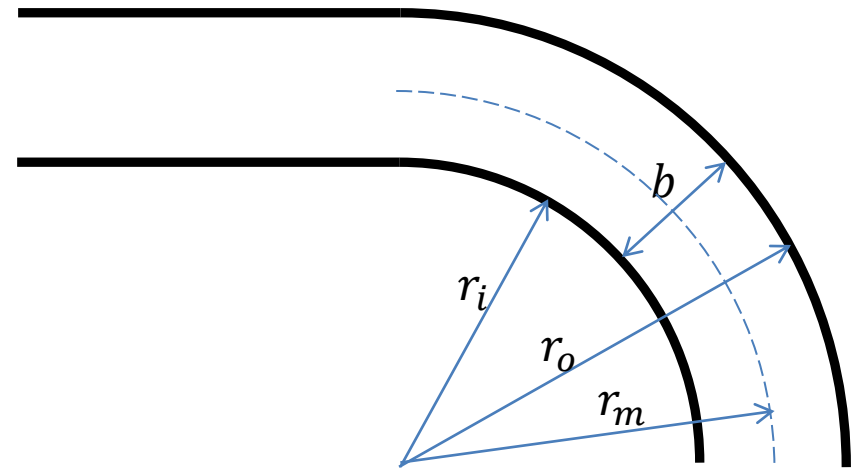
Dove C è una costante di circolazione. Per quanto riguarda l'altezza:

$$h_r = E - \frac{v(r)^2}{2g}$$

Le componenti medie le trovo integrando tra  $r_i$  e  $r_o$

$$V = \frac{1}{r_o - r_i} \int_{r_i}^{r_o} \frac{c}{r} dr = \frac{C}{r_o - r_i} \ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Vb}{\ln r_o/r_i}$$

$$h_m = \frac{1}{r_o - r_i} \int_{r_i}^{r_o} \left( E - \frac{c^2}{2gr^2} \right) dr = E - \frac{C^2}{2gr_o r_i}$$



## CORRENTI A PELO LIBERO – CURVA (CORRENTE LENTA)

Per sezione rettangolare, l'equazione del moto applicata alla normale e mediata sulla verticale

$$\frac{dh}{dr} = \frac{v(r)^2}{gr}$$

Sostituendo  $v(r)=c/r$  e integrando ottengo

$$\Delta h = \frac{V^2}{2g} \left( \frac{r_o - r_i}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} \right)^2 \left( \frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_o^2} \right) \quad \text{dove} \quad \Delta h = h_o - h_i$$

Per sezioni molto larghe dove  $r_i \ll B$  l'equazione sopra può essere approssimata a:

$$\Delta h = \frac{V^2}{g} \frac{B}{r_m}$$

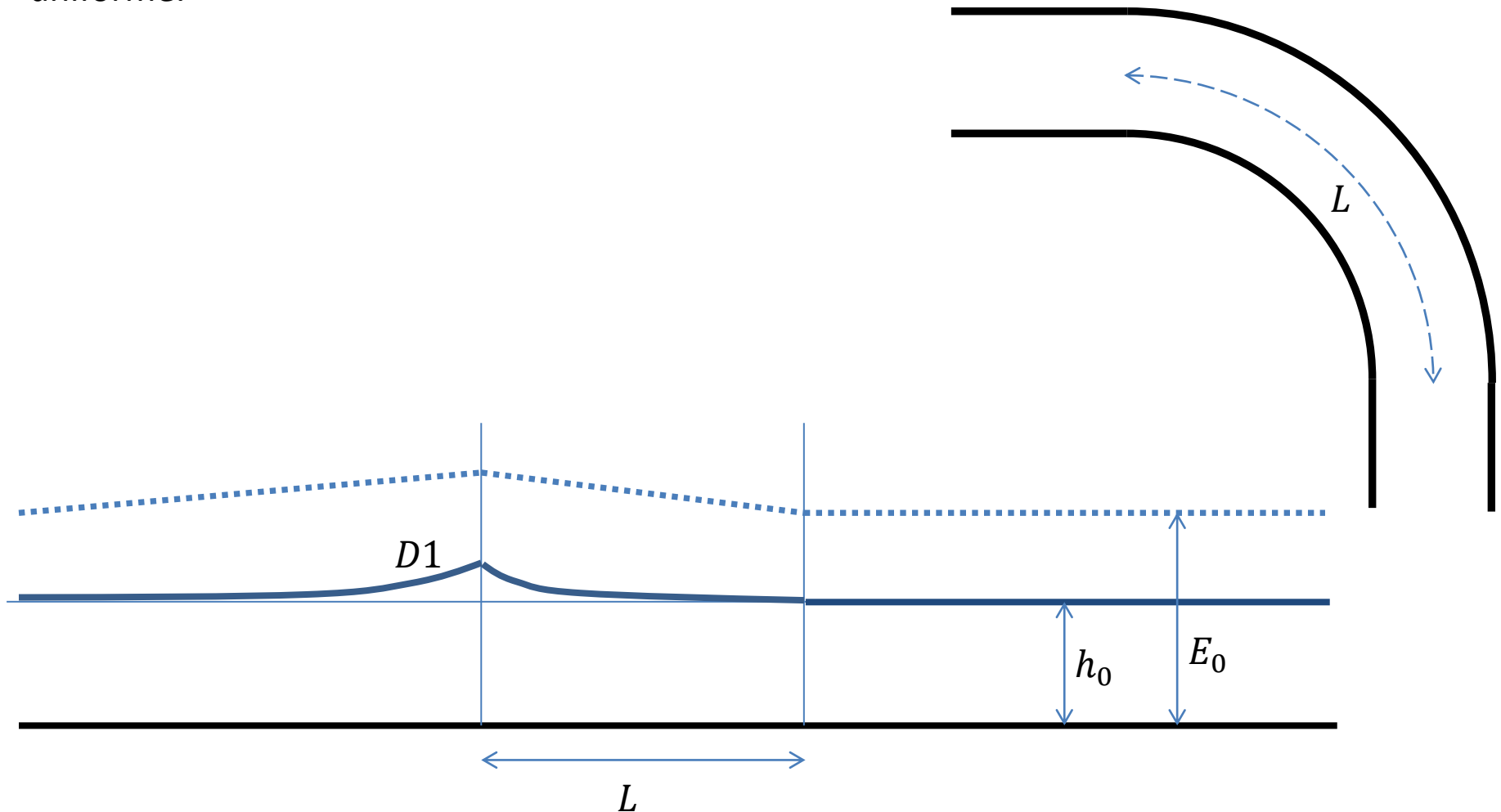
Che rispetto all'altezza di monte:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{V^2}{gh} \frac{B}{r_m} = Fr^2 \frac{B}{r_m}$$

