Completezza

Un campo ordinato K si dice completo se ogni sottoinsieme superiormente limitato ha estremo superiore e ogni sottoinsieme inferiormente limitato ha estremo inferiore.

Definizione Sia X un insieme totalmente ordinato. $A, B \subseteq X$ si dicono **separati** se $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ $a \leq b$.

es: $X = \mathbb{Q}$ $\quad A = \{-3, 0, \frac{1}{2}\}$ $\quad B = \{\frac{2}{3}, 4\} \cup]7, +\infty[$

A e B sono separati.

Se A e B sono separati, si dice **elemento separatore** ogni $s \in X$ tale che $\forall a \in A$ $a \leq s$ e $\forall b \in B$ $b \geq s$.

Assioma di Dedekind

Ogni coppia di insiemi separati ammette almeno un elemento separatore.

Teorema

In un campo-ordinato vale l'assioma di Dedekind $\iff$ se e solo se il campo-ordinato è completo.

Dim Supponiamo che X sia un campo-ordinato dove vale la proprietà di Dedekind.

Dimostriamo che ogni sottoinsieme superiormente limitato in X ammette sup. e ogni ... inf

Sia $K \subset X$ superiormente limitato; proviamo che esiste min $\operatorname{Mag} K$

I maggioranti

K, $\operatorname{Mag} K$ $\quad \forall h \in K \quad \forall m \in \operatorname{Mag} K$

$h \leq m$

K e $\operatorname{Mag} K$ sono separati, esiste un elemento separatore S.

Verifichiamo che $S = \sup K = \min \operatorname{Mag} K$

- $\forall b \in \operatorname{Mag} K \quad S \leq b$ vero
- $S \in \operatorname{Mag} K$, cioè $S \geq a \ \forall a \in A$ vero

Quindi $\boxed{S = \sup K}$

Dimostriamo ora l'altra implicazione:

supponiamo che ogni sottoinsieme sup. limitato ha sup e ogni....

proviamo che per ogni A, B separati esiste un elemento separatore

Siano A, B separati, cioè $a \le b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

A è sup. limitato $\left[\ B \subseteq \mathrm{Mag}\, A \ ! \ \right]$ Esiste $\sup A = s = \min \mathrm{Mag}\, A$

Verifichiamo che s è elemento separatore:

$$s \in \mathrm{Mag}\, A \qquad s \ge a \quad \forall a \in A$$

$$s \le b \quad \forall b \in B$$

$\mathbb{Q}$ non è un campo-ordinato completo

$K = \{\underline{x \in \mathbb{Q}^+} : x^2 \leq 2\}$

K è limitato (3 è maggiorante $x^2 \leq 2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \leq 3$)

Proviamo che non esiste $\sup K$.

Supponiamo esiste $s = \sup K$ $[s \in \mathbb{Q}]$

$s^2 = 2$ non può essere

supponiamo $\boxed{s^2 > 2}$; mostriamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$

Se è vero questo si ha $s - \frac{1}{n} < s$ è ancora un maggiorante di K e questo è impossibile perchè s è il minimo dei maggioranti.

[se non fosse un maggiorante esisterebbe $k \in K$ con $k > s - \frac{1}{n}$
$2 \geq k^2 > \left(s - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ assurdo]

Esiste n : $\left(s-\frac{1}{n}\right)^2 > 2$

$\Uparrow$

$s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} > 2$

$s^2 - 2 > \frac{2s}{n} - \frac{1}{n^2}$

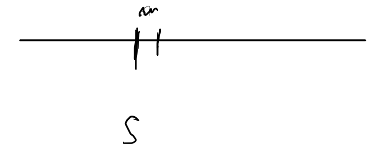
cerchiamo n tale che $s^2 - 2 > \frac{2s}{n}$

prendo n tale che $\frac{1}{n} < \frac{s^2-2}{2s}$

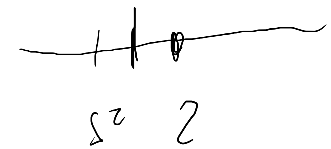
Archimede!

Supponiamo $s^2<2$

proviamo che esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $\left(s+\frac{1}{n}\right)^2<2$



Allora $s+\frac{1}{n}\in K$ $\quad s+\frac{1}{n}\le s$ impossibile!



$s^2+\frac{2s}{n}+\frac{1}{n^2}<2 \qquad 2-s^2>\frac{1}{n}\left(2s+\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n}\le 1$

$\frac{1}{n}(2s+1)\geq\frac{1}{n}\left(2s+\frac{1}{n}\right)$

se trovo n tale che $2-s^2>\frac{1}{n}(2s+1)$ allora $2-s^2>\frac{1}{n}\left(2s+\frac{1}{n}\right)$

prendo $n<\frac{2-s^2}{2s+1}$ Archimede!

Definizione Insiemi contigui

Siano A, B insiemi separati in un insieme totalmente ordinato.

A e B si dicono contigui se esistono $\sup A$, $\inf B$ e $\sup A = \inf B$.

