Appunti delle lezioni di
MATEMATICA FINANZIARIA

Anna Rita Bacinello

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali, Matematiche e Statistiche "Bruno de Finetti", Università degli Studi di Trieste

INTRODUZIONE

- La Matematica finanziaria è quella branca della Matematica applicata che ha per oggetto lo studio delle operazioni finanziarie, ovvero operazioni di scambio di importi monetari disponibili in date diverse.
- In particolare, gli importi oggetto di scambio e/o le date in cui essi vengono scambiati possono essere
  - ▷ entrambi certi $\rightsquigarrow$ La Matematica finanziaria classica ha proprio per oggetto lo studio di operazioni finanziarie certe;
  - ▷ almeno uno dei due, importo/data, aleatorio, perché dipende, ad esempio, dal verificarsi di determinati eventi (vita, morte, incidente automobilistico, ...) e/o dal valore di qualche variabile di riferimento (tasso d'interesse, indice azionario, ...).

INTRODUZIONE

- In quest'ultimo ambito si fa di solito rientrare quella che è meglio nota come Matematica attuariale o, più semplicemente, Matematica delle assicurazioni, ma non esclusivamente perché, soprattutto negli anni recenti, lo spettro di tematiche oggetto di studio della Matematica finanziaria in senso stretto, non attuariale, si è sempre più allargato.
- Spesso si parla infatti di Matematica finanziaria moderna, che comprende le operazioni finanziarie aleatorie, per la cui trattazione ci si immerge in un ambiente di mercato e si utilizzano anche metodologie/approcci tipici dell'Economia.

INTRODUZIONE

- A questo proposito il confine tra le discipline diventa labile: talvolta si parla di Economia finanziaria (Financial economics), altre volte di Finanza matematica, in cui non c'è semplicemente uno scambio tra sostantivo/aggettivo rispetto a Matematica finanziaria, in quanto la Finanza matematica riguarda argomenti di carattere più avanzato, come ad esempio la formazione dei prezzi dei titoli e dei loro derivati.
- Un'importante branca della Matematica finanziaria "moderna" riguarda infine le scelte tra operazioni finanziarie alternative, problema che in parte viene affrontato anche dalla Matematica finanziaria classica ma che nel corso degli anni ha assunto una tale rilevanza da costituire esso stesso una sottodisciplina chiamata Teoria del portafoglio $\rightsquigarrow$ problemi di asset allocation

INTRODUZIONE

- In questo corso ci occuperemo prima di tutto delle operazioni finanziarie certe, e quindi partiremo dai concetti caratterizzanti la Matematica finanziaria classica (leggi finanziarie, rendite, ammortamenti, criteri di scelta tra investimenti, ...), dopo di che ci “immergeremo” in un mercato e rivisiteremo parte di questi concetti alla luce di alcune ipotesi ideali che caratterizzano un mercato “stilizzato”.
- I concetti precedentemente studiati saranno in questa fase ricondotti a prezzi, o tassi, di mercato, e quindi perderanno la loro caratteristica di certezza.
- Parleremo, in particolare, di mercato obbligazionario, definendone la struttura per scadenza di prezzi e/o tassi, di duration, di immunizzazione finanziaria.

IL SISTEMA FINANZIARIO

- Il sistema finanziario fa parte del (più generale) sistema economico.
- Può essere visto come l'insieme degli strumenti, dei mercati e delle relative regole attraverso cui si realizza la movimentazione monetaria e il trasferimento del rischio tra diversi agenti economici.
- Una delle sue principali funzioni è quella di consentire il trasferimento di flussi monetari dalle unità in surplus, che dispongono di denaro in eccedenza rispetto alle esigenze, alle unità in deficit, che hanno bisogno di denaro perché spendono di più di quanto in loro possesso.
- Tali trasferimenti si realizzano tramite varie tipologie di strumenti, quali la stipulazione di contratti finanziari o la compravendita di titoli finanziari.

CONTRATTI FINANZIARI

- Un contratto finanziario è un accordo tra due o più parti per scambiarsi degli importi monetari in determinate date.
- Ciascun importo è caratterizzato dalla valuta di denominazione (es. Euro, USD, ...) e dalla data di esigibilità.
- Sia gli importi che le date possono essere specificati nel contratto in maniera esplicita, oppure implicitamente.
- In quest'ultimo caso sono comunque fissati in contratto i criteri/regole di calcolo da utilizzare per determinare importi e/o date in base al verificarsi di eventi futuri e/o a grandezze che saranno note soltanto in futuro.
- Si parla allora di contratti finanziari contingenti $\rightsquigarrow$ contingent-claims

CONTRATTI FINANZIARI

- ESEMPI
  - contratto di assicurazione in caso morte vita intera
    Verrà pagato ai beneficiari un importo di 100000 Euro alla morte dell'assicurato $\rightsquigarrow$ E' noto l'importo, ma non la data
  - contratto di assicurazione di capitale differito
    Verrà pagato all'assicurato un importo di 100000 Euro fra un anno, ma soltanto se questi è vivo $\rightsquigarrow$ E' nota la data, ma l'importo è aleatorio in quanto può assumere come determinazione 100000 se l'assicurato è vivo fra un anno, 0 se invece è morto
  - contratto di mutuo a tasso variabile
    Gli interessi di un debito verranno pagati in date prefissate, ad un tasso che dipenderà da quello osservato sul mercato nella data di esigibilità (o in una data antecedente) per determinate tipologie di investimenti/prestiti $\rightsquigarrow$ Sono note le date, non gli importi
  - contratto di assicurazione RCA
    In caso di incidente ($\rightsquigarrow$ sinistro) verrà rimborsato il danno provocato a terzi $\rightsquigarrow$ Non è nota né la data né l'importo dell'eventuale danno

CONTRATTI FINANZIARI

- In molti casi le parti coinvolte in un contratto finanziario restano immutate per tutta la vita del contratto.
- Talvolta, invece, è prevista la possibilità di “negoziare” il contratto.
- Di solito questo avviene per la parte che, all’inizio, ha sostenuto dei pagamenti, mentre al momento della negoziazione ha solo crediti per il futuro.
- In questo caso, dunque, il contratto, per la parte che ha solo crediti, si trasforma in un titolo finanziario, che può cambiare possessore nel tempo.

TITOLI FINANZIARI

- Un titolo finanziario conferisce al suo possessore il diritto di ricevere introiti futuri, e può essere negoziato in appositi mercati.
- ESEMPI
  - ▷ azione $\rightsquigarrow$ possesso di una quota di una società, conferisce ai suoi possessori il diritto di ricevere i dividendi, che verranno distribuiti in base agli utili conseguiti dalla società.
  - ▷ obbligazione $\rightsquigarrow$ possesso di una quota di un credito nei confronti di una società, conferisce ai suoi possessori il diritto di ricevere gli interessi e la restituzione del capitale in futuro.

INVESTIMENTI E FINANZIAMENTI

- Gli strumenti/contratti finanziari consentono alle unità in surplus di posticipare la disponibilità di denaro tramite operazioni di investimento, caratterizzate all'inizio da uno o più esborsi, a cui fanno seguito uno o più introiti.
- Simmetricamente, essi possono essere utilizzati dalle unità in deficit per anticipare la disponibilità monetaria tramite operazioni di finanziamento, in cui a uno o più introiti iniziali seguono uno o più esborsi.

INVESTIMENTI E FINANZIAMENTI

- ESEMPI
  - Un cittadino (in surplus) investe i propri risparmi in un deposito bancario cedendoli quindi alla banca (in deficit) e posticipandone la disponibilità ad una data futura.
  - Un cittadino (in deficit) stipula un contratto di mutuo immobiliare ottenendo un finanziamento da una banca (in surplus) e quindi anticipando la disponibilità di denaro.
  - Un'impresa (in deficit) ottiene un prestito da una banca (in surplus) per finanziare un progetto produttivo.
  - Un cittadino (in surplus) compra un BOT emesso dallo Stato Italiano (in deficit).

INVESTIMENTI E FINANZIAMENTI

$\rightsquigarrow$ Il fatto di essere in deficit o in surplus dipende dal contesto (es. cittadino, banca)

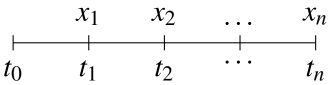
- Complessivamente (cioè a livello globale) le famiglie (cittadini) sono in surplus mentre le imprese e gli enti pubblici sono in deficit.
- Gli intermediari finanziari ($\rightsquigarrow$ banche, assicurazioni) sono neutri: agevolano il movimento monetario dalle unità in surplus a quelle in deficit, dietro il pagamento di un compenso (commissioni e differenziale tra tasso debitore e tasso creditore per le banche, caricamenti dei premi per le assicurazioni).

OPERAZIONI FINANZIARIE

- Un contratto finanziario genera un'operazione finanziaria, cioè un'operazione di scambio di importi, ciascuno caratterizzato da una propria data di esigibilità (scadenza) e valuta di denominazione.
- Dal punto di vista di una parte fissata coinvolta nel contratto, e immaginando di avere a che fare con un numero finito di pagamenti, tutti nella stessa valuta (ad es. Euro), possiamo definire formalmente un'operazione finanziaria come coppia ordinata di vettori $(\underline{x}, \underline{t})$, della stessa dimensione, in cui $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ contiene gli importi monetari (con segno e in una fissata valuta di riferimento), ciascuno esigibile alla corrispondente data del vettore ordinato $\underline{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, con $t_0 \preceq t_1 \prec t_2 \prec \cdots \prec t_n$ essendo t_0 la data di stipulazione del contratto.

Operazioni finanziarie

- Di solito si usa scrivere $\underline{x}/\underline{t}$, o $(x_1, x_2, \ldots, x_n)/(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, e talvolta gli elementi di $\underline{x}$ e $\underline{t}$ vengono indicati tra parentesi graffe.
- Il vettore $\underline{t}$ si chiama scadenzario dell'operazione.
- Gli importi del vettore $\underline{x}$ sono > 0 se costituiscono entrate, se < 0 dovremo invece pagarne il valore assoluto.
- Spesso le operazioni finanziarie vengono rappresentate in forma grafica al modo seguente:



- In generale, gli elementi del vettore $\underline{x}$ possono essere numeri aleatori, e anche le date potrebbero essere aleatorie.
- Noi, tuttavia, almeno nella prima parte del corso, ci limiteremo a considerare operazioni finanziarie certe, in cui sia gli importi che le date sono noti $\rightsquigarrow$ in particolare, $\underline{x}$ è un vettore di numeri reali.

Operazioni a pronti e a termine

- Nella definizione di operazione finanziaria abbiamo detto che la prima data coinvolta, t_1, è $\succeq t_0$.
- Nel caso particolare in cui $t_1 \succ t_0$ la data di stipula t_0 non è stata inclusa nella definizione dell'operazione.
- Si potrebbe però pensare di includerla sempre, eventualmente mettendoci un importo corrispondente nullo se in essa non è previsto lo scambio di denaro.
- Quindi, in generale, potremmo rappresentare l'operazione come segue:

$$
\begin{array}{cccc}
x_0 & x_1 & \dots & x_n \\
\hline
t_0 & t_1 & \dots & t_n
\end{array}
$$

dove t_0 è la prima data coinvolta, eventualmente con $x_0 = 0$.

OPERAZIONI A PRONTI E A TERMINE

- In particolare, se $x_0 \neq 0$, si parla di operazione a pronti (o spot), se $x_0 = 0$ di operazione a termine (o forward).
- In altri termini, in un contratto/operazione a pronti, al momento della stipula si paga o si riceve qualcosa; in un'operazione a termine alla stipula semplicemente ci si accorda su quelli che saranno i movimenti futuri.