Il sovrizzo relativo cresce in proporzione alla curvatura e per il quadrato del numero di Froude. L'equazione approssimata non si discosta di molto da quella completa per  $B/r_m < 0,5$

## CORRENTI A PELO LIBERO – CURVA (CORRENTE LENTA)

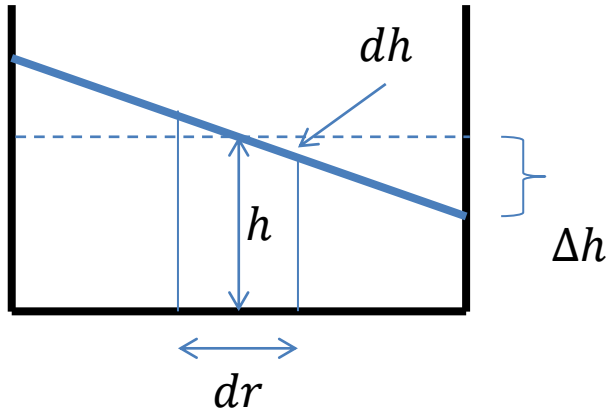
La presenza di una curva, induce una perdita di energia, se a monte e valle all'infinito siamo in condizioni di moto uniforme, a monte della curva è richiesto un aumento di energia tramite innalzamento del livello del pelo libero (corrente lenta), ciò avviene tramite un profilo D1, che porta all'infinito a monte verso una condizione di moto uniforme.





## CORRENTI A PELO LIBERO – CURVA (CORRENTE LENTA)

### OSSERVAZIONE



$$gdh = \frac{v(r)^2}{r} dr$$

La corrente è soggetta ad una forza centrifuga  $V^2/r$  dall'equazione del momento in direzione radiale, su un elementino  $dr$ , la forza centrifuga viene bilanciata dalla differenza della spinta idrostatica

$$\frac{1}{2} \rho g(h + dh) - \frac{1}{2} \rho g(h - dh) = \rho \frac{v(r)^2}{r} dr$$

Da cui 
$$\frac{dh}{dr} = \frac{v(r)^2}{gr}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – DEVIAZIONI IN CORRENTE VELOCE

