Leione 24 settembre

venerdì 24 settembre 2021 11:14

$\mathcal{V}^2$, $\mathcal{V}^3$ vettori liberi

visto: def. di $\mathbb{R}$- spazio vettoriale: generalizza i vettori liberi

Possiamo generalizzare anche l'insieme degli scalari $\mathbb{R}$

Idea: cons. le operazioni interne $+$ e $\cdot$ in $\mathbb{R}$ analizziamo le loro proprietà algebriche e le prendiamo come assioni per la seguente definiz.:

Def.: Un insieme non vuoto $\mathbb{K}$ con due operazioni interne somma e prodotto:

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

si dice CAMPO se sono soddisfatti i seguenti:

(K1) COMMUTATIVITÀ di $+$ e di $\cdot$

$$a+b=b+a, \qquad a\cdot b = b\cdot a$$

(K2) ASSOCIATIVITÀ: di $+$ e di $\cdot$:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

(K3) ESISTENZA DI ELEM. NEUTRI: per $+$ e $\cdot$

$\exists$ elemento, che indicheremo con $0 \in \mathbb{K}$, t.c.

$\forall a \in \mathbb{K}$, $a+0=0+a=a$, inoltre

$\exists$ elemento, che chiameremo $1 \in \mathbb{K}$, t.c.

$\forall a \in \mathbb{K}$, $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$

(K4) ESISTENZA DELL'OPPOSTO E INVERSO:

$$\forall a \in \mathbb{K},\ \exists\, -a : a+(-a)=0=(-a)+a$$

$$\forall a \in \mathbb{K}\setminus\{0\} = \mathbb{K}^*,\ \exists\, a^{-1} : a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$$

(K5) DISTRIBUTIVITÀ DI $\cdot$ RISP. $+$:

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

Esempi: ① $\mathbb{R}$ è un campo

② $\mathbb{Q}$ insieme dei razionali è un campo

③ $\mathbb{Z}$ insieme degli interi : NON è un campo, mancano inversi (in $\mathbb{Z}$ sono invertibili solo 1 e -1)

④ $\mathbb{N}$ insieme dei naturali : NON è un campo, mancano opposti e inversi

Def. Uno SPAZIO VETTORIALE su un campo $\mathbb{K}$ o $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE è un insieme non vuoto V tale che valgano (V1), ..., (V8) con $\mathbb{K}$ al posto di $\mathbb{R}$.

ALTRI ESEMPI DI CAMPI : CAMPI FINITI

① Campo con 1 elemento: $\mathbb{K} = \{*\}$

$$* + * = *$$

$$* \cdot * = *$$

verifichiamo (K1), ..., (K5)

$\{*\}$ si chiama CAMPO BANALE o NULLO

=($\{0\}$

neutro per +

② Campo con 2 elementi: $K = \{0, 1\}$

neutro per ·

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

se fosse $1\cdot 1=0$, allora 1 non sarebbe invertibile

perché se fosse $1+1=1$, si avrebbe che 1 è un altro neutro per +

OSS.: In ogni campo vale che $0\cdot a = 0 \quad \forall a \in K$

Infatti: $0\cdot a = (0+0)\cdot a = 0\cdot a + 0\cdot a$

$$\underbrace{-0\cdot a + 0 a}_{0} = \underbrace{-0\cdot a + 0\cdot a}_{0} + 0\cdot a$$

$$0 = 0\cdot a$$

Esistenza degli opposti: $-0 = 0$, $-1 = 1$

inversi: $1^{-1} = 1$

Esercizio: verificare che è un CAMPO

Il campo con due elementi si indica con $\mathbb{Z}_2$.

neutro per +

③ Campo con 3 elementi: $K = \{0, 1, 2\}$

neutro per ·

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$2+1 = 1$ NO

perché 2 neutro per +

$2+1=2$ NO, perché 1 neutro per +

$\boxed{2+1=0}$ $\Longrightarrow$ 1 è l'opposto di 2
$(-2=1)$

2 è l'opposto di 1
$(-1=2)$

$1+1=0$ NO, perché allora anche 1 sarebbe opposto di 1, ma 2 è l'opposto di 1

OSS. In ogni campo, $\forall a \in \mathbb{K}$, l'elemento opposto $-a$ è unico

$1+1=1$ NO, perché 1 sarebbe neutro

$\Longrightarrow 1+1=2$

$$2+2=\begin{cases} 0 & \text{NO, perché altrimenti 2 sarebbe opposto di 2} \\ 2 & \text{NO, perché altrimenti 2 sarebbe neutro per +} \\ 1 & \text{SÌ} \end{cases}$$

Esercizio: sono verificati 5 assiomi, è un campo e si indica con $\mathbb{Z}_3$

OSS.: le operazioni + e · in $\mathbb{Z}_2$ e in $\mathbb{Z}_3$ possono essere ottenute nel modo seguente:

pensiamo a, b di $\mathbb{Z}_2$ o $\mathbb{Z}_3$ come elementi di $\mathbb{Z}$,

li sommiamo o moltiplichiamo in $\mathbb{Z}$, facciamo la divisione per 2 o per 3 e ne consideriamo il resto.

Def. Sia $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Definiamo + e · nel modo seguente:

$a, b \in \mathbb{Z}_n$, $a + b :=$ resto nella divisione per n di $a +_{\mathbb{Z}} b$ (somma in $\mathbb{Z}$)

$a \cdot b :=$ resto nella divisione per n di $a \cdot_{\mathbb{Z}} b$ (prodotto in $\mathbb{Z}$)

es. $n = 4$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

OSSERVO che 2 non è invertibile

$\Rightarrow \mathbb{Z}_4$ NON è un campo

Es.: $\mathbb{Z}_5$ scrivere le 2 tabelline

Teorema: $\mathbb{Z}_n$ è un campo $\Leftrightarrow$ n è un numero primo.

Esempi di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali:

① $\mathbb{K}$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

② $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ insieme delle coppie ordinate di elementi di $\mathbb{K}$

es. $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{K}^2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ è uno spazio vettoriale con 4 vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{K}^3 = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$

$\vdots$

$\mathbb{K}^n$ = n-uple di elementi di $\mathbb{K}$; è $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

es.: $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{K}^n = (\mathbb{Z}_2)^n$ = n-uple di 0 o 1

In $\mathbb{K}^n$ le operazioni si definiscono così:

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot x_2 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix}$$