OPERAZIONI DI INVESTIMENTO E DI FINANZIAMENTO

- Data un'operazione finanziaria $\underline{x}/\underline{t}$, se il primo (o i primi) importi sono tutti dello stesso segno, per poi cambiare di segno una volta sola, si ha a che fare con un'operazione di investimento o di finanziamento (in senso stretto):
  - $\underline{x} = (-,-,\ldots,-,+,+,\ldots,+)$ investimento
  - $\underline{x} = (+,+,\ldots,+,-,-,\ldots,-)$ finanziamento
- Se invece i segni si alternano, talvolta si dice di aver a che fare con un'operazione di investimento in senso lato quando la scadenza media degli esborsi precede la data del primo introito, e viceversa per i finanziamenti in senso lato (la scadenza media degli introiti precede la data del primo esborso), ma evidentemente bisognerebbe precisare che cosa si intende per scadenza media (aritmetica, pesata, ... ?).

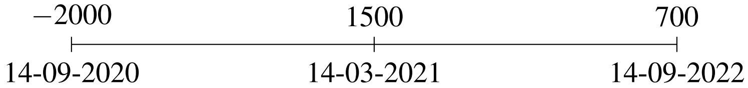
OPERAZIONI DI INVESTIMENTO E DI FINANZIAMENTO

- Altre volte si definisce un'operazione di investimento o finanziamento (eventualmente in senso lato) facendo ricorso alla sequenza dei saldi, vale a dire alla somma algebrica di tutti gli importi esigibili entro la data di riferimento: $x_0, x_0+x_1, x_0+x_1+x_2, \ldots, x_0+x_1+\cdots+x_n$.
- Se questa sequenza presenta un solo cambiamento di segno da < 0 a > 0, si parla di investimento; viceversa si parla di finanziamento se i saldi sono dapprima > 0 e poi < 0.

ESEMPI DI OPERAZIONI FINANZIARIE

Oggi è il 14-09-2020.

- Si consideri un'operazione di investimento a pronti che prevede un esborso iniziale di 2000 Euro seguito da due introiti di 1500 e 700 Euro tra 6 mesi e 2 anni rispettivamente:



$\rightsquigarrow$ $\underline{x} = (-2000, 1500, 700)$

$\rightsquigarrow$ $\underline{t}$ =(14-09-2020, 14-03-2021, 14-09-2022)

ESEMPI DI OPERAZIONI FINANZIARIE

- Si consideri un'operazione di finanziamento a termine che prevede un introito di 1000 Euro tra 1 anno seguito da due esborsi di 700 e 400 Euro tra 2 e 3 anni rispettivamente:

	1000	-700	-400
14-09-2020	14-09-2021	14-09-2022	14-09-2023

$\rightsquigarrow$ $\underline{x} = (1000, -700, -400)$
$\rightsquigarrow$ $\underline{t}$ =(14-09-2021, 14-09-2022, 14-09-2023)

oppure, se includiamo anche la data di stipula,

$\rightsquigarrow$ $\underline{x} = (0, 1000, -700, -400)$
$\rightsquigarrow$ $\underline{t}$ =(14-09-2020, 14-09-2021, 14-09-2022, 14-09-2023)

SOMMA DI OPERAZIONI FINANZIARIE

- Data un'operazione finanziaria $\underline{x}/\underline{t}$, essa rimane la medesima se "allunghiamo" il vettore $\underline{t}$ aggiungendovi delle nuove date, purché i flussi corrispondenti, che verranno aggiunti "allungando" anche il vettore $\underline{x}$, siano nulli.
- Questo è ad esempio ciò che abbiamo fatto, quando $t_1 \succ t_0$, "aggiungendo" t_0 al vettore $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ e $x_0 = 0$ al vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Date due operazioni finanziarie $\underline{x}/\underline{r} = (x_1, \ldots, x_l)/(r_1, \ldots, r_l)$ e $\underline{y}/\underline{s} = (y_1, \ldots, y_m)/(s_1, \ldots, s_m)$, "allunghiamole" sullo scadenzario comune $\underline{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ottenuto, in alternativa:
  - ▷ inserendo al "posto giusto" in uno dei due vettori gli eventuali elementi dell'altro che non siano già presenti
  - ▷ costruendo l'unione (insiemistica) tra gli elementi dei vettori $\underline{r}$ ed $\underline{s}$, che va poi riversata in un vettore, da ordinare in senso strettamente crescente

$\rightsquigarrow$ la dimensione n del vettore $\underline{t}$ è compresa tra $\max\{l, m\}$ e $l + m$.

Somma di operazioni finanziarie

- Le nuove operazioni, uguali a quelle di partenza, saranno $\underline{x}'/\underline{t}$ e $\underline{y}'/\underline{t}$, dove i due vettori $\underline{x}'$ e $\underline{y}'$, entrambi di dimensione n, si ottengono aggiungendo degli zeri in corrispondenza degli (eventuali) elementi di $\underline{t}$ che non stavano già in $\underline{r}$ o, rispettivamente, in $\underline{s}$.
- L'operazione finanziaria $\underline{z}/\underline{t}$, con $\underline{z} = \underline{x}' + \underline{y}'$, si definisce somma delle due operazioni finanziarie $\underline{x}/\underline{r}$ e $\underline{y}/\underline{s}$.

ESEMPIO DI SOMMA DI OPERAZIONI FINANZIARIE

- $\underline{x}/\underline{r} = (3000, -4000)/(1\text{-}1\text{-}2021,\ 1\text{-}11\text{-}2031)$
- $\underline{y}/\underline{s} = (-2000, -1500, 4200)/(1\text{-}1\text{-}2021,\ 1\text{-}3\text{-}2022,\ 1\text{-}10\text{-}2029)$

$\rightsquigarrow$ $\underline{t}$ =(1-1-2021, 1-3-2022, 1-10-2029, 1-11-2031)

$\rightsquigarrow$ $\underline{x}' = (3000, 0, 0, -4000)$

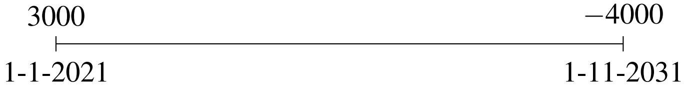
$\rightsquigarrow$ $\underline{y}' = (-2000, -1500, 4200, 0)$

$\rightsquigarrow$ $\underline{z} = (1000, -1500, 4200, -4000)$

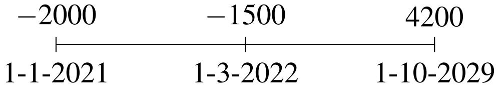
ESEMPIO DI SOMMA DI OPERAZIONI FINANZIARIE

Graficamente:

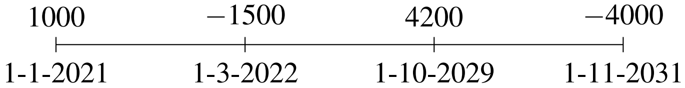
- $\underline{x}/\underline{r}$



- $\underline{y}/\underline{s}$



- $\underline{z}/\underline{t}$



SCOMPOSIZIONE DI OPERAZIONI FINANZIARIE

- In modo simmetrico, si può definire la scomposizione di un'operazione finanziaria in due operazioni che hanno come somma l'operazione di partenza.
- ESEMPI

  L'operazione $\underline{z}/\underline{t}$ appena costruita può essere decomposta, oltre che nelle due operazioni

  ▷ $\underline{x}/\underline{r}$ e $\underline{y}/\underline{s}$ da cui siamo partiti, in

  ▷ flussi prima e dopo il 31-12-2028: $\underline{x}''/\underline{r}''$ e $\underline{y}''/\underline{s}''$, con
  $\underline{x}'' = (1000, -1500)$, $\underline{r}''$ =(1-1-2021, 1-3-2022)
  $\underline{y}'' = (4200, -4000)$, $\underline{s}''$ =(1-10-2029, 1-11-2031)

  ▷ flussi in entrata e flussi in uscita: $\underline{x}'''/\underline{r}'''$ e $\underline{y}'''/\underline{s}'''$, con
  $\underline{x}''' = (1000, 4200)$, $\underline{r}'''$ =(1-1-2021, 1-10-2029)
  $\underline{y}''' = (-1500, -4000)$, $\underline{s}'''$ =(1-3-2022, 1-11-2031)

$\rightsquigarrow$ $\underline{z}/\underline{t} = \underline{x}/\underline{r} + \underline{y}/\underline{s} = \underline{x}'/\underline{t} + \underline{y}'/\underline{t} = \underline{x}''/\underline{r}'' + \underline{y}''/\underline{s}'' = \underline{x}'''/\underline{r}''' + \underline{y}'''/\underline{s}'''$

METODO DI CALCOLO DEI TEMPI

- Fin qua abbiamo espresso gli elementi dello scadenzario come date, ed è ciò che effettivamente accade nella pratica.
- Tuttavia questo risulta alquanto pesante e, soprattutto, non gestibile nelle impostazioni teoriche.
- Bisogna pertanto trovare una qualche regola che ci consenta di trasformare date in numeri, in modo da poter fare operazioni con esse, ad es. trovare la "differenza" tra due date.
- A priori occorre definire l'unità di misura del tempo che, salvo diversamente specificato, è 1 anno, e una qualche convenzione per calcolare il tempo intercorso tra due date.
- A tale scopo nella pratica ci sono diverse convenzioni $\rightsquigarrow$ day count conventions

Day Count Conventions

- Siano $t_1 = g_1$-m_1-a_1 e $t_2 = g_2$-m_2-a_2 due date tali che $t_1 \prec t_2$ ($\rightsquigarrow a_1 \leq a_2$), e sia gg il numero effettivo di giorni intercorrenti tra le stesse, ovvero la differenza tra t_2 e t_1 espressa in giorni $\rightsquigarrow$ nel conteggio si tiene conto di t_2 ma non di t_1
- Vogliamo ora esprimere tale differenza in anni.
  - ▷ ACT/ACT ("Actual", o "Effective")
    - ⋆ se nessun $y : a_1 \leq y \leq a_2$ è bisestile (cioè multiplo di 4), allora $t_2 - t_1 \doteq \frac{gg}{365}$
      $\rightsquigarrow$ In particolare questo vale quando $a_1 = a_2$ ed è non bisestile
    - ⋆ se $a_1 = a_2$ ed è un anno bisestile, allora $t_2 - t_1 \doteq \frac{gg}{366}$
    - ⋆ se $a_1 < a_2$ ed esiste almeno un y bisestile : $a_1 \leq y \leq a_2$, allora si pone $t_2 - t_1 \doteq d_1 + d_2 + a_2 - a_1 - 1$, dove
      $d_1 =$31-12-$a_1 - g_1$-m_1-a_1 (calcolato come descritto prima)
      $d_2 =$ numero di giorni effettivi tra 31-12-$(a_2 - 1)$ e g_2-m_2-a_2
      diviso 365 o 366 a seconda che a_2 sia bisestile o no.
      $\rightsquigarrow$ In pratica si scompongono dei blocchi relativi ai vari anni

    Questa convenzione è utilizzata nell'area Euro, negli Stati Uniti e in Gran Bretagna per i Titoli di Stato con scadenze medio-lunghe (ad esempio i BTP in Italia).