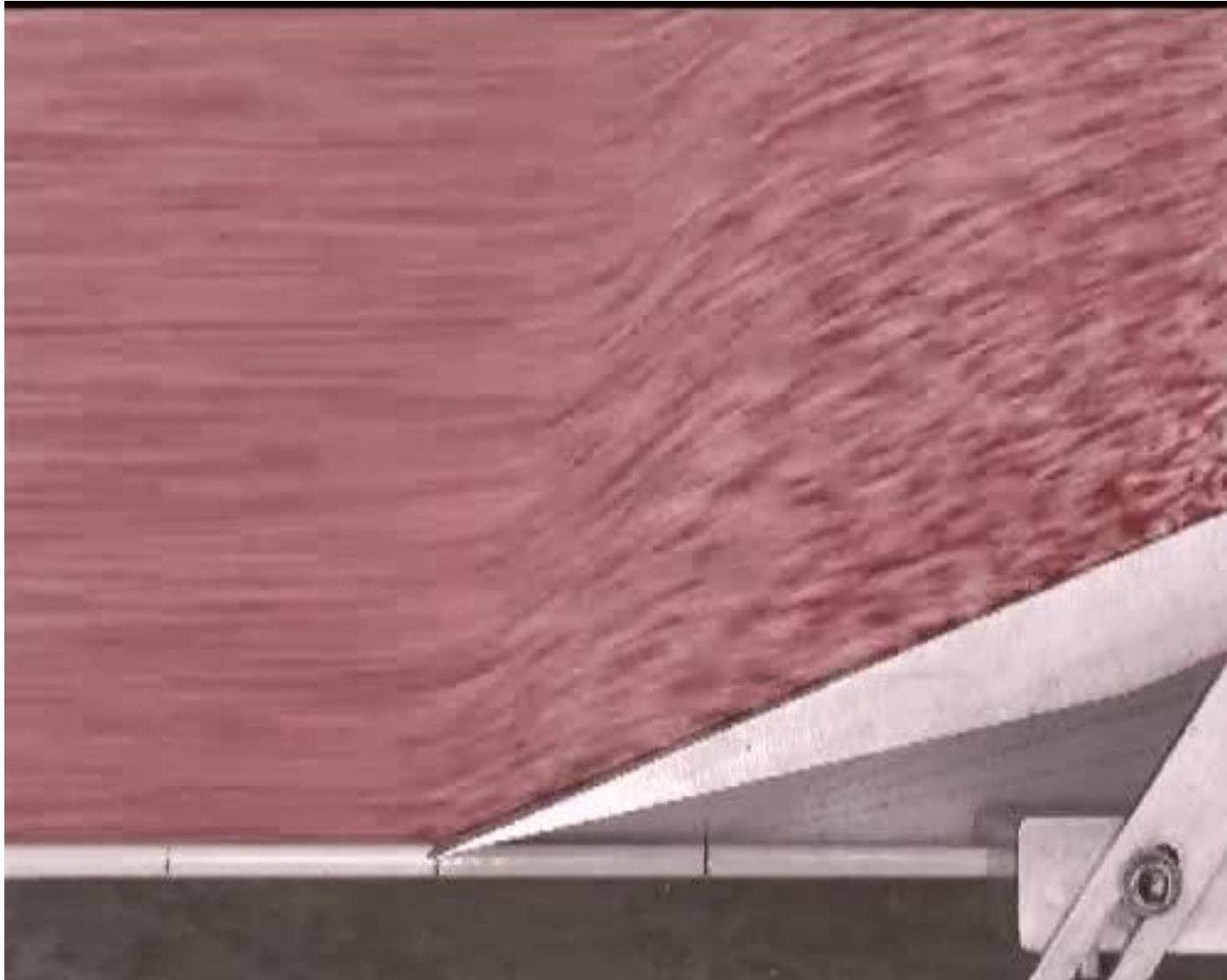
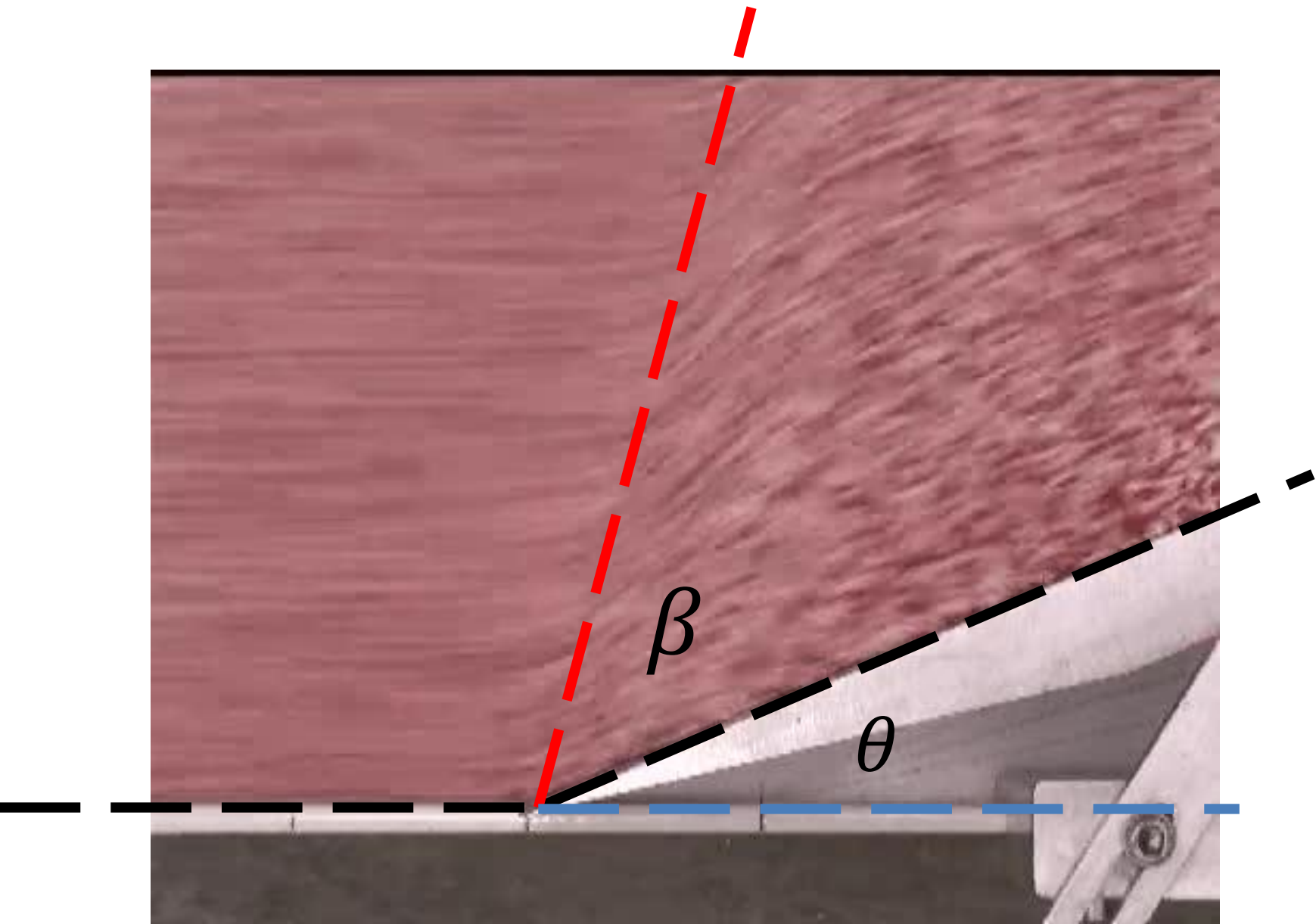


