Lezione 23 settembre 2021

giovedì 23 settembre 2021 11:05

SPAZI VETTORIALI REALI

Def. Uno SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{R}$, o anche $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE è un insieme V con $V \neq \emptyset$, in cui sono definite 2 operazioni:

una SOMMA : $+$

(in generale $f : A \longrightarrow B$ è una applicazione)

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \text{(operazione interna)}$$
$$(v, u) \longrightarrow v + u$$

ricordo, $V \times V$ è il PRODOTTO CARTESIANO di V per se stesso, e i suoi elementi sono coppie ordinate (v, u):

$$V \times V := \{ (v, u) : v \in V, u \in V \}$$

e una MOLTIPLICAZIONE PER SCALARI :

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \qquad \text{(operazione esterna)}$$
$$(a, v) \longrightarrow a \cdot v$$

prodotto cartesiano

$$\mathbb{R} \times V := \{ (a, v) : a \in \mathbb{R}, v \in V \}$$

in modo che siano soddisfatti i seguenti 8 assiomi, per ogni $u, v, w \in V$, e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$:

V1 PROPR. ASSOCIATIVA DI $+$

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

V2 PROPR. COMMUTATIVA DI $+$:

$$u + v = v + u$$

V3 ESISTENZA DEL VETTORE NULLO:

$\exists \; 0 \in V$ tale che

$$0 + v = v + 0 = v$$

V4 ESISTENZA DEL VETTORE OPPOSTO:

$\forall \, v \in V$, $\exists$ vettore $-v \in V$ tale che

$$v+(-v) = (-v)+v = 0$$

ⓥ5 DISTRIBUTIVITÀ DI $\cdot$ RISPETTO A $+$:

$$a\cdot(v+u) = a\cdot v + a\cdot u$$

ⓥ6 DISTRIBUT. DI $\cdot$ RISPETTO ALLA SOMMA in $\mathbb{R}$:

$$(a \underset{\substack{\downarrow\\ \text{somma in } \mathbb{R}}}{+_{\mathbb{R}}} b)\cdot v = a\cdot v \underset{\substack{\downarrow\\ \text{somma in } V}}{+_{V}} b\cdot v$$

ⓥ7 "ASSOCIATIVITÀ" DI $\cdot$:

$$(\underbrace{ab}_{\text{prodotto di 2 numeri reali}})\overset{\text{moltiplicazione scalare per vettore}}{\cdot} v = a\cdot(b\cdot v)$$

ⓥ8 $\forall\, v\in V$, vale

$$1\cdot v = v$$

Infine, gli elementi di V si diranno VETTORI.

Esempi:

① Gli insiemi $\mathcal{V}^2$ di vettori liberi del piano e $\mathcal{V}^3$, vettori liberi dello spazio, sono $\mathbb{R}$-spazi vettori.

② Cons. $\mathbb{R} = V$ è $\mathbb{R}$-sp. vettoriale?

sì: sono definite $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

e $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}\times V \longrightarrow V)$

verifichiamo ⓥ1, ..., ⓥ8

③ Cons. $V = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1\in\mathbb{R},\ x_2\in\mathbb{R}\}$$

vediamo che è $\mathbb{R}$-sp. vettoriale, e per non confonderlo con altre strutture che si possono dare a $\mathbb{R}^2$, indicheremo i suoi elementi:

invece (x_1, x_2), scriveremo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

operazioni $+ : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$

$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $a\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\,x_1 \\ a\,x_2 \end{pmatrix}$

verificano (V1), ..., (V8)

(V3) : vettore nullo $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

(V4) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, l'opposto è $\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}$

④ $V=\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$:= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} : x_1\in\mathbb{R},\ x_2\in\mathbb{R},\ x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

è insieme delle terne ordinate di numeri reali

Definiamo + : $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}$

$\cdot$: $a\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}a x_1\\a x_2\\a x_3\end{pmatrix}$

Queste due operaz. verificano (V1), ..., (V8)

in particolare: vettore nullo $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

e dato $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, l'opposto è $\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_3\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ anche $\mathbb{R}^3$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

⑤ $V=\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} : x_i\in\mathbb{R},\ \forall i\right\}$

$n\in\mathbb{N}$

gli elementi di $\mathbb{R}^n$ sono n-UPLE (cioè stringhe di lunghezza n) ordinate

Possiamo definire + : $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$

$\cdot$: $a\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}a x_1\\a x_2\\\vdots\\a x_n\end{pmatrix}$

verificano (V1), ..., (V8)

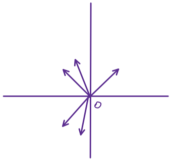
vettore nullo $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, l'opposto di $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\\vdots\\-x_n\end{pmatrix}$

Esempi di insiemi che NON sono spazi vettoriali:

$\mathbb{R}_+ := \{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\}$

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \right\}$ non è sp. vettoriale

oppure $S^1 = \{$vettori liberi di lunghezza 1 del piano$\}$



i punti finali descrivono circonferenza di raggio 1

⑥ $V = \mathbb{R}[x]$ insieme dei polinomi reali in una indeterminata

$$\mathbb{R}[x] := \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^{\textcircled{n}} : n \in \mathbb{N}, \ a_i \in \mathbb{R} \}$$

grado del polinomio

si può definire $+$: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = P(x)$

$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m$

se $m \leq n$: $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m + \underset{b_{m+1}}{0} \cdot x^{m+1} + \dots + \underset{b_n}{0} \cdot x^n = Q(x)$

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \dots + (a_n + b_n) x^n$$

posso definire $\cdot$: $c \cdot (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = c \cdot a_0 + c \cdot a_1 x + c \cdot a_2 x^2 + \dots + c \cdot a_n x^n$

$c \in \mathbb{R}$

queste verificano Ⓥ①, …, Ⓥ⑧

vettore nullo = polinomio nullo $\quad P(x) = 0$

⑦ $\mathbb{R}[x] \supseteq \mathbb{R}[x]_3 = \{$polinomi di grado $3\}$

$= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_3 \neq 0 \}$

$V = \mathbb{R}[x]_3$, cons. $+$ e $\cdot$ come prima

$+$ non è un'op. interna: es. $1 + 2x^2 + 3x^3 = P(x)$

$8 - x - 3x^3 = Q(x)$, $P(x) + Q(x) \notin \mathbb{R}[x]_3$

$= 9 - x + 2x^2$

⑧ Se invece $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ polinomi di grado ≤ 3 : è SPAZIO VETTORIALE

⑨ $V = \mathcal{F}$ insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{F} = \{ f : f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione$\}$

es. $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Definisco $+$: $f, g \in \mathcal{F}$

la funzione $f+g$ è così definita:

$$(f+g)(x_0) := f(x_0) + g(x_0)$$

↓ somma di funzioni

↳ somma di numeri reali

definisco $\cdot$: $c \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}$

$c \cdot f$ è la funzione :

$$(c \cdot f)(x_0) := c \cdot f(x_0)$$

↓ prodotto in $\mathbb{R}$

Le due operazioni verificano V1, ..., V8

vettore nullo: funzione costante $\equiv 0$.