Day Count Conventions

- ESEMPI
  1. t_1 =3-2-2010, t_2 =23-5-2010
     $gg = (28-3)+31+30+23 = 109$
     $\rightsquigarrow t_2 - t_1 = \frac{109}{365}$
  2. t_1 =3-2-2012, t_2 =23-5-2012
     $gg = (29-3)+31+30+23 = 110$
     $\rightsquigarrow t_2 - t_1 = \frac{110}{366}$
  3. t_1 =7-10-2010, t_2 =12-3-2012
     $\rightsquigarrow$ Ci sono 3 anni coinvolti: 2010, 2011, 2012, il terzo bisestile
     Nel 2010 ci sono $(31-7)+30+31 = 85$ giorni
     Nel 2011 ci sono 365 giorni
     Nel 2012 ci sono $31+29+12 = 72$ giorni
     $\rightsquigarrow t_2 - t_1 = \frac{85}{365} + \frac{365}{365} + \frac{72}{366}$

Day Count Conventions

- ▷ ACT/360
  $t_2 - t_1 \doteq \frac{gg}{360}$ (usata per i BOT)

- ▷ ACT/365
  $t_2 - t_1 \doteq \frac{gg}{365}$ (usata in Gran Bretagna)

- ESEMPI

  1. t_1 =3-2-2010, t_2 =23-5-2010
     $\rightsquigarrow t_2 - t_1 = \frac{109}{360}$ o, rispettivamente, $t_2 - t_1 = \frac{109}{365}$
  2. t_1 =3-2-2012, t_2 =23-5-2012
     $\rightsquigarrow t_2 - t_1 = \frac{110}{360}$ o, rispettivamente, $t_2 - t_1 = \frac{110}{365}$
  3. t_1 =7-10-2010, t_2 =12-3-2012
     $gg = 85 + 365 + 72 = 522$
     $\rightsquigarrow t_2 - t_1 = \frac{522}{360}$ o, rispettivamente, $t_2 - t_1 = \frac{522}{365}$

DAY COUNT CONVENTIONS

▷ 30/360 ($\rightsquigarrow$ anno commerciale)

Tutti i mesi sono considerati di 30 giorni e l'anno di 360:

- ⋆ se g_i è l'ultimo giorno del mese allora si pone $g'_i = 30$, altrimenti si pone $g'_i = g_i$, $i = 1, 2$
- ⋆ si definisce $t_2 - t_1 \doteq a_2 - a_1 + \frac{m_2 - m_1}{12} + \frac{g'_2 - g'_1}{360}$

Questa convenzione è usata negli Stati Uniti per le obbligazioni societarie.

- ESEMPI

1. t_1 =3-2-2010, t_2 =23-5-2010
   $\rightsquigarrow t_2 - t_1 = \frac{(30-3)+30+30+23}{360} = \frac{110}{360}$
2. t_1 =3-2-2012, t_2 =23-5-2012
   $\rightsquigarrow t_2 - t_1 = \frac{(30-3)+30+30+23}{360} = \frac{110}{360}$
3. t_1 =7-10-2010, t_2 =12-3-2012
   $\rightsquigarrow t_2 - t_1 = \frac{((30-7)+30+30)+360+(30+30+12)}{360} = \frac{83+360+72}{360} = \frac{515}{360}$

- Si hanno infine anche le Business Date Conventions, in base a cui le date coincidenti con festività vengono convertite in date lavorative, ad es. il giorno prima o il giorno dopo.

CONVERSIONE DI DATE IN NUMERI

- Fissiamo una data di riferimento $t_0 = g_0$-m_0-a_0 che precede tutte quelle che considereremo $\rightsquigarrow$ origine dei tempi

- Definiamo un'applicazione f dall'insieme di tutte le date $t \succeq t_0$ all'insieme dei numeri reali non negativi:

  ▷ $t_0 \xrightarrow{f} 0$

  ▷ $t(\succ t_0) \xrightarrow{f} t - t_0$ (calcolata utilizzando una delle convenzioni descritte in precedenza)

$\rightsquigarrow$ D'ora innanzi, tutte le date saranno per noi numeri reali ≥ 0, e lo scadenzario un vettore di numeri reali

$\rightsquigarrow$ In particolare, nelle parti teoriche utilizzeremo la convenzione 30/360, vale a dire, ad es., che 6 mesi $= \frac{1}{2}$, 1 mese $= \frac{1}{12}$, 3 mesi $= \frac{1}{4}$, ...

Operazioni finanziarie elementari

- Parliamo di operazione finanziaria elementare quando sono coinvolte soltanto due date: $(x_1, x_2)/(t_1, t_2)$.
- Sia $t_0 = 0$ la data di stipulazione del contratto e poniamo $t = t_2 - t_1 (> 0)$ $\rightsquigarrow$ in particolare, se l'operazione è a pronti, si ha $t_1 = t_0 = 0$ e quindi $t = t_2$
- Nel definire le operazioni finanziarie certe non abbiamo posto alcun vincolo sugli importi, che potrebbero, ad es., essere entrambi > 0 o entrambi < 0.
- Tuttavia è abbastanza naturale pensare che se in un contratto si paga qualcosa all'inizio, sarà per ricevere qualcosa in futuro, o viceversa, ovvero che x_1 e x_2 sono di segno diverso.
- Come vedremo nella seconda parte del corso, ciò sarà necessario per rispettare un'ipotesi fondamentale sui mercati finanziari che adotteremo $\rightsquigarrow$ ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggo

Operazioni finanziarie elementari

- Quindi, fissati due numeri (importi) > 0, C e M, la nostra operazione può essere rappresentata come segue:

$$\begin{array}{ccc} -C & & M \\ \vdash & \text{———————} & \dashv \\ 0 & & t \end{array}$$

operazione di investimento

o, simmetricamente,

$$\begin{array}{ccc} C & & -M \\ \vdash & \text{———————} & \dashv \\ 0 & & t \end{array}$$

operazione di finanziamento

- Se noi stipuliamo un contratto che origina la suddetta operazione finanziaria, significa che siamo disposti a scambiare l'importo C in 0 contro l'importo M in t (o viceversa) o, in altri termini, che giudichiamo "equo" (o "indifferente") avere C subito piuttosto che M tra t anni ($t \in \mathbb{R}^+$).

OPERAZIONI FINANZIARIE ELEMENTARI

- Vediamo allora come, dato C in 0, si può calcolare l'importo M in t che risulta indifferente a C o, simmetricamente, dato M in t, come si calcola l'importo C in 0 che risulta indifferente ad M.
- E' chiaro che si potrebbe usare qualunque tipo di regola tanto è un contratto, cioè un accordo, e non importa come ci si è arrivati.
- Tuttavia esistono delle regole, o schemi, standard, che vanno sotto il nome di regimi finanziari (o leggi finanziarie, preciseremo la differenza in seguito).
- Per definire tali regole è indifferente porsi nella situazione di debitore ($\rightsquigarrow$ operazione di finanziamento) o di creditore ($\rightsquigarrow$ op. di investimento), anche se nella pratica la regola che ci viene imposta può ovviamente cambiare a seconda della posizione in cui ci si trova, soprattutto se la controparte è un intermediario finanziario come ad es. una banca.

OPERAZIONI FINANZIARIE ELEMENTARI

- Innanzitutto è “ragionevole” assumere $M > C$ (o almeno lo era nel passato, ed è proprio su questo che si fonda la matematica finanziaria classica) $\rightsquigarrow$ postulato di rendimento del denaro, o anche postulato di impazienza
- Ciò significa che si è disposti a rinunciare alla disponibilità di C, cioè al consumo immediato, solo se si può avere di più in futuro (anche a causa di altri fattori quali, ad es., la diminuzione del potere d’aquisto dovuta all’inflazione).
- La differenza $M - C$ viene talvolta chiamata prezzo del tempo; si tratta cioè di un compenso per il differimento del consumo.
- E’ però più comune chiamarla Interesse (I) $\rightsquigarrow$ $I = M - C$
- La quantità $M = C + I$ si chiama montante, mentre C è il capitale iniziale $\rightsquigarrow$ Se si parte dal capitale iniziale C, aggiungendo l’interesse si ottiene il montante

Operazioni finanziarie elementari

- L'operazione di calcolo del montante, che ci consente di portare avanti importi nel tempo, si chiama operazione di capitalizzazione $\rightsquigarrow \binom{C}{0} \rightarrow \binom{M}{t}$
- Simmetricamente, si potrebbe pensare di partire dal capitale finale M e anticiparlo in 0 pagando/ricevendo $C(< M)$ $\rightsquigarrow$ dal momento che si anticipa una disponibilità futura, ci si accontenta di meno
- In tal caso la differenza precedente si chiama sconto (D, Discount) $\rightsquigarrow D = M - C$
- La quantità $C = M - D$ si chiama valore attuale, o valore scontato, del capitale M $\rightsquigarrow$ Se si parte dal capitale finale M, sottraendo lo sconto si ottiene il valore attuale
- L'operazione di calcolo del valore attuale, che ci consente di portare indietro importi nel tempo, si chiama operazione di attualizzazione, o anche di sconto $\rightsquigarrow \binom{M}{t} \rightarrow \binom{C}{0}$

- Riepilogando, anche se formalmente $I = D = M - C$, quando si calcola l'interesse I il punto di partenza è il capitale iniziale C, mentre quando si calcola lo sconto D il punto di partenza è il capitale finale M, ovvero $I = f(C;0,t)$ e $D = g(M;t,0)$.

REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE

- Nel regime dell'interesse semplice l'interesse è proporzionale al capitale e alla durata dell'operazione:

$$I = i \cdot C \cdot t, \quad i > 0$$

- La costante moltiplicativa i viene chiamata tasso annuo d'interesse in quanto, se moltiplicata per l'importo unitario e la durata unitaria, restituisce l'interesse su 1 Euro per 1 anno

  $\rightsquigarrow M = C + I = C + iCt = C(1 + it)$

  $\rightsquigarrow$ Il montante è lineare rispetto a t

- Se, in particolare, $C = 1$ e $t = 1 \rightsquigarrow M = 1 + i \doteq u$
- u si chiama fattore di capitalizzazione:

$$\binom{1}{0} \mathfrak{I} \binom{u = 1 + i}{1}$$

  cioè "1 Euro in 0 è indifferente a u Euro in 1".

- Siccome $i > 0 \Rightarrow u > 1$.

LEGGI ASSOCIATE

- Immaginiamo di partire dal capitale C in 0 e di arrivare al montante M in t dopo aver applicato una legge di capitalizzazione, ad es. quella appena descritta dell'interesse semplice (ma non solo).
- Se poi, applicando una legge di attualizzazione, il valore attuale in 0 di M in t coincide con C, allora la legge di attualizzazione si dice associata, o anche coniugata, rispetto a quella di capitalizzazione.
- In altri termini, se $M = F(C; 0, t)$ e $C = G(M; t, 0)$ per ogni (fissata) coppia $0, t$, allora F risulta invertibile rispetto alla prima variabile e la sua inversa è proprio G.

LEGGI ASSOCIATE

- Nella pratica non è detto che vengano utilizzate leggi associate.
- Ad esempio si pensi di investire un importo $C = 1000$ Euro per 2 anni al tasso annuo del 2% nel regime dell'interesse semplice:
  - ▷ Dopo 2 anni si riceveranno $M = 1000 \cdot (1 + 0.02 \cdot 2) = 1040$ Euro.
  - ▷ Se però un istante dopo la stipulazione del contratto ci si pente e si decide di cedere i 1040 Euro disponibili tra 2 anni ad un'altra parte (o anche alla stessa con cui è stato stipulato il contratto), non è detto che in cambio vengano corrisposti esattamente 1000 Euro.

LEGGE DELLO SCONTO RAZIONALE

- Supponiamo di operare nel regime dell'interesse semplice, con leggi associate:

$$M = C(1+it) \;\Rightarrow\; C = \frac{M}{1+it}$$

- La legge di attualizzazione associata si chiama anche legge dello sconto razionale.
- Se, in particolare, $M = 1$ e $t = 1$ $\rightsquigarrow$ $C = \frac{1}{1+i} \doteq v = \frac{1}{u}$
- v si chiama fattore di sconto, o fattore di attualizzazione:

$$\binom{v = \frac{1}{1+i}}{0} \mathfrak{I} \binom{1}{1}$$

cioè "v Euro in 0 è indifferente a 1 Euro in 1".

- Siccome $i > 0 \Rightarrow 0 < v < 1$.

Tasso di sconto

- Si chiama tasso di sconto, o tasso d'interesse anticipato, la differenza

$$d \doteq 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = iv$$

$\rightsquigarrow$ tasso di sconto perché è lo sconto su 1 Euro per 1 anno

$\rightsquigarrow$ tasso d'interesse anticipato perché

$$\binom{d}{0} = \binom{iv}{0} \mathfrak{I} \binom{i}{1}$$

REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE

- Calcoliamo ora lo sconto $D = g(M; t, 0)$ nel regime dell'interesse semplice, supponendo di operare con la legge associata dello sconto razionale:

$$D = M - C = M - \frac{M}{1+it} = \frac{M + Mit - M}{1+it} = \frac{Mit}{1+it}$$

$$= \frac{Mitv}{(1+it)v} = \frac{Mdt}{v+ivt} = \frac{Mdt}{1-d+dt} = \frac{Mdt}{1-d(1-t)}$$

- Nella pratica, il regime dell'interesse semplice viene utilizzato per operazioni di capitalizzazione di breve durata, solitamente inferiore all'anno.