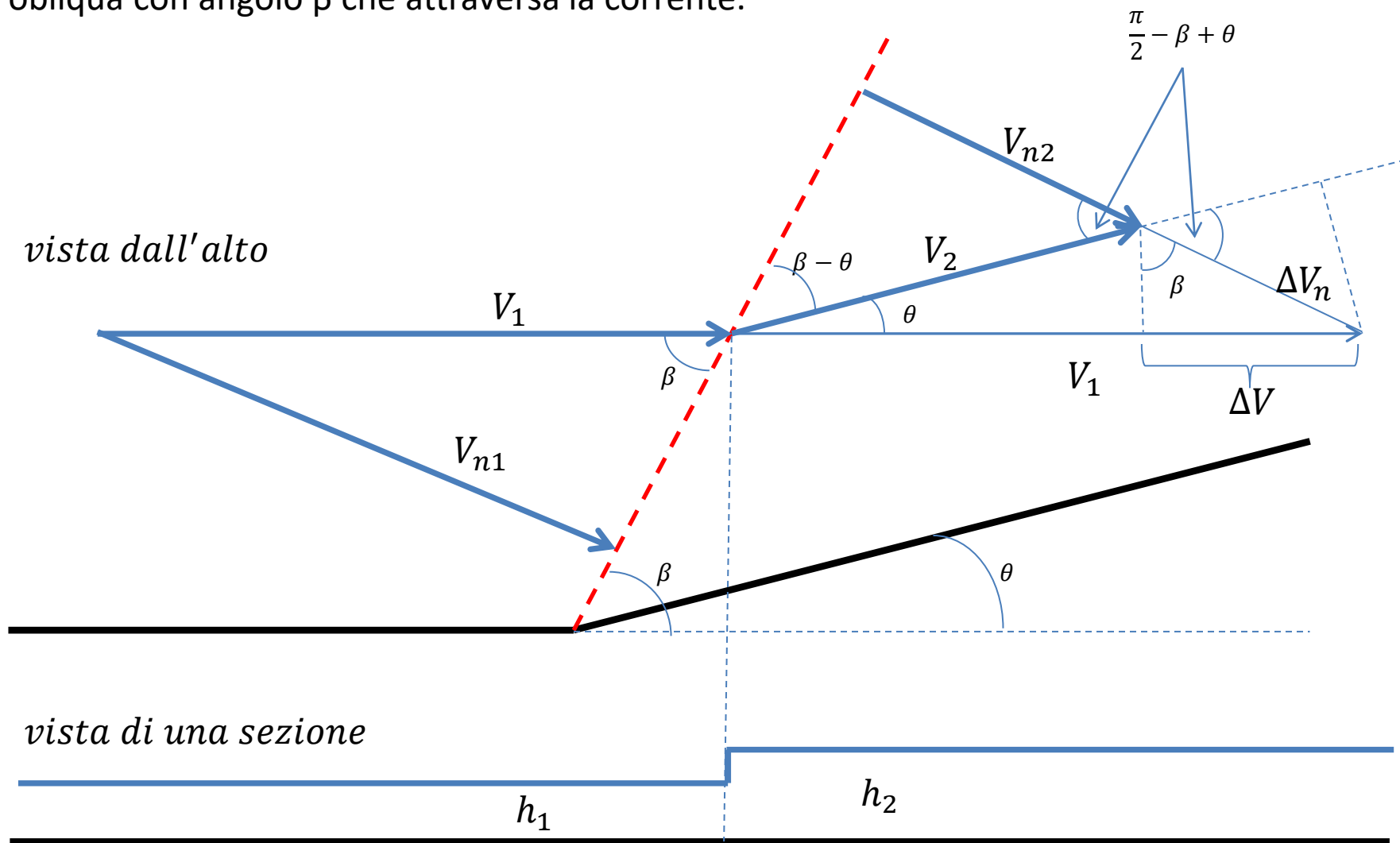
Immagine da Gray e Cui, JFM 2007

# CORRENTI A PELO LIBERO – DEVIAZIONI IN CORRENTE VELOCE



## CORRENTI A PELO LIBERO – DEVIAZIONI IN CORRENTE VELOCE

In una corrente veloce, un cambio di direzione determina una perturbazione che non può risalire la corrente, l'effetto della deviazione con angolo  $\theta$  si localizza lungo una linea obliqua con angolo  $\beta$  che attraversa la corrente.



## CORRENTI A PELO LIBERO – DEVIAZIONI IN CORRENTE VELOCE

Considero l'equazione del moto lungo l'orizzontale e in direzione normale al disturbo di angolo  $\beta$ , si riduce al bilancio delle pressioni idrostatiche ed a considerare la variazione di quantità di moto:

$$\frac{1}{2} \rho g (h_1^2 - h_2^2) = \rho q (V_{n2} - V_{n1})$$

Avendo considerato il tutto per unità di larghezza. L'equazione di continuità mi dice inoltre che:

$$h_1 V_{n1} = h_2 V_{n2}$$

Elimino nell'equazione del moto la dipendenza da  $V_{n2}$ , rapportando tutto a  $V_{n1}$  e quindi a  $V_1$  considerando che

$$V_{n2} = \frac{h_1}{h_2} V_{n1} \quad e \quad V_{n1} = V_1 \sin \beta$$

Sostituendo ottengo:

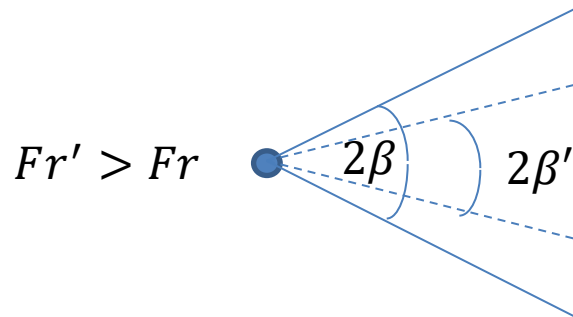
$$\sin \beta = \frac{\sqrt{gh_1}}{V_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} = \frac{1}{Fr_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – DEVIAZIONI IN CORRENTE VELOCE

Se considero una perturbazione molto piccola per cui  $h_2 \rightarrow h_1$  l'equazione di prima si riduce a:

$$\sin \beta = \frac{1}{Fr_1} \quad \beta = \sin^{-1} \left( \frac{1}{Fr_1} \right)$$

Che ci dice che tanto è maggiore  $Fr$  tanto minore sarà l'angolo  $\beta$ . Ad esempio se vediamo la nostra deviazione come una sorgente puntiforme, con deviazione da ambo i lati:



Osservando la differenza di velocità indotta dalla deviazione dal grafico di prima si ottiene

$$\Delta V_n \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta + \theta \right) = V_1 \sin(\theta)$$

$$\frac{\Delta V_n}{V_1} = \frac{\sin(\theta)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta + \theta \right)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\beta - \theta)}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – DEVIAZIONI IN CORRENTE VELOCE

