

**CORSO DI GEOMETRIA
PRIMO FOGLIO DI ESERCIZI
26 SETTEMBRE 2021
PROF. VALENTINA BEORCHIA**

(1) Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Si dimostrino, usando gli assiomi di spazio vettoriale $V1, V2, \dots, V8$, le seguenti proprietà:

(a) per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

dove $0 \in \mathbb{K}$ indica l'elemento neutro rispetto alla somma in \mathbb{K} , e $\mathbf{0} \in V$ indica il vettore nullo, cioè l'elemento neutro rispetto alla somma in V .

(b) per ogni $t \in \mathbb{K}$ si ha

$$t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(c) In V esiste un unico vettore nullo.

(d) Ogni vettore \mathbf{v} ha un unico opposto.

(e) Per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v},$$

dove $1 \in \mathbb{K}$ denota l'elemento neutro per il prodotto in \mathbb{K} , -1 il suo opposto e $-\mathbf{v}$ l'opposto di \mathbf{v} .

(2) Si scrivano la tabella per la moltiplicazione in \mathbb{Z}_{12} , e si individuino gli elementi non invertibili di \mathbb{Z}_{12} .

(3) Si dica quanti elementi ha lo spazio vettoriale \mathbb{Z}_3^n .