Generalizzazioni

- Le definizioni che abbiamo finora dato di tasso d'interesse i, tasso di sconto (o di interesse anticipato) d, fattore di capitalizzazione u, fattore di attualizzazione v, saranno valide in generale, non soltanto nel regime dell'interesse semplice.
- Generalizziamo ora la definizione di fattore di capitalizzazione e di attualizzazione anche nel caso in cui la durata dell'operazione non è unitaria:

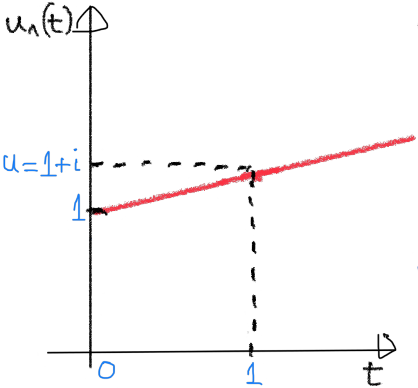
$$\binom{1}{0} \mathfrak{I} \binom{u(t)}{t}, \qquad \binom{v(t)}{0} \mathfrak{I} \binom{1}{t}$$

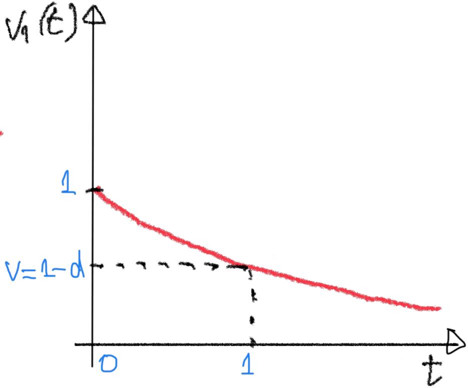
$\rightsquigarrow u = u(1)$ e $v = v(1)$

REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE

- Indiciando con 1 il fattore di capitalizzazione e quello di attualizzazione nel regime dell'interesse semplice allo scopo di distinguerli da quelli che incontreremo in altri regimi, otteniamo:

$$u_1(t) = 1 + it \ (\rightsquigarrow C = 1), \qquad v_1(t) = \frac{1}{1+it} \ (\rightsquigarrow M = 1)$$





DIFFERENZA TRA LEGGE E REGIME

- Finora abbiamo un po' "mescolato" la terminologia, parlando indifferentemente di legge, o di regime, e così spesso continueremo a fare anche in seguito.
- Per essere precisi, però, bisognerebbe parlare di regime per riferirsi ad una classe di funzioni (di attualizzazione o capitalizzazione) individuate da uno o più parametri, nel nostro caso il tasso i, e di legge per riferirsi invece ad una specifica funzione della classe:
  - ▷ Ad es., $M = C(1+it)$, con i generico, rappresenta il regime dell'interesse semplice.
  - ▷ Fissato i, ad es. 3%, individuiamo una legge di capitalizzazione, $M = C(1+0.03t)$ $\leadsto$ legge dell'interesse semplice

REGIME DELLO SCONTO COMMERCIALE

- Nel regime dello sconto commerciale lo sconto è proporzionale al capitale finale (cioè M) e alla durata dell'operazione.
- Poiché sull'importo unitario, per durata unitaria, lo sconto deve essere pari a d, il fattore di proporzionalità è proprio d:

$$D = d \cdot M \cdot t \quad \Rightarrow \quad C = M - D = M - dMt = M(1 - dt)$$

$\rightsquigarrow$ Il valore attuale è lineare rispetto a t

- Siccome non ha senso che il valore attuale diventi ≤ 0, questa legge di attualizzazione è definita solo per durate t tali che

$$1 - dt > 0 \;\Rightarrow\; t < \frac{1}{d}$$

- Essendo

$$d = iv \;\Rightarrow\; \frac{1}{d} = \frac{1}{iv} = \frac{1+i}{i} = 1 + \frac{1}{i} \;\Rightarrow\; t < 1 + \frac{1}{i}$$

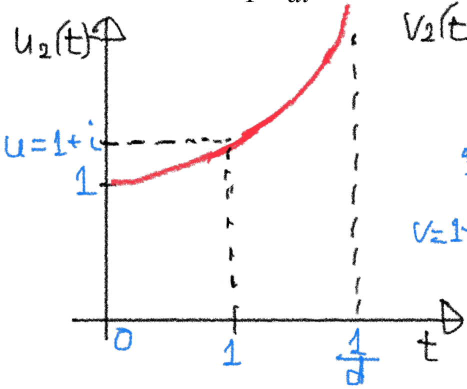
REGIME DELLO SCONTO COMMERCIALE

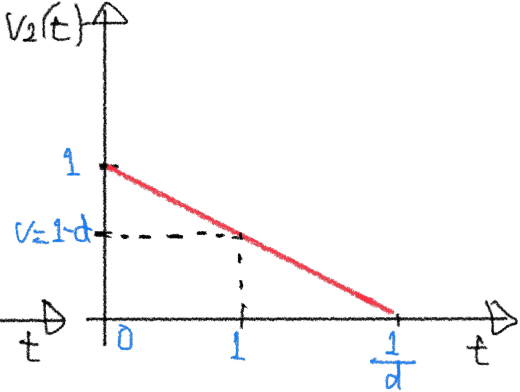
- Dalla $C = M(1-dt)$ si ottiene la legge di capitalizzazione associata:
$$M = \frac{C}{1-dt}, \quad \text{definita per} \quad t < \frac{1}{d}$$
- Calcoliamo ora l'interesse $I = f(C;0,t)$ nel regime dello sconto commerciale, supponendo di operare con la legge di capitalizzazione associata:
$$I = M - C = \frac{C}{1-dt} - C = \frac{C - C + Cdt}{1-dt}$$
$$= \frac{Civt}{1-ivt} = \frac{Cit}{1+i-it} = \frac{Cit}{1+i(1-t)}$$
- Nella pratica, il regime dello sconto commerciale viene utilizzato per operazioni di attualizzazione di breve durata, solitamente inferiore all'anno.

REGIME DELLO SCONTO COMMERCIALE

- Indiciando con 2 il fattore di capitalizzazione e quello di attualizzazione nel regime dello sconto commerciale otteniamo:

$$u_2(t) = \frac{1}{1-dt} \; (\rightsquigarrow C = 1), \qquad v_2(t) = 1 - dt \; (\rightsquigarrow M = 1)$$





REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO

- Nel regime dell'interesse semplice il capitale resta sempre "separato" dagli interessi, qualunque sia la durata dell'investimento o finanziamento.
- Nella pratica, però, accade che periodicamente (ad es. ogni anno, piuttosto che ogni 3 mesi) gli interessi vengono "capitalizzati", cioè diventano a loro volta capitale e quindi concorrono a produrre nuovi interessi $\rightsquigarrow$ anatocismo (pratica vietata dalla legge nel passato, per tutelare i debitori, ora ammessa)
- Tipicamente, almeno fino al 2004, nei conti correnti bancari le banche capitalizzavano gli interessi attivi a fine anno (al 31-12) e quelli passivi ogni 3 mesi (31-3, 30-6, 30-9, 31-12).

REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO

- Ora, per legge, la capitalizzazione deve avvenire con la stessa periodicità, e di fatto avviene ogni 3 mesi, ma questo non avvantaggia comunque i creditori perché tanto ormai il tasso di interesse attivo ($\rightsquigarrow$ tasso di remunerazione dei conti) è nullo, malgrado noi lo assumiamo > 0, mentre le spese e i bolli fanno sì che ogni trimestre ci siano addebiti, anziché accrediti, anche su capitali investiti molto elevati.
- Per periodi compresi tra due date di capitalizzazione si usa invece il regime dell'interesse semplice (o dello sconto commerciale se si vuole scontare, anziché capitalizzare).

REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO

- Supponiamo, per fissare le idee, che la capitalizzazione avvenga una volta all'anno, e che l'investimento del capitale C sia effettuato in una data di capitalizzazione (cioè 0 corrisponde ad un 31-12).
- Allora, dopo 1 anno, gli interessi vengono aggiunti al capitale, per cui il nuovo capitale a disposizione sarà pari a

$$C + Ci = C(1+i)$$

che a sua volta, dopo 1 ulteriore anno, produrrà interessi pari a $iC(1+i)$ che saranno di nuovo aggiunti al capitale portandolo a

$$C(1+i) + iC(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$$

Dopo 3 anni il capitale disponibile sarà pari a $C(1+i)^3$ e, in generale, dopo n (intero) anni si riceverà un montante pari a

$$M = C(1+i)^n = Cu^n$$

REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO

- Se invece la capitalizzazione avvenisse, ad es., ogni trimestre, si potrebbe ragionare in modo analogo supponendo però che l'unità di misura del tempo non sia l'anno bensì il trimestre, cioè che n (intero) rappresenti il numero di trimestri, e inoltre che il tasso i sia un tasso trimestrale.
- Dalla $M = C(1+i)^n$ si ottiene la legge di attualizzazione associata:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{M}{u^n} = Mv^n$$

- Il nome di legge/regime dell'interesse composto è chiaramente motivato dal modo in cui è stato presentato, in contrapposizione al regime dell'interesse semplice.

REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO

- Spesso si usa come sinonimo quello di legge/regime esponenziale vista la forma della funzione di capitalizzazione e di attualizzazione $\rightsquigarrow$ funzione esponenziale di base $u = 1 + i\ (> 1)$ e, rispettivamente, $v = \frac{1}{1+i}\ (> 0 \text{ e } < 1)$
- Tuttavia il termine legge/regime esponenziale è più generale in quanto non si limita al caso di durate d'investimento o finanziamento intere bensì n può essere un numero reale > 0 qualunque (che torneremo a chiamare t), e la legge è una generalizzazione di quella precedente:

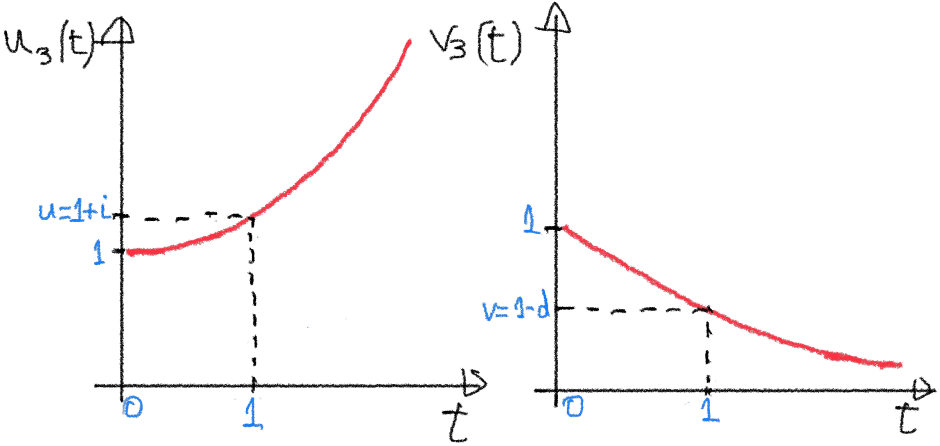
$$M = C(1+i)^t = Cu^t, \qquad C = \frac{M}{(1+i)^t} = Mv^t$$

- Ovviamente questa generalizzazione non può essere giustificata come prima perché non avrebbe senso; quindi dovremo definire diversamente la regola di formazione del montante nel regime esponenziale.

REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO

- Indiciando con 3 il fattore di capitalizzazione e quello di attualizzazione nel regime esponenziale otteniamo:

$$u_3(t) = (1+i)^t \ (\rightsquigarrow C = 1), \qquad v_3(t) = (1+i)^{-t} \ (\rightsquigarrow M = 1)$$



TASSI DIVERSI

- Prima di descrivere le regole (regimi) abbiamo detto che è indifferente porsi nella situazione di debitore piuttosto che di creditore.
- Nella pratica non è così: anche se venisse utilizzato lo stesso regime, ad es. quello dell'interesse composto, cambiano le leggi, perché il tasso creditore, cioè quello accordato sugli investimenti, è di solito ben al di sotto del tasso debitore, che si deve pagare sui debiti.
- Come vedremo più avanti, però, questa caratteristica è assente nei mercati perfetti, in cui invece tasso debitore = tasso creditore.

