Lezione 21 settembre 2021

martedì 21 settembre 2021 10:19

GEOMETRIA EUCLIDEA:

EUCLIDE (4. - 3 sec. a.C)

fondata: • elementi primitivi: PUNTO, RETTA E PIANO

• 5 ASSIOMI (o POSTULATI):

① per 2 punti qualsiasi passa una e una sola retta

② si può prolungare un segmento indefinitamente oltre i due punti

③ dato 1 punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio con il punto come centro e raggio la lunghezza data.

④ Tutti gli angoli retti sono congruenti

⑤ Data una retta e un punto fuori dalla retta, $\exists !$ retta parallela alla retta data e passante per il punto.

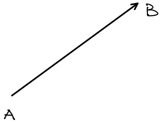
Usando la geometria euclidea è possibile introdurre le nozioni di VETTORE APPLICATO e VETTORE LIBERO.

Def: Cons. un piano o lo spazio "fisico". Un VETTORE APPLICATO è una coppia ordinata di punti:

- un PUNTO INIZIALE A, anche PUNTO DI APPLICAZIONE, e un punto finale B, e si indica

$$\overrightarrow{AB}$$

si usa disegnare $\overrightarrow{AB}$ con un segmento orientato

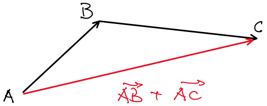


Oss. che ci sono vettori del tipo $\overrightarrow{AA}$, detti VETTORI NULLI

DEF.: La SOMMA DI 2 VETT. APPLICATI

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ è:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}:=\overrightarrow{AC}$$



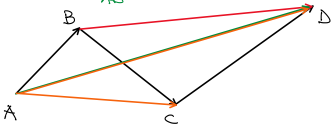
oss. I vettori nulli del tipo $\overrightarrow{AA}$ e $\overrightarrow{BB}$ verificano:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$$

oss. Queste somme è ASSOCIATIVA:

$$\underbrace{\overrightarrow{AB}+\underbrace{(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})}_{\overrightarrow{BD}}}_{\overrightarrow{AD}}=\underbrace{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})}_{\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{CD}$$

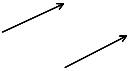


Ricordiamo anche che è definita la MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE APPLICATO PER UN NUMERO REALE $a \in \mathbb{R}$ qualunque

$a \cdot \vec{AB}$ = il vettore che ha stessa direzione di $\vec{AB}$, verso concorde se $a > 0$ e discorde se $a < 0$, lunghezza $= |a| \cdot$ lunghezza $(\vec{AB})$

se $a = 0$, poniamo $0 \cdot \vec{AB} = \vec{AA}$ vettore nullo

Def.: Due vettori applicati si dicono EQUIPOLLENTI se hanno la stessa direzione, stesso verso e la stessa lunghezza.



È facile verificare che la relazione di equipollenza è una RELAZIONE DI EQUIVALENZA (verifica RIFLESSIVA, SIMMETRICA e TRANSITIVA)

Una CLASSE DI EQUIPOLLENZA si chiama VETTORE LIBERO o VETT. GEOMETRICO

Notazione: $[\vec{AB}] = \vec{v}$

La classe $[\vec{AA}]$ contiene tutti i vettori con punto iniziale e finale coincidenti, e verrà chiamata VETTORE NULLO:

$$[\vec{AA}] =: \vec{0}$$

OSS.: Usando il 5° postulato di Euclide, si può dimostrare che $\forall$ punto P del piano o dello spazio, ogni vettore libero $\vec{v}$ non nullo è rappresentato da UN UNICO VETTORE APPLICATO del tipo

$$\vec{v} = [\overrightarrow{PQ}]$$

Questa ci permette di definire la SOMMA di vettori liberi:

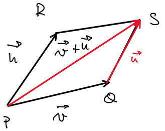
DEF.: Dati due vettori liberi $\vec{v}$ e $\vec{u}$, la somma

$$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}] \quad , \quad \vec{u} = [\overrightarrow{BC}]$$

$$\vec{v} + \vec{u} := [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$$

OSS. Si può verificare che la definizione è BEN POSTA, cioè NON DIPENDE dalla scelta del rappresentante.

OSS.: Se $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sono vettori non nulli e non allineati, la somma si può def. anche con la REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA:



$$\vec{u} = [\overrightarrow{PR}] = [\overrightarrow{QS}]$$

Le proprietà algebriche di + saranno di ispirazione per la def. generale di SPAZIO VETTORIALE.

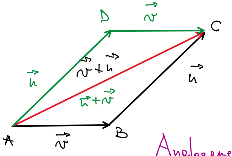
PROPRIETÀ DI + :

- ASSOCIATIVA : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{u})$

- COMMUTATIVA : ∀ coppie di vettori liberi $\vec{v}$ e $\vec{u}$ si ha :

$$\vec{v}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{v}$$

$\vec{v}=[\overrightarrow{AB}]$, $\vec{u}=[\overrightarrow{BC}]$



osserviamo che $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AD}$ sono equipollenti, quindi $\overrightarrow{AD}$ è un altro rappresentante di $\vec{u}$

Analogamente, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ sono equipollenti, e rappresentano entrambi $\vec{v}$.

$\vec{u}=[\overrightarrow{AD}]$, $\vec{v}=[\overrightarrow{DC}]$

- Esistenza del vettore nullo : $\vec{0}$

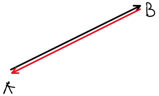
∀ $\vec{v}$ libero, posso cons.

$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$$

- Esistenza del vettore opposto : ∀ $\vec{v}$ libero, ∃ un vettore che indicheremo con $-\vec{v}$, detto VETTORE OPPOSTO t.c.

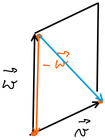
$$\vec{v}+(-\vec{v})=(-\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}$$

infatti : se $\vec{v}=[\overrightarrow{AB}]$, si ha $-\vec{v}=[\overrightarrow{BA}]$



$$\vec{v}+(-\vec{v})=[\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{BA}]=[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}]=[\overrightarrow{AA}]=\vec{0}$$

In seguito scriveremo $\vec{v}-\vec{w}$, invece di $\vec{v}+(-\vec{w})$:



$$\boxed{\vec{v} + (-\vec{w}) =: \vec{v} - \vec{w}}$$

Vediamo ora che anche l'operazione di MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE in $\mathbb{R}$ è ereditata dai vettori liberi:

Def.: $\forall\ \vec{v} = [\vec{AB}]$ e $\forall\ a \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\boxed{a \cdot \vec{v} := [a \cdot \vec{AB}]}$$

Anche in questo caso, la def. NON dipende dal rappresentante scelto.

PROPRIETÀ: $\forall\ \vec{v}, \vec{w}$ e $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ si ha:

- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
- $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$
- $(a+b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$;

$$(ab) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$$

$$a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$$

Nota. L'insieme dei vettori liberi del piano verrà indicato con $\mathcal{V}^2$, e ins. vett. liberi dello spazio con $\mathcal{V}^3$.