Se considero una variazione infinitesima di  $\theta$ , per  $d\theta \rightarrow 0$  abbiamo

$$\sin d\theta = d\theta$$

$$\cos(\beta - d\theta) = \cos(\beta)$$

inoltre

$$dV = dV_n \sin \beta$$

Per cui

$$\frac{dV}{V d\theta} = \tan \beta$$

Ora nell'ipotesi di disturbo piccolo, riprendendo l'equazione del moto otteniamo (si vedano le osservazioni a seguire):

$$dh = \mp \frac{V^2}{g} d\theta \tan \beta$$

Dove il segno dipende dall'angolo  $\theta$  a seconda che si prenda una deviazione concava o convessa

## CORRENTI A PELO LIBERO – DEVIAZIONI IN CORRENTE VELOCE

La soluzione di questa equazione, nell'ipotesi di:

$$E = h + \frac{V^2}{2g} = \text{cost}$$

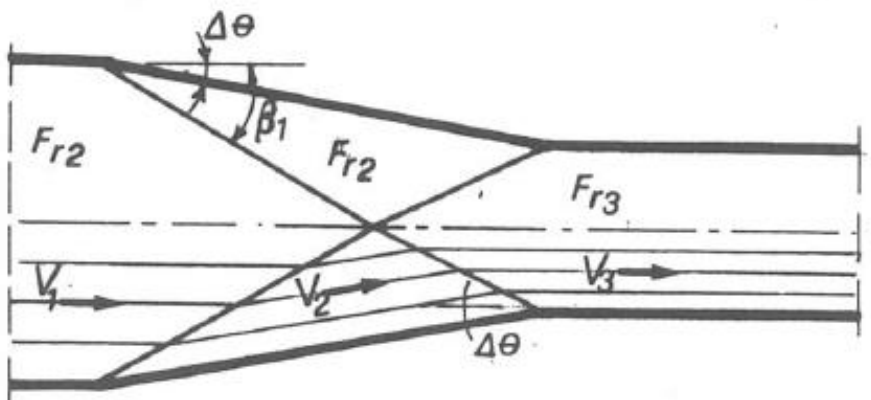
Costante da determinare tramite  $\theta=0$

È stata determinata da Von Karman (1938):

$$\theta = \sqrt{3} \sin^{-1} \sqrt{\frac{h}{2/3E}} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{h}{2(E-h)}} - \theta_0$$

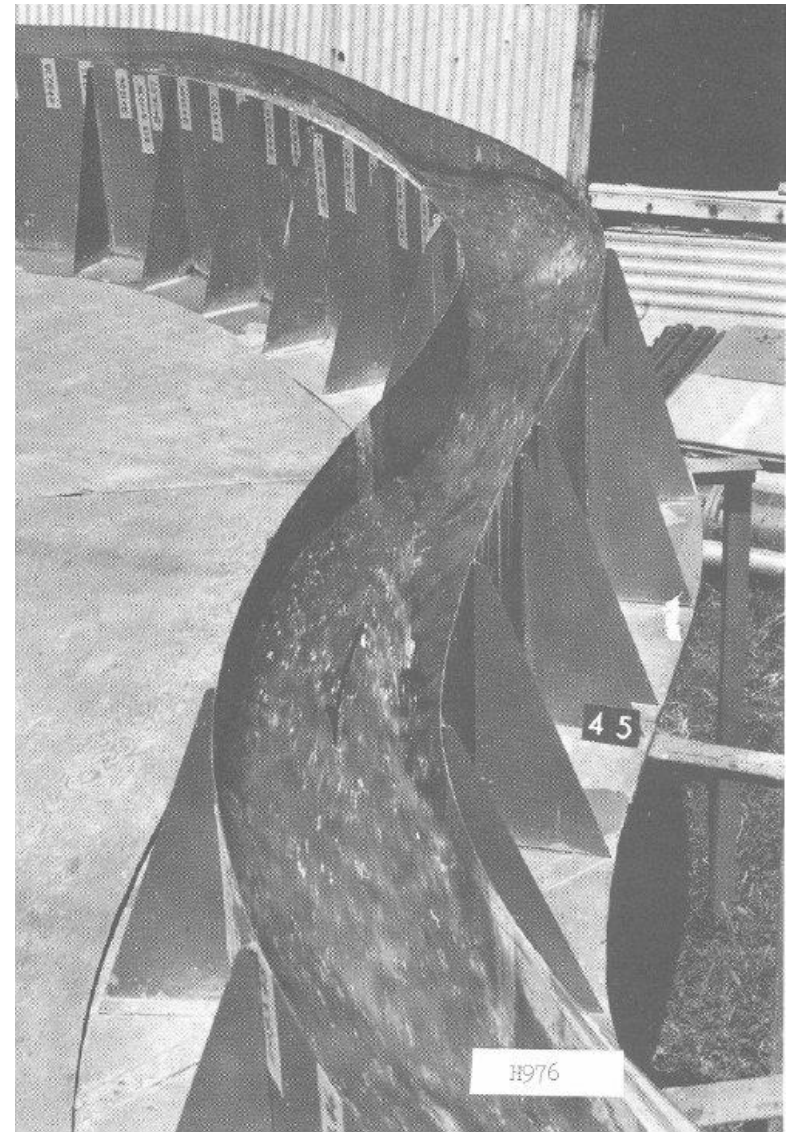
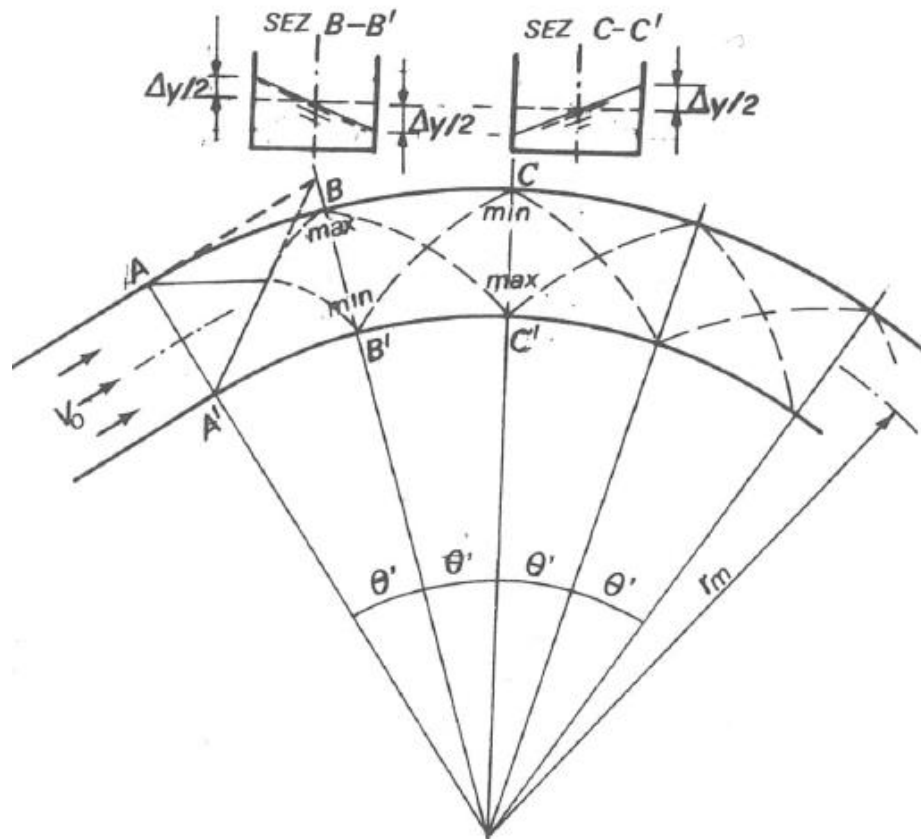
Questa soluzione permette di mettere in grafico  $h/E$  in funzione della deviazione.