Confronto tra regimi

- Ci proponiamo ora di confrontare i fattori di capitalizzazione e di attualizzazione nei tre regimi dell'interesse semplice, dello sconto commerciale e dell'interesse composto a parità di tasso annuo d'interesse i.
- Questi fattori hanno entrambi due punti in comune:
  - ▷ $u_k(0) = v_k(0) = 1$, per $k = 1, 2, 3$;
  - ▷ siccome il confronto viene effettuato a parità di tasso d'interesse, $u_k(1) = u = 1 + i$ e $v_k(1) = v = \frac{1}{1+i}$ per $k = 1, 2, 3$.
- Risulta quindi immediato il confronto tra fattori di capitalizzazione nel regime dell'interesse semplice ($\rightsquigarrow$ lineare) e in quello dell'interesse composto ($\rightsquigarrow$ esponenziale) da una parte (cioè tra $u_1(t)$ e $u_3(t)$), e tra fattori di capitalizzazione nel regime dell'interesse semplice ($\rightsquigarrow$ lineare) e in quello dello sconto commerciale ($\rightsquigarrow$ iperbolico) dall'altra (cioè tra $u_1(t)$ e $u_2(t)$), mentre non appare ovvio il confronto tra $u_2(t)$ e $u_3(t)$.

CONFRONTO TRA REGIMI

- Simmetricamente, risulta immediato il confronto tra fattori di attualizzazione nel regime dello sconto commerciale ($\rightsquigarrow$ lineare) e in quello dell'interesse composto ($\rightsquigarrow$ esponenziale) da una parte (cioè tra $v_2(t)$ e $v_3(t)$), e tra fattori di attualizzazione nel regime dello sconto commerciale ($\rightsquigarrow$ lineare) e in quello dell'interesse semplice ($\rightsquigarrow$ iperbolico) dall'altra (cioè tra $v_2(t)$ e $v_1(t)$), mentre non appare ovvio il confronto tra $v_1(t)$ e $v_3(t)$.
- In particolare:
  - ▷ per $0 < t < 1$ risulta $u_1(t) > u_3(t)$ e $u_1(t) > u_2(t)$, mentre per $1 < t < 1 + \frac{1}{i}$ si ha $u_1(t) < u_3(t)$ e $u_1(t) < u_2(t)$;
  - ▷ per $0 < t < 1$ risulta $v_2(t) > v_3(t)$ e $v_2(t) > v_1(t)$, mentre per $1 < t < 1 + \frac{1}{i}$ si ha $v_2(t) < v_3(t)$ e $v_2(t) < v_1(t)$.

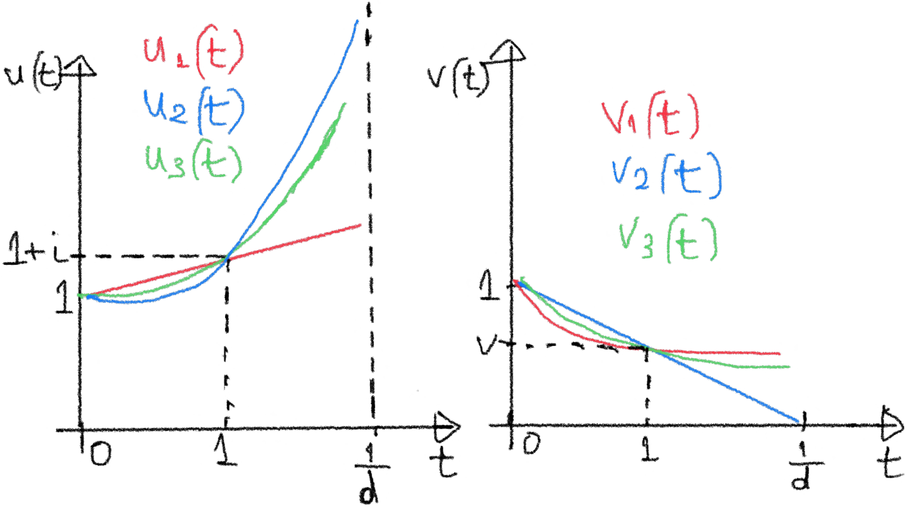
CONFRONTO TRA REGIMI

- Siccome però lavoriamo con leggi associate, in cui il fattore di attualizzazione è il reciproco di quello di capitalizzazione (o viceversa), diventa facile anche l'ultimo confronto:
  - ▷ per $0 < t < 1$, $u_1(t) > u_3(t) \Rightarrow v_1(t) = \frac{1}{u_1(t)} < \frac{1}{u_3(t)} = v_3(t)$;

    per $1 < t < 1 + \frac{1}{i}$, $u_1(t) < u_3(t) \Rightarrow v_1(t) = \frac{1}{u_1(t)} > \frac{1}{u_3(t)} = v_3(t)$;
  - ▷ per $0 < t < 1$, $v_2(t) > v_3(t) \Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{v_2(t)} < \frac{1}{v_3(t)} = u_3(t)$;

    per $1 < t < 1 + \frac{1}{i}$, $v_2(t) < v_3(t) \Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{v_2(t)} > \frac{1}{v_3(t)} = u_3(t)$.
- In conclusione, quindi:
  - ▷ se $t = 0$, $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 1$, $v_1(t) = v_2(t) = v_3(t) = 1$;
  - ▷ se $0 < t < 1$, $u_2(t) < u_3(t) < u_1(t)$, $v_1(t) < v_3(t) < v_2(t)$;
  - ▷ se $t = 1$, $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 1 + i$, $v_1(t) = v_2(t) = v_3(t) = \frac{1}{1+i}$;
  - ▷ se $1 < t < 1 + \frac{1}{i}$, $u_1(t) < u_3(t) < u_2(t)$, $v_2(t) < v_3(t) < v_1(t)$

Confronto tra regimi



MONTANTE NEL REGIME ESPONENZIALE

- Vediamo di definire correttamente come si forma il montante nel regime esponenziale, anche se ciò è stato delineato in maniera intuitiva per durate intere.
- Immaginiamo di partire da un importo unitario in 0 e vogliamo vedere qual è l'andamento del fattore di capitalizzazione $u(t)$. Facciamo le seguenti ipotesi:
  1. gli interessi vengono capitalizzati istante per istante;
  2. gli interessi prodotti nell'intervallo di tempo $[t, t+\Delta_t]$ (con $\Delta_t > 0$) sono proporzionali al capitale disponibile e all'ampiezza dell'intervallo, a meno di un termine "trascurabile".
- Vediamo di formalizzare quanto descritto a parole: gli interessi prodotti nell'intervallo sono dati da

$$\Delta u(t) \doteq u(t+\Delta_t) - u(t) = \delta \cdot u(t) \cdot \Delta_t + o(\Delta_t), \text{ con } \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{o(\Delta_t)}{\Delta_t} = 0$$

- La costante di proporzionalità $\delta (> 0)$ si chiama intensità istantanea d'interesse, o anche forza d'interesse.

MONTANTE NEL REGIME ESPONENZIALE

- OSSERVAZIONI
  - ▷ La prima ipotesi è stata sfruttata in quanto il capitale disponibile non è unitario (come in 0), bensì è pari a $u(t)$
    $\rightsquigarrow$ gli interessi maturati fino a t sono già stati capitalizzati, cioè sono già diventati capitale
  - ▷ Tuttavia in questo modo commettiamo un errore perché si tratta del montante all'inizio dell'intervallo mentre, per effetto della capitalizzazione continua, il montante cambia nell'intervallo
    $\rightsquigarrow$ Se però Δ_t è "sufficientemente piccolo" questo errore è "trascurabile"
    $\rightsquigarrow$ Si noti che questo errore non è semplicemente un infinitesimo di Δ_t bensì un infinitesimo di ordine superiore al I: infatti anche il primo termine $\delta u(t)\Delta_t$ risulta infinitesimo, di ordine 1, per cui il termine d'errore è trascurabile rispetto al primo termine

MONTANTE NEL REGIME ESPONENZIALE

- Se nell'equazione precedente dividiamo entrambi i membri per Δ_t otteniamo:

$$\frac{u(t+\Delta_t)-u(t)}{\Delta_t} = \delta \cdot u(t) + \frac{o(\Delta_t)}{\Delta_t}$$

$\rightsquigarrow$ A primo membro riconosciamo il rapporto incrementale di u

- Poiché esiste finito il limite del secondo membro, per $\Delta_t \to 0$,

$$\rightsquigarrow \quad \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{u(t+\Delta_t)-u(t)}{\Delta_t} = \lim_{\Delta_t \to 0} \left(\delta \cdot u(t) + \frac{o(\Delta_t)}{\Delta_t} \right) = \delta \cdot u(t)$$

allora la funzione u risulta derivabile, con derivata

$$u'(t) = \delta u(t)$$

MONTANTE NEL REGIME ESPONENZIALE

- Dividendo entrambi i membri per $u(t)$ ($\rightsquigarrow$ operazione lecita, $u(t)$ non può essere 0 perché parte da 1 in 0 e poi aumenta per effetto della capitalizzazione degli interessi) otteniamo:

  $$\frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{\mathrm{d}\ln u(t)}{\mathrm{d}t} = \delta \rightsquigarrow \ln u(t) = \delta t + C \rightsquigarrow u(t) = \mathrm{e}^{\delta t + C} = K\mathrm{e}^{\delta t}$$

  con $K = \mathrm{e}^C$
- Tenendo conto della condizione iniziale $u(0) = 1$

  $$\rightsquigarrow C = 0 \ \text{(ovvero } K = 1) \rightsquigarrow u(t) = \mathrm{e}^{\delta t}$$

- Inoltre, ricordando che $u(1) = \mathrm{e}^{\delta} = 1 + i$, si ottiene il collegamento tra l'intensità δ ed il tasso i:

  $$i = \mathrm{e}^{\delta} - 1, \qquad \delta = \ln(1+i)$$

- Abbiamo così ritrovato l'espressione precedente del fattore di capitalizzazione nel regime esponenziale: $u(t) = (1+i)^t$

CONFRONTO TRA δ, i, d

- Consideriamo le due funzioni $\delta \doteq f(i) = \ln(1+i)$ e $d \doteq g(\delta) = 1 - \mathrm{e}^{-\delta}$
- Entrambe sono concave, e la retta tangente al loro grafico nel punto $(0,0)$ coincide con la bisettrice del I e III quadrante

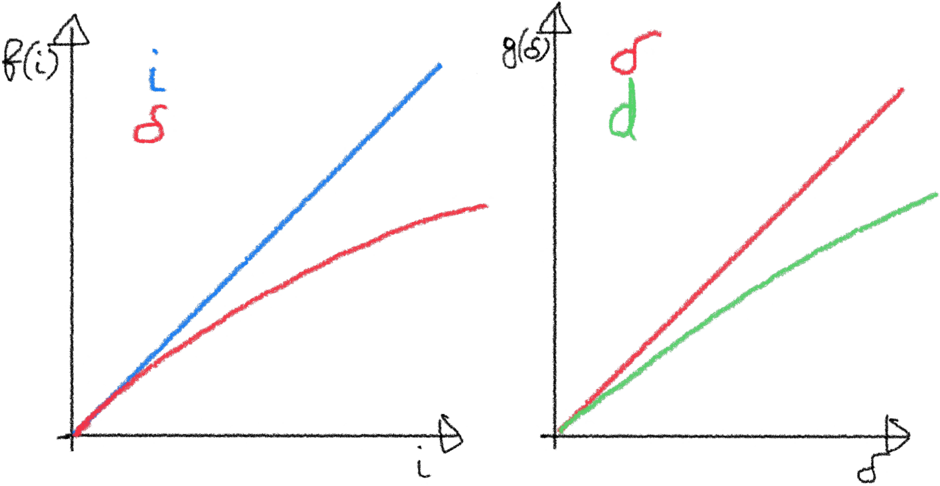
  $\rightsquigarrow$ Il loro grafico sta sempre sotto tale bisettrice