Se X è un campo ordinato si ha la seguente caratterizzazione degli insiemi contigui

Teorema: $X = \mathbb{R}$; A e B sono insiemi contigui se e solo se vale la proprietà seguente: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, a_\varepsilon \in A, \ b_\varepsilon \in B$ tali che $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$.

Dim per casa es. 4 Foglio 4

$\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

__Teorema__ $\boxed{\mathbb{N} \text{ è illimitato in } \mathbb{R}}$

Supponiamo sia limitato superiormente. Sia $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

$s-1$ $\underbrace{\text{è un maggiorante}}$ di $\mathbb{N}$; infatti se così non fosse, esisterebbe

$\hat{n} \in \mathbb{N}$ tale che $s-1 < \hat{n}$, cioè $\underbrace{s < \hat{n}+1}_{\hat{n}+1 \in \mathbb{N}}$ assurdo $\left[s \geq n \ \forall n \in \mathbb{N} \right]$

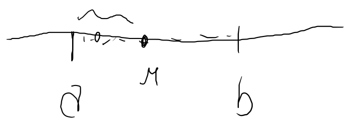
ma $s-1 < s$ non è un maggiorante.

__Conseguenze__ $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \ \exists n \in \mathbb{N}^+ : na > b.$ [Es 1 foglio 5]

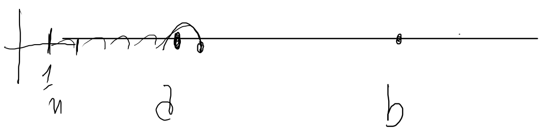
Corollario: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n \in \mathbb{N}^+ : \boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon}$

Teorema Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$. Allora esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $a<r<b$.



Dim: posso supporre $0<a<b$ $\quad [\, c<d<0 \rightarrow 0<-d<-c \,]$



$b-a>0$

Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\boxed{0<\frac{1}{n}<b-a}$

$r = p/q \qquad a < p/q < b \qquad qa < p < q \cdot b$

Sia k il primo naturale tale che $\frac{k}{n} > a$

$k = \min\{ j \in \mathbb{N} : j > n \cdot a \}$

Allora $a < \frac{k}{n}$ $\quad [\,$osservato che $\frac{k-1}{n} \leq a \,]$

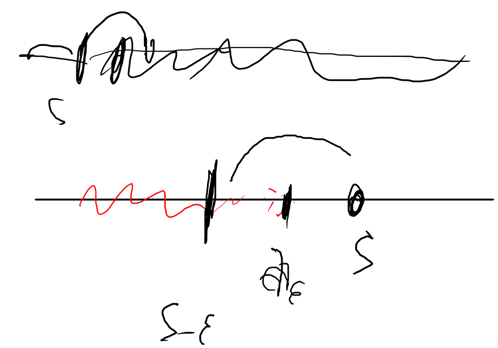
$\frac{k}{n} - \frac{1}{n} \leq a \qquad \frac{k}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b \qquad \frac{k}{n} < b$

$$\boxed{a < \frac{k}{n} < b}$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

<u>Teorema</u> (Proprietà caratteristiche di sup e inf in $\mathbb{R}$)

$A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato; si ha $s = \sup A$ se e solo se s soddisfa le due proprietà seguenti



1) $\forall a \in A \quad a \leq s$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a_\varepsilon \in A$ tale che $a_\varepsilon > s - \varepsilon$

$A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato; $s = \inf A$ se e solo se valgono

1) $\forall a \in A \quad a \geq s$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a_\varepsilon \in A$ tale che $a_\varepsilon < s + \varepsilon$

Dim

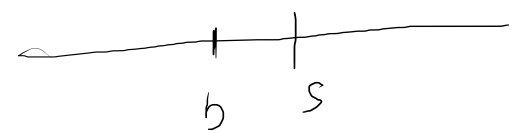
Sia $s = \sup A = \min \mathrm{Mag}\, A$ quindi $s \geq a \quad \forall a \in A$

fissato $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ non è un maggiorante di A, quindi esiste $a_\varepsilon \in A$ tale che $a_\varepsilon > s - \varepsilon$

Viceversa

Sia s che soddisfa 1) e 2) dimostriamo che $s = \sup A = \min \mathrm{Mag}\, A$

1) $s \geq a \quad \forall a \in A \Rightarrow s \in \mathrm{Mag}\, A$



Sia $b \in \mathrm{Mag}\, A$ supponiamo $b < s$ $\quad \underbrace{s-b}_{\varepsilon} > 0$

$\exists\, a_\varepsilon \in A \quad a_\varepsilon > s - \varepsilon = s - (s-b) = b$ assurdo.

Quindi $b \geq s$ e s è il minimo.

$\mathbb{N}$

Assiomi di Peano per $\mathbb{N}$

1) $\exists$ un elemento $0 \in \mathbb{N}$

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\exists$ un elemento m tale che $n < m$

e $\forall\, k > n$ si ha $m \leq k$.

[m si indica con $n+1$ e si chiama il successore o successivo di n]

3) Principio di induzione.

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $0 \in A$ e inoltre

per ogni $n \in A$ si ha $n+1 \in A$.

Allora $A = \mathbb{N}$.