In curva o restringimento, gli effetti dalle due sponde si sovrappongono e poi si riflettono sulle sponde opposte, e così via verso valle





## CORRENTI A PELO LIBERO – DEVIAZIONI IN CORRENTE VELOCE



## CORRENTI A PELO LIBERO – DEVIAZIONI IN CORRENTE VELOCE

### OSSERVAZIONE

Riprendendo l'equazione del bilancio per una piccola perturbazione:

$$\frac{1}{2} \rho g (h_1^2 - h_2^2) = \rho q (V_{n2} - V_{n1})$$

$$\frac{1}{2} g (h_1 - h_2) (h_1 + h_2) = q (-dV_n)$$

Uso notazione h e V  
per le condizioni di  
monte

$$\frac{1}{2} g (-dh) (2h + dh) = q (-dV_n)$$

Uso le relazioni  
già trovate

$$V_{n1} = V_1 \sin \beta$$

$$-\frac{1}{2} g 2h dh - \frac{1}{2} g dh^2 = h V_n (-dV_n)$$

$$\frac{dV_n}{V_1} = \frac{d\theta}{\cos(\beta)}$$

Trascuro gli  
infinitesimi di  
ordine superiore

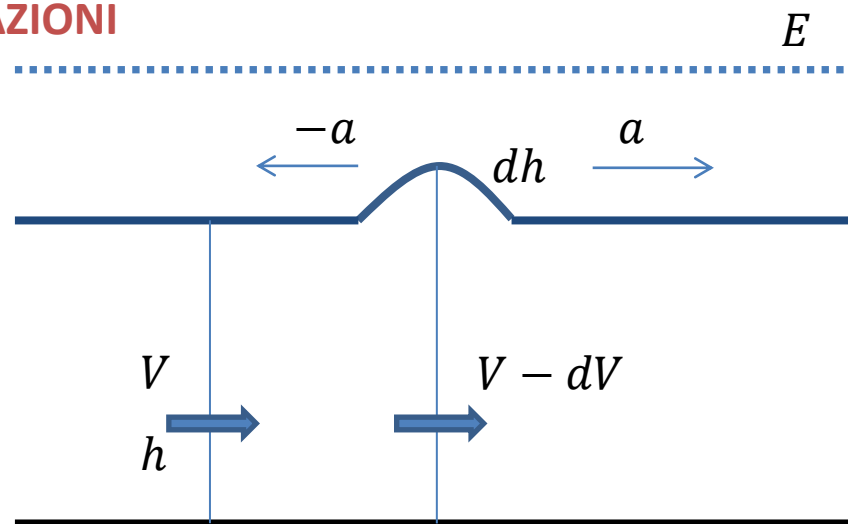
$$-\frac{1}{2} g 2h dh - \cancel{\frac{1}{2} g dh^2} = -h V \sin \beta V \frac{d\theta}{\cos \beta}$$

Ottengo:

$$dh = \frac{V^2}{g} d\theta \tan \beta$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – PICCOLE PERTURBAZIONI

Consideriamo un caso di piccola pendenza e profondità, con una piccola perturbazione del pelo libero  $dh$  che determina al suo passaggio un decremento  $dV$ . Siamo in condizioni di moto vario, ma per un osservatore solidale con l'onda siamo in condizioni stazionarie. Nel caso ci sia poca dissipazione e applico Bernoulli tra sezione di monte e solidale all'onda:



$$h + \frac{(V \mp a)^2}{2g} = h + dh + \frac{(V - dV \mp a)^2}{2g}$$

$$\frac{(V \mp a)^2}{2g} = dh + \frac{(V \mp a)^2}{2g} - \frac{2(V \mp a)dV}{2g} + \frac{dV^2}{2g}$$