  $\rightsquigarrow$ $\delta < i \ \ \forall i > 0, \quad d < \delta \ \ \forall \delta > 0$

  $\rightsquigarrow$ $0 < d < \delta < i$
- Con l'approssimazione del II ordine in un intorno di 0 si ottiene:

$$\delta \simeq i - \frac{i^2}{2}\,, \qquad d \simeq \delta - \frac{\delta^2}{2}$$

CONFRONTO TRA δ, i, d



INTENSITÀ D'INTERESSE IN IPOTESI PIÙ GENERALI

- Più in generale, se si ammette che δ non sia necessariamente una costante bensì una funzione continua di t (a valori positivi), dalla

$$u(t+\Delta_t)-u(t)=\delta(t)u(t)\Delta_t+o(\Delta_t), \quad \text{con } \lim_{\Delta_t\to 0}\frac{o(\Delta_t)}{\Delta_t}=0$$

ripetendo esattamente gli stessi passaggi di prima, si ottiene:

$$\frac{u'(t)}{u(t)}=\frac{\mathrm{d}\ln u(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

- $\delta(t)$ può quindi essere interpretata come variazione percentuale del montante nell'unità di tempo in quanto, trascurando il termine d'errore $o(\Delta_t)$ (o, equivalentemente, approssimando la derivata con il rapporto incrementale), si ha

$$\delta(t)\simeq\frac{\frac{u(t+\Delta_t)-u(t)}{u(t)}}{\Delta_t}$$

INTENSITÀ D'INTERESSE IN IPOTESI PIÙ GENERALI

- Risolviamo ora l'equazione differenziale precedente:
  - ▷ Per il I Teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che la funzione δ, essendo continua su un intervallo, ammette primitive, ad es. $\int_0^t \delta(y)\mathrm{d}y$ è una sua primitiva
  - ▷ Ma anche $\ln u(t)$ è una sua primitiva per cui, trattandosi di funzioni definite su un intervallo, esse differiscono per una costante $\rightsquigarrow$ $\ln u(t) = \int_0^t \delta(y)\mathrm{d}y + C$ $\rightsquigarrow$ $u(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \delta(y)\mathrm{d}y + C}$
  - ▷ Tenendo conto della condizione iniziale $u(0) = 1 \rightsquigarrow C = 0$ $\rightsquigarrow u(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \delta(y)\mathrm{d}y}$
- Quindi, in generale, l'intensità istantanea d'interesse per le leggi che stiamo considerando (omogenee d'importo e uniformi nel tempo), dotate di fattore di capitalizzazione u derivabile con continuità, è definita dalla

$$\delta(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}$$

INTENSITÀ D'INTERESSE IN IPOTESI PIÙ GENERALI

- In particolare, tornando ad indiciare i fattori di capitalizzazione e le relative intensità, si ottiene:
  - ▷ nel regime dell'interesse semplice $\rightsquigarrow$ intensità decrescente

$$u_1(t) = 1 + it \rightsquigarrow \delta_1(t) = \frac{u_1'(t)}{u_1(t)} = \frac{i}{1+it}$$

  - ▷ nel regime dello sconto commerciale $\rightsquigarrow$ intensità crescente

$$u_2(t) = \frac{1}{1-dt} \rightsquigarrow \delta_2(t) = \frac{u_2'(t)}{u_2(t)} = \frac{d}{(1-dt)^2}(1-dt) = \frac{d}{1-dt}$$

  - ▷ nel regime esponenziale $\rightsquigarrow$ intensità costante (come già noto)

$$u_3(t) = \mathrm{e}^{\delta t} \rightsquigarrow \delta_3(t) = \frac{u_3'(t)}{u_3(t)} = \frac{\delta \mathrm{e}^{\delta t}}{\mathrm{e}^{\delta t}} = \delta$$

Confronto tra intensità

- $\delta_1(t) = \delta_3(t)$

$$\rightsquigarrow \frac{i}{1+it} = \delta \rightsquigarrow i = \delta + \delta it \rightsquigarrow t = \frac{i-\delta}{\delta i} = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}$$

- $\delta_2(t) = \delta_3(t)$

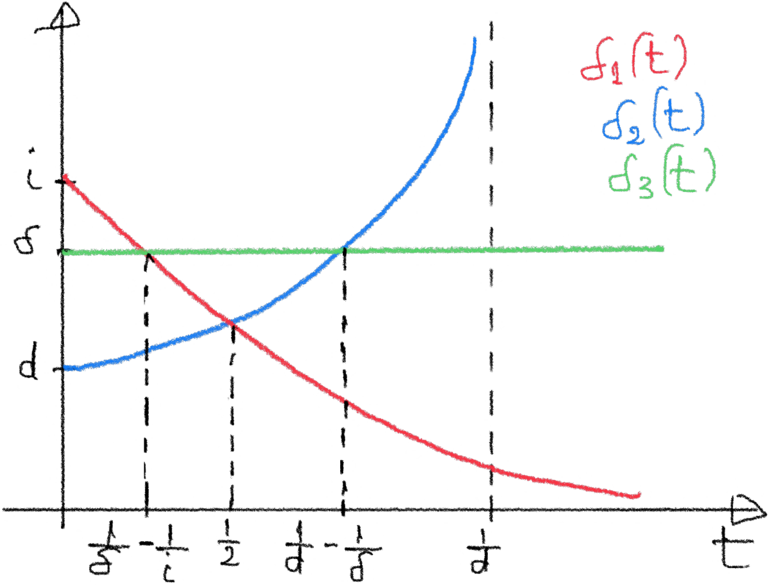
$$\rightsquigarrow \frac{d}{1-dt} = \delta \rightsquigarrow d = \delta - \delta dt \rightsquigarrow \delta dt = \delta - d \rightsquigarrow t = \frac{\delta - d}{\delta d} = \frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}$$

- $\delta_1(t) = \delta_2(t)$

$$\rightsquigarrow \frac{i}{1+it} = \frac{d}{1-dt} \rightsquigarrow i - idt = d + idt \rightsquigarrow 2idt = i - d$$

$$\rightsquigarrow t = \frac{i-d}{2id} = \frac{\frac{1}{d} - \frac{1}{i}}{2} = \frac{\frac{1}{iv} - \frac{1}{i}}{2} = \frac{\frac{1+i-1}{i}}{2} = \frac{1}{2}$$

CONFRONTO TRA INTENSITÀ



DIMENSIONE DELLE GRANDEZZE FINANZIARIE

- Fin qui abbiamo, correttamente, chiamato tasso il tasso d'interesse i e il tasso di sconto d, e intensità (o forza) d'interesse δ, nel regime esponenziale, e più in generale $\delta(t)$, negli altri regimi.
- Si tratta, in effetti, di grandezze di "dimensione" diversa: il tasso è un puro numero, cioè è adimensionale, mentre l'intensità ha la dimensione di reciproco di un tempo.
- Anche i fattori di capitalizzazione $u(t)$ e di attualizzazione $v(t)$ sono puri numeri, cosicché se li moltiplichiamo per il capitale (iniziale o finale), che è un importo, otteniamo a sua volta un importo, rispettivamente il montante e il valore attuale, così come sono importi l'interesse I e lo sconto D.

DIMENSIONE DELLE GRANDEZZE FINANZIARIE

- Se rapportiamo l'interesse I (o lo sconto D) al tempo t in cui esso è stato prodotto ($\rightsquigarrow \frac{\text{importo}}{\text{tempo}}$), otteniamo quello che si chiama flusso d'interesse (o, rispettivamente, flusso di sconto) relativo ad un periodo di durata t $\rightsquigarrow$ si potranno così avere flussi annui, semestrali, istantanei, ...

- Ad esempio, nel regime esponenziale:

  ▷ $\frac{C(e^{\delta}-1)}{1}$ $\rightsquigarrow$ flusso annuo d'interesse

  ▷ $\frac{C(e^{\frac{\delta}{2}}-1)}{\frac{1}{2}} = 2C(e^{\frac{\delta}{2}}-1)$ $\rightsquigarrow$ flusso semestrale d'interesse

  ▷ $\lim_{t\to 0} \frac{C(e^{\delta t}-1)}{t} = C \ln e^{\delta} = C\delta$ $\rightsquigarrow$ flusso istantaneo d'interesse

DIMENSIONE DELLE GRANDEZZE FINANZIARIE

- Il rapporto tra il flusso istantaneo $C\delta$ e l'importo C fornisce l'intensità istantanea d'interesse δ, che ha la dimensione di

$$\frac{\text{flusso}}{\text{importo}} = \frac{\frac{\text{importo}}{\text{tempo}}}{\text{importo}} = \frac{\text{numero}}{\text{tempo}}$$

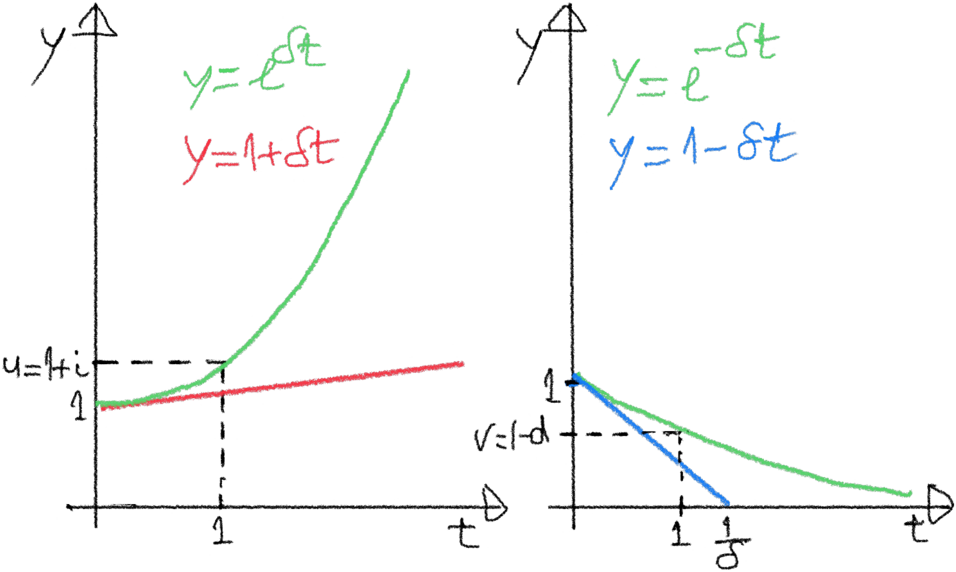
  cioè di reciproco di un tempo, e questo vale per ogni tipo di intensità, anche non istantanea.

- Ad esempio $\frac{(\mathrm{e}^{\delta}-1)}{1}(=i)$, $\frac{(\mathrm{e}^{\frac{\delta}{2}}-1)}{\frac{1}{2}}$, ..., sono delle intensità (non istantanee), che più avanti chiameremo impropriamente tassi nominali convertibili.