Trascuro  
infinitesimi  
di ordine  
superiore

$$dh = \frac{(V \mp a)dV}{g}$$

Dall'equazione di continuità sempre per un volume solidale alla perturbazione:

$$(V \mp a)h = (V - dV \mp a)(h + dh)$$

Trascuro infinitesimi di  
ordine superiore

$$dh = \frac{dV}{V \mp a} h$$

L'uguaglianza delle due relazioni mi determina la celerità relativa dell'onda:  $V \mp a = \mp \sqrt{gh}$

e

$$dh = \frac{\mp \sqrt{gh} dV}{g}$$

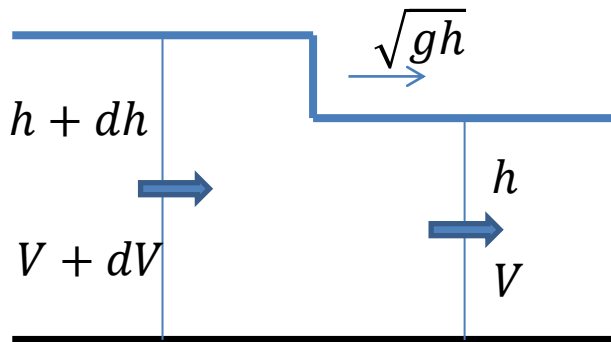
## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

La trattazione risulta valida anche per disturbi finiti. Dato uno stato iniziale  $V, h$ , posso avere onde concordi o discordi al verso della corrente (positive se inducono sovralzi, negative se inducono abbassamenti).

Onda positiva

che si propaga verso valle

(esempio onda di piena violenta)



$$dV = \frac{g}{\sqrt{gh}} dh = \sqrt{\frac{g}{h}} dh$$

$$\frac{dV}{dh} = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

integro

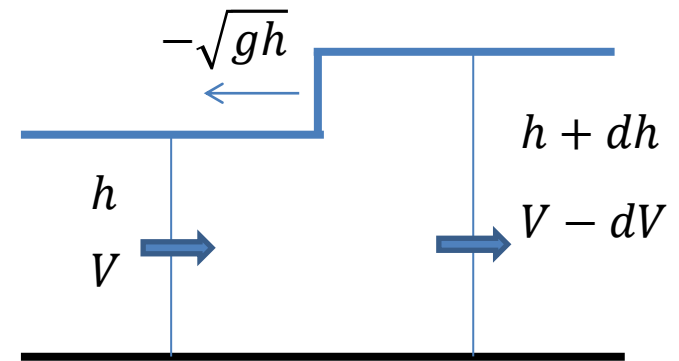
$$V = 2\sqrt{gh} + \text{costante}$$

$$V - 2\sqrt{gh} = \text{costante}$$

Onda positiva

che si propaga verso monte

(esempio onda di marea)



$$dV = -\frac{g}{\sqrt{gh}} dh = -\sqrt{\frac{g}{h}} dh$$

$$\frac{dV}{dh} = -\sqrt{\frac{g}{h}}$$

integro

$$V = -2\sqrt{gh} + \text{costante}$$

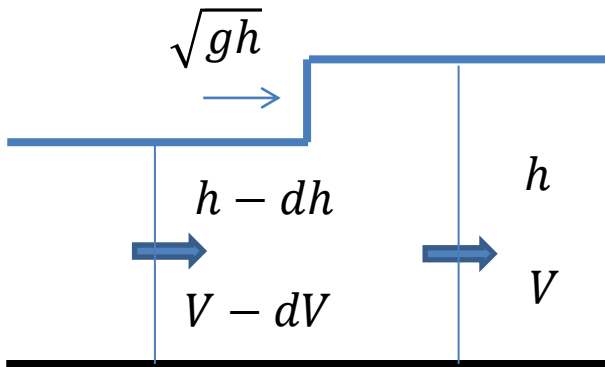
$$V + 2\sqrt{gh} = \text{costante}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Onda negativa

che si propaga verso valle

(esempio brusca riduzione da monte)



$$\frac{dV}{dh} = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

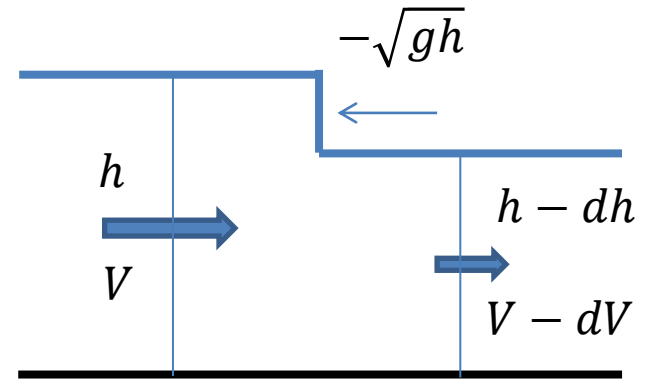
integro

$$V - 2\sqrt{gh} = \text{costante}$$

Onda negativa

che si propaga verso monte

(esempio brusca richiesta di portata a valle, tipo per impianti idroelettrici)



$$\frac{dV}{dh} = -\sqrt{\frac{g}{h}}$$

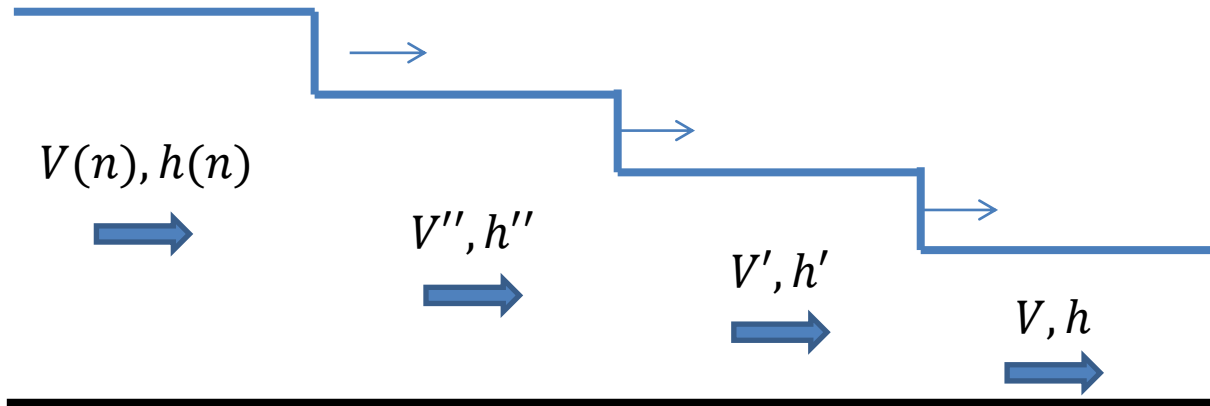
integro

$$V + 2\sqrt{gh} = \text{costante}$$

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Un'onda reale si può vedere come una sovrapposizione di onde elementari, ciascuna con velocità di propagazione relativa al preesistente livello a cui si sovrappone.

Consideriamo ad esempio un'onda positiva determinata dall'innalzamento per gradi di una paratoia posta a monte, che determini un passaggio dallo stato iniziale  $V, h$  a  $V', h'$  e così via con successive manovre.



Vale:

$$V' - 2\sqrt{gh'} = V - 2\sqrt{gh}$$

$$V'' - 2\sqrt{gh''} = V' - 2\sqrt{gh'}$$

E così a seguire

Se  $V, h$  è lo stato iniziale la prima onda avrà celerità assoluta

$$a = V + \sqrt{gh}$$

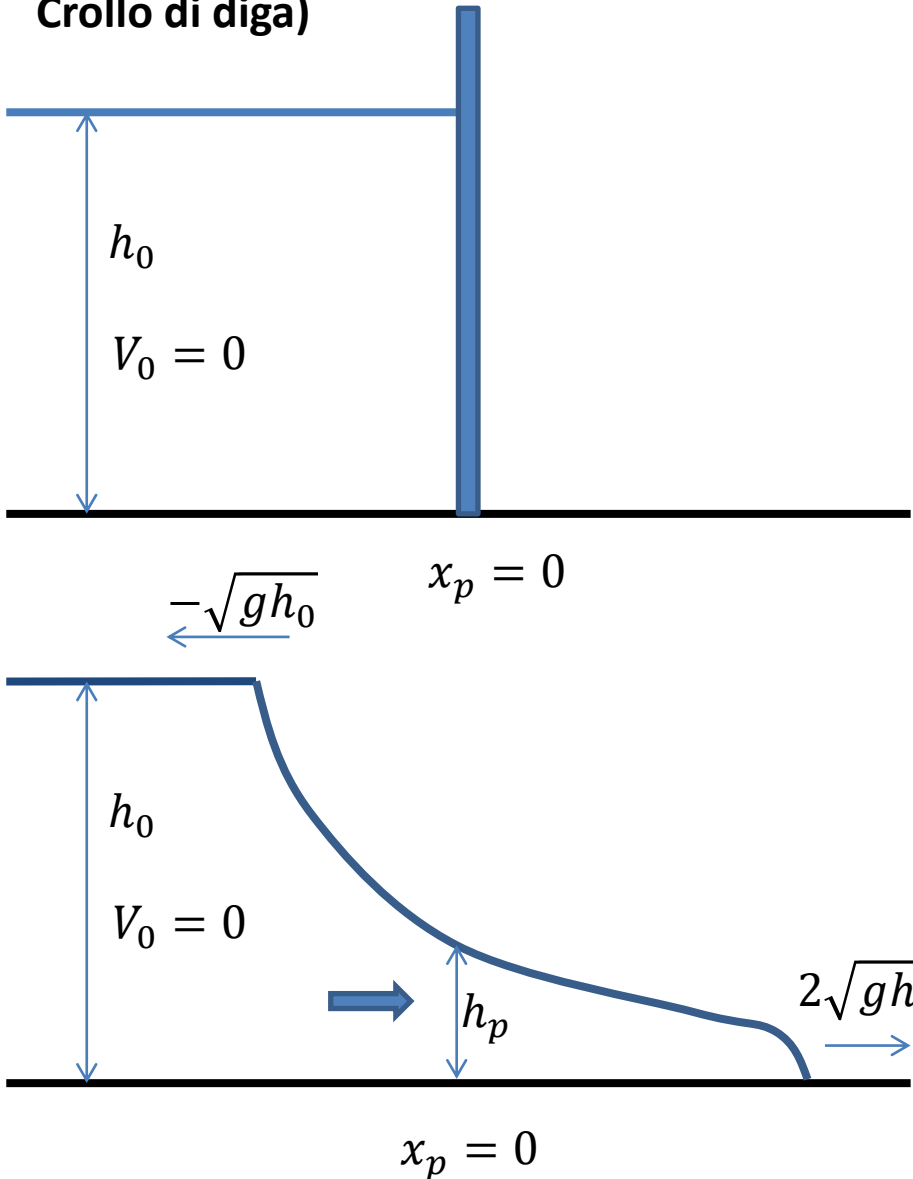
La seconda onda

$$a = V' + \sqrt{gh'}$$

E così via

## CORRENTI A PELO LIBERO – MOTO NON STAZIONARIO

Onda negativa (Brusca apertura paratoia  
Crollo di diga)



Nel caso in questione vale

$$V + 2\sqrt{gh} = V_0 + 2\sqrt{gh_0}$$

Da cui 
$$V = -2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gh_0}$$

Per la celerità 
$$a = V - \sqrt{gh}$$

sostituendo 
$$a = -3\sqrt{gh} + 2\sqrt{gh_0}$$

Verso monte e verso valle

$$h \rightarrow h_0 \quad a = -\sqrt{gh_0}$$

$$h \rightarrow 0 \quad a = 2\sqrt{gh_0}$$

Se considero nello spazio

$$\frac{x}{t} = -a; \quad x = -at$$

$$x = t(3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0})$$

Se la valuto a  $x_p=0$  significa 
$$h_p = \frac{4}{9}h_0$$

$$V_p = \frac{2}{3}\sqrt{gh_0} \quad Q_p = \frac{8}{27}h_0\sqrt{gh_0}$$