DIMENSIONE DELLE GRANDEZZE FINANZIARIE

- In particolare, se consideriamo il regime dell'interesse semplice e quello dello sconto commerciale, che apparentemente sono i più semplici, notiamo che sono dimensionalmente scorretti.
- Infatti $I = C \cdot i \cdot t$, rispettivamente $D = M \cdot d \cdot t$, deve dare un importo, ma essendo sia C che M degli importi, affinché ciò avvenga i e d dovrebbero essere intensità, anziché tassi, quindi reciproco di un tempo, in modo che it e dt siano puri numeri.
- Per aggiustare le cose, però, potremmo sempre pensare che le leggi, lineari, dell'interesse semplice e dello sconto commerciale siano in realtà delle approssimazioni lineari di quella, corretta dimensionalmente, dell'interesse composto (esponenziale):
  - ▷ $\mathrm{e}^{\delta t} = 1 + \delta t + \frac{\delta^2 t^2}{2} + \frac{\delta^3 t^3}{3!} + \cdots \simeq 1 + \delta \cdot t$
    $\rightsquigarrow$ montante nel regime dell'interesse semplice
  - ▷ $\mathrm{e}^{-\delta t} = 1 - \delta t + \frac{\delta^2 t^2}{2} - \frac{\delta^3 t^3}{3!} + \cdots \simeq 1 - \delta \cdot t$
    $\rightsquigarrow$ valore attuale nel regime dello sconto commerciale

DIMENSIONE DELLE GRANDEZZE FINANZIARIE



Dimensione delle grandezze finanziarie

- Comunque d'ora innanzi opereremo sempre nel regime esponenziale (salvo esplicitamente dichiarare il contrario), quindi $i = e^{\delta} - 1$ è un tasso ($\rightsquigarrow$ puro numero) mentre $\delta = \ln(1+i)$ è un'intensità ($\rightsquigarrow$ reciproco di un tempo), e useremo correttamente i termini tasso/intensità.
- Spesso, però, specie nei corsi di Matematica finanziaria più avanzata (in particolare di Finanza matematica) si utilizza, impropriamente, il termine tasso anche se ci si riferisce ad un'intensità.
- Talvolta si aggiunge l'aggettivo "istantaneo", oppure "logaritmico", e si parla quindi di tasso istantaneo, o di tasso logaritmico, o anche di log-rendimento ($\rightsquigarrow$ log-return).

DIMENSIONE DELLE GRANDEZZE FINANZIARIE

- Si tratta sempre di “brutte” traduzioni dall’inglese dove, pur esistendo il termine “intensity”, o “force of interest”, si usa comunemente “rate” ($\rightsquigarrow$ tasso) sia per riferirsi ad i che a δ.
- Al limite, se proprio si vuole distinguere tra i due, si aggiunge l’aggettivo “annual-compounded” ($\rightsquigarrow$ composto annualmente) per riferirsi ad i, e “continuously compounded” ($\rightsquigarrow$ composto continuamente) per riferirsi a δ.

TASSI EQUIVALENTI

- Finora abbiamo assunto l'anno come unità di misura del tempo, e tutte le quantità incontrate (tasso d'interesse i e di sconto d, intensità istantanea d'interesse δ, fattore di capitalizzazione u e di attualizzazione v) sono state definite su base annua.
- Talvolta, però, potrebbe far comodo usare un'unità di misura diversa: se, ad es., prendiamo come unità di misura del tempo un intervallo di ampiezza $\tau(> 0)$ anni, un periodo di t anni misurerà t/τ.
- Diamo allora la seguente definizione:

  Due tassi (o intensità), riferiti ad unità di misura diverse del tempo, si dicono equivalenti, in un fissato regime, se, con riferimento allo stesso capitale e allo stesso intervallo temporale, producono lo stesso interesse o, simmetricamente, lo stesso sconto ($\rightsquigarrow$ quindi anche lo stesso montante o valore attuale).

TASSI EQUIVALENTI

- In particolare, siamo interessati al caso in cui l'unità di misura del tempo è il k-esimo d'anno, con k intero positivo (cioè $\tau = \frac{1}{k}$)
  $\rightsquigarrow$ semestre se $k = 2$, quadrimestre se $k = 3$, trimestre se $k = 4$, bimestre se $k = 6$, mese se $k = 12$, settimana se $k = 52$, giorno se $k = 365$, ...
  $\rightsquigarrow$ Parleremo quindi di tassi (o intensità, o fattori) semestrali, quadrimestrali, trimestrali, bimestrali, mensili, settimanali, giornalieri, ...
- Per convenzione, indiciamo con k le quantità finora incontrate, se riferite al k-esimo d'anno.
- Supponiamo di voler passare, per semplicità, da tassi relativi a frazioni d'anno ($k > 1$) a tassi annui (o viceversa)
  $\rightsquigarrow$ Per passare invece dal tasso i_k al tasso i_h con $k \neq h$ e $h > 1$, $k > 1$, basterebbe passare da i_k a i e poi da i a i_h

TASSI EQUIVALENTI

- Consideriamo capitali unitari, e imponiamo l'uguaglianza fra i montanti (o, equivalentemente, i valori attuali) calcolati con i tassi corrispondenti all'unità di misura del tempo prescelta.
- Sia $t > 0$ la misura in anni di un generico intervallo di tempo
  $\rightsquigarrow$ La misura dello stesso intervallo, in k-esimi d'anno, sarà $k \cdot t$

  - ▷ regime dell'interesse semplice
    $1 + it = 1 + i_k kt \quad \Rightarrow \quad i = k i_k$ o, equivalentemente, $i_k = \frac{i}{k}$
  - ▷ regime dell'interesse composto
    $(1+i)^t = (1+i_k)^{kt} \Rightarrow i = (1+i_k)^k - 1$ o, equiv., $i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$

    Se volessimo lavorare con le intensità, si avrebbe invece:
    $e^{\delta t} = e^{\delta_k kt} \quad \Rightarrow \quad \delta = k\delta_k$ o, equivalentemente, $\delta_k = \frac{\delta}{k}$
  - ▷ regime dello sconto commerciale
    $1 - dt = 1 - d_k kt \quad \Rightarrow \quad d = k d_k$ o, equivalentemente, $d_k = \frac{d}{k}$

  $\rightsquigarrow$ $u_k = 1 + i_k = e^{\delta_k}, \; v_k = \frac{1}{u_k}, \; d_k = 1 - v_k = i_k v_k$

TASSI NOMINALI

- Nella pratica, anche quando i tassi vengono applicati con riferimento a k-esimi d'anno (ad es. nel caso delle obbligazioni con pagamento degli interessi ogni semestre) si preferisce dare, come informazione sintetica, un tasso riferito ad un periodo di ampiezza 1 anno che non è però, in generale, il tasso annuo i.
- Si definisce allora tasso nominale convertibile k volte l'anno la seguente quantità:

$$j_k = k i_k$$

$\rightsquigarrow$ $j_k = \dfrac{i_k}{\frac{1}{k}} = \dfrac{\text{numero}}{\text{tempo}}$

$\rightsquigarrow$ j_k ha la dimensione di reciproco di un tempo, cioè di intensità

TASSI NOMINALI

- Nel regime dell'interesse semplice $j_k = k\frac{i}{k} = i$
- Nel regime esponenziale $j_k = k\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right]$
  - ▷ Se $k > 1$, sviluppando in serie $i_k = \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right]$ per $0 < i < 1$ si constata che $i_k < \frac{i}{k} \rightsquigarrow j_k < i$
  - ▷ Ciò scende anche dal fatto che, data la convessità della funzione esponenziale, la successione dei j_k risulta strettamente decrescente rispetto a $k \rightsquigarrow$ se $k > 1,\ j_k < j_1 = i$
  - ▷ In particolare, l'estremo inferiore di questa successione è pari al

$$\lim_{k\to+\infty} j_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+i)^x - 1}{x} = \ln(1+i) = \delta$$

$\rightsquigarrow$ In conclusione, dunque, $\delta < j_k \leq i \ \forall k \in \mathbb{N}^+$

TASSI NOMINALI

- L'interpretazione geometrica del tasso nominale convertibile k volte all'anno nel regime esponenziale è quella di coefficiente angolare della retta secante il grafico della funzione

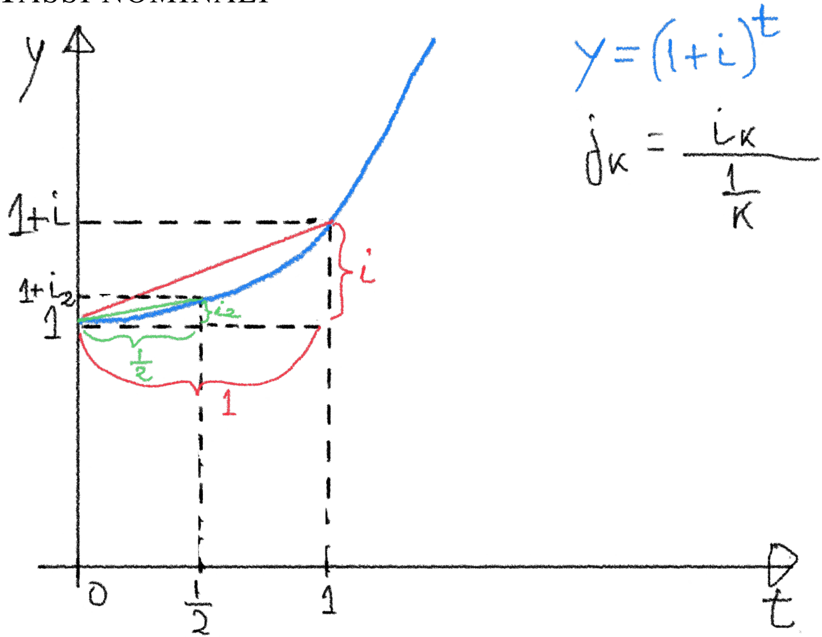
$$u(t) = (1+i)^t \text{ nei punti } (0,1) \text{ e } (\frac{1}{k}, 1+i_k)$$

ovvero la tangente dell'angolo che questa retta forma con il verso positivo dell'asse delle ascisse

$\rightsquigarrow$ Per la convessità di u l'inclinazione di queste rette, e quindi j_k, diminuisce all'aumentare di k

$\rightsquigarrow$ La posizione limite di queste rette secanti, quando $k \to +\infty$ (ossia $\frac{1}{k} \to 0$), è proprio la retta tangente al grafico di u nel punto $(0,1)$, che ha coefficiente angolare $\delta = \ln(1+i)$

TASSI NOMINALI



Situazioni finanziarie elementari

- Vediamo ora di generalizzare quanto visto nei tre precedenti esempi di leggi finanziarie, al fine anche di definirne le proprietà.
- Partiamo innanzitutto dalla definizione di situazione finanziaria elementare come una coppia

$$\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{importo} \\ \text{data} \end{pmatrix}$$

  che definisce la disponibilità di un importo $S(>0)$ all'epoca T.
- Supponiamo che in una fissata epoca t_0, convenzionalmente $= 0$, vengano definite delle relazioni di preferibilità e di indifferenza tra situazioni finanziarie elementari con data $T \geq t_0$.

SITUAZIONI FINANZIARIE ELEMENTARI

- In altri termini, data una qualunque coppia di situazioni finanziarie elementari $\binom{S_1}{T_1}$ e $\binom{S_2}{T_2}$ (con $S_1 > 0$, $S_2 > 0$, $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$), supponiamo che un soggetto economico sia sempre in grado di dire che

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \succ \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \succ \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathfrak{I} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

dove $\succ$ indica la preferibilità stretta di una situazione all'altra mentre $\mathfrak{I}$ indica l'indifferenza tra le due (peraltro già utilizzata quando abbiamo definito i tassi di interesse e di sconto nonché i fattori di capitalizzazione e di attualizzazione).

POSTULATI

- Ci concentriamo, in particolare, sulla relazione di indifferenza $\mathfrak{I}$ e ci chiediamo, dati S_1, T_1 e T_2, qual è l'importo S_2 in T_2 che giudichiamo equo scambiare con S_1 in T_1.
- A questo proposito è ragionevole assumere le seguenti ipotesi, che accogliamo come Postulati:

(P1) Qualunque siano S_1, T_1 e T_2, esiste unico un importo S_2 in T_2 che si reputa equo scambiare contro S_1 in T_1, ovvero

$$\binom{S_1}{T_1}\mathfrak{I}\binom{S_2}{T_2},\ \binom{S_1}{T_1}\mathfrak{I}\binom{S_2'}{T_2}\ \Rightarrow\ S_2 = S_2'$$

$\rightsquigarrow$ Quindi c'è un legame funzionale tra la terna (S_1, T_1, T_2) e S_2, diciamo $S_2 = f(S_1, T_1, T_2)$

$\rightsquigarrow$ La funzione f, a valori strettamente positivi, si chiama legge finanziaria, o legge di scambio

POSTULATI

(P2) Monotonia d'importo

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathfrak{I} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} S'_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathfrak{I} \begin{pmatrix} S'_2 \\ T_2 \end{pmatrix}, \; S'_1 > S_1 \;\Rightarrow\; S'_2 > S_2$$

$\rightsquigarrow$ La funzione f risulta strettamente crescente rispetto alla prima variabile

(P3) La relazione d'indifferenza gode della proprietà riflessiva:

$$\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \mathfrak{I} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \quad \forall\, S, T$$

$\rightsquigarrow$ Tenendo conto anche di (P1), ciò significa che $f(S,T,T) = S$, ovvero che si giudica equo scambiare due importi nello stesso istante solo se risultano uguali fra loro

POSTULATI

- Quindi, in particolare, si ha che

$$\binom{S}{T} \mathfrak{I} \binom{S'}{T} \Leftrightarrow S = S'$$

- Infatti la $(\Rightarrow)$ scende dai Postulati (P3) e (P1):

$$\binom{S}{T} \mathfrak{I} \binom{S}{T}, \binom{S}{T} \mathfrak{I} \binom{S'}{T} \Rightarrow S = S'$$

mentre la $(\Leftarrow)$ scende dal Postulato (P3) (proprietà riflessiva)

LEGGI DI CAPITALIZZAZIONE E DI ATTUALIZZAZIONE

- Fin qui non abbiamo fatto ipotesi sull'ordinamento delle date T_1 e T_2: potrebbe quindi essere $T_1 \leq T_2$ oppure $T_1 \geq T_2$.
- Per distinguere le due situazioni, indichiamo con f_M ed f_A la f ristretta ai due insiemi, ovvero:

$$S_2 = f(S_1, T_1, T_2) = \begin{cases} f_M(S_1, T_1, T_2) & \text{se } T_1 \leq T_2 \\ f_A(S_1, T_1, T_2) & \text{se } T_1 \geq T_2 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ I Postulati (P1) e (P3) implicano $f_M(S, T, T) = f_A(S, T, T) = S$

- Con f_M, dunque, si portano avanti importi nel tempo $\rightsquigarrow$ f_M è la legge di capitalizzazione, in base a cui $S_2 = f_M(S_1, T_1, T_2)$ è il montante in T_2 del capitale S_1 esigibile in $T_1 (< T_2)$
- Simmetricamente, con f_A si portano indietro importi nel tempo $\rightsquigarrow$ f_A è la legge di attualizzazione, per cui $S_2 = f_A(S_1, T_1, T_2)$ è il valore attuale in T_2 del capitale S_1 esigibile in $T_1 (> T_2)$

Leggi associate

- In generale, non è detto che, se $T_1 < T_2$,

$$S_2 = f_M(S_1, T_1, T_2) \;\Rightarrow\; S_1 = f_A(S_2, T_2, T_1)$$

  cioè che le due leggi, di attualizzazione e capitalizzazione, siano associate (o coniugate).
- Se questo accade, f_A è l'inversa di f_M rispetto alla prima variabile per ogni fissata coppia (T_1, T_2)
  $\rightsquigarrow$ Tornando alla funzione f, si ha quindi:

$$S_2 = f(S_1, T_1, T_2) \;\Leftrightarrow\; S_1 = f(S_2, T_2, T_1) \;\; \forall\, T_1, T_2$$

- In particolare, se operiamo con leggi di capitalizzazione e attualizzazone associate, la relazione d'indifferenza gode della proprietà simmetrica:

$$\binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_2}{T_2} \;\Rightarrow\; \binom{S_2}{T_2} \mathfrak{I} \binom{S_1}{T_1}$$

Omogeneità d'importo

- Vediamo ora alcune proprietà, soddisfatte o meno dalle leggi finanziarie, che definiamo tramite la relazione d'indifferenza cui la legge finanziaria è associata.

(OI) La legge finanziaria si definisce omogenea d'importo se

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathfrak{I} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} KS_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathfrak{I} \begin{pmatrix} KS_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \;\; \forall\, K > 0$$

$\rightsquigarrow$ In tal caso, essendo in particolare

$$f(S_1, T_1, T_2) = S_2 \;\Rightarrow\; f(KS_1, T_1, T_2) = KS_2 = Kf(S_1, T_1, T_2) \;\; \forall\, K > 0$$

la funzione f è lineare omogenea rispetto alla prima variabile

$\rightsquigarrow$ Basta allora definirla per importi unitari

Omogeneità d'importo

- Sia $\varphi(T_1,T_2) \doteq f(1,T_1,T_2)$ $(> 0 \ \forall\, T_1,T_2)$.
- Poiché

$$\binom{1}{T_1}\mathfrak{I}\binom{\varphi(T_1,T_2)}{T_2} \Rightarrow \binom{S_1}{T_1}\mathfrak{I}\binom{S_1\varphi(T_1,T_2)}{T_2}$$

$$\rightsquigarrow f(S_1,T_1,T_2) = S_1 f(1,T_1,T_2) = S_1\varphi(T_1,T_2)$$

- $\varphi(T_1,T_2)$ si chiama fattore di scambio.
- Essendo $f(S;T,T) = Sf(1,T,T) = S \rightsquigarrow f(1,T,T) = \varphi(T,T) = 1$
- Inoltre, se stiamo usando leggi associate, $\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_1) = 1$
- In particolare, poniamo

$$\varphi(T_1,T_2) = \begin{cases} u(T_1,T_2)(=f_M(1,T_1,T_2)) & \text{se } T_1 \le T_2 \\ v(T_2,T_1)(=f_A(1,T_1,T_2)) & \text{se } T_1 \ge T_2 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow u(T,T) = v(T,T) = 1 \ \forall\, T$

$\rightsquigarrow$ Per leggi associate, $u(T_1,T_2)v(T_1,T_2) = 1 \ \forall\, T_1 \le T_2$

OMOGENEITÀ D'IMPORTO

- ▷ Nella notazione per la legge si scambio f e il fattore di scambio φ le date di partenza e di arrivo possono essere qualsiasi, non necessariamente ordinate in senso crescente o decrescente.
- ▷ Quando si rappresenta la legge di scambio f tramite la funzione di capitalizzazione f_M o di attualizzazione f_A le date di partenza e di arrivo sono ordinate in senso non decrescente o, rispettivamente, non crescente.
- ▷ Quando invece rappresentiamo il fattore di scambio φ tramite u o v le date sono sempre ordinate in senso non decrescente.
- ▷ Nella pratica la proprietà di omogeneità d'importo non è rispettata, ma è invece una condizione necessaria per l'ipotesi fondamentale che faremo quando ci collocheremo in un ambiente di mercato, e cioè l'assenza di opportunità di arbitraggio.

DIVISIBILITÀ DEGLI IMPORTI

▷ Teorema di divisibilità degli importi:

Sia f una legge omogenea d'importo. Vale la seguente implicazione:

$$\begin{cases} \binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_1'}{T_2} \\ \binom{S_2}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_2'}{T_2} \\ \dots \\ \binom{S_n}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_n'}{T_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \binom{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_1' + S_2' + \cdots + S_n'}{T_2}$$

DIVISIBILITÀ DEGLI IMPORTI

▷ Dimostrazione: Per ipotesi sappiamo che

$$\begin{cases} S_1' = S_1\varphi(T_1,T_2) \\ S_2' = S_2\varphi(T_1,T_2) \\ \dots \\ S_n' = S_n\varphi(T_1,T_2) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow S_1' + S_2' + \cdots + S_n' = S_1\varphi(T_1,T_2) + S_2\varphi(T_1,T_2) + \cdots + S_n\varphi(T_1,T_2)$$
$$= (S_1 + S_2 + \ldots S_n)\varphi(T_1,T_2) \quad \square$$

▷ Interpretazione: Anche se si "impacchettano" tante "piccole" operazioni di scambio in un'unica "grossa" operazione il risultato non cambia.

Uniformità nel tempo

(UT) La legge finanziaria si definisce uniforme nel tempo se

$$\binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_2}{T_2} \Rightarrow \binom{S_1}{T_1+\tau} \mathfrak{I} \binom{S_2}{T_2+\tau} \ \forall\, \tau \in \mathbb{R} : T_1+\tau \geq 0,\, T_2+\tau \geq 0$$

$\rightsquigarrow$ In questo caso la legge di capitalizzazione (o di attualizzazione) dipende esclusivamente dalla distanza che intercorre tra le due date T_1 e T_2, cioè $|T_1 - T_2|$, e non dalle date singolarmente considerate

$\rightsquigarrow$ Tale distanza di chiama durata dell'operazione finanziaria di scambio tra i due importi (dell'investimento, se si portano avanti importi nel tempo, del differimento se invece si portano indietro)

UNIFORMITÀ NEL TEMPO

▷ Nel caso particolare in cui la legge finanziaria è sia omogenea d'importo che uniforme nel tempo si pone

$$\varphi(T_1,T_2)=\bar{\varphi}(T_2-T_1)=\begin{cases}\bar{u}(T_2-T_1) & \text{se } T_1\le T_2\\ \bar{v}(T_1-T_2) & \text{se } T_1\ge T_2\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\bar{u}(t) & \text{se } T_2=T_1+t\\ \bar{v}(t) & \text{se } T_2=T_1-t\end{cases}$$

dove $t=|T_1-T_2|$ e $\bar{u}(t)\doteq u(0,t)$, $\bar{v}(t)\doteq v(0,t)$

⇝ Per la proprietà riflessiva si ha, in particolare, $\bar{u}(0)=\bar{v}(0)=1$

▷ D'ora innanzi, con un abuso di notazione, indicheremo queste funzioni con u e v, senza soprassegno ⇝ Ci ritroviamo dunque con la stessa notazione introdotta nei casi dell'interesse semplice, dello sconto commerciale e dell'interesse composto, che sono esempi di leggi omogenee d'importo e uniformi nel tempo

UNIFORMITÀ NEL TEMPO

- Nella pratica le leggi finanziarie non sono mai uniformi nel tempo: le condizioni contrattuali di mercato non solo cambiano nel tempo ma addirittura lo fanno in maniera aleatoria.
- Le funzioni u e v, sia nel caso di leggi uniformi nel tempo oppure no, purché omogenee d'importo, si chiamano fattori di capitalizzazione e di attualizzazione.
- In particolare, se operiamo con leggi sia omogenee d'importo che uniformi nel tempo e la durata dell'operazione è unitaria, ritroviamo i simboli precedentemente incontrati:

$$u \doteq u(1) = 1 + i = e^{\delta}, \quad v \doteq v(1) = 1 - d = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$$

SCINDIBILITÀ

(SC) La legge finanziaria si definisce scindibile se la relazione d'indifferenza ad essa associata gode della proprietà transitiva ($\rightsquigarrow$ Condizione di scindibilità di Cantelli, 1914):

$$\binom{S_1}{T_1}\mathfrak{I}\binom{S_2}{T_2},\ \binom{S_2}{T_2}\mathfrak{I}\binom{S_3}{T_3} \ \Rightarrow\ \binom{S_1}{T_1}\mathfrak{I}\binom{S_3}{T_3}$$

$\triangleright$ L'implicazione deve valere $\forall\, T_1, T_2, T_3$; in particolare, se vale (solo) per $T_1 < T_2 < T_3$ si parla di scindibilità prospettiva, e di scindibilità retrospettiva se invece $T_1 > T_2 > T_3$.

$\rightsquigarrow$ Se una legge è scindibile, lo è sia prospettivamente che retrospettivamente, mentre non vale il viceversa

INTERPRETAZIONE DELLA SCINDIBILITÀ

Per i Postulati (P1) e (P3) della relazione d'indifferenza l'implicazione che definisce la scindibilità è automaticamente verificata quando $T_1 = T_2$ o $T_2 = T_3$ o $T_1 = T_3$, in cui dev'essere $S_1 = S_2$ o, rispettivamente, $S_2 = S_3$, o $S_1 = S_3$. Infatti

- se $T_1 = T_2$ si ottiene:

$$\binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_1}{T_1}, \binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_3}{T_3} \Rightarrow \binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_3}{T_3}$$

- se $T_2 = T_3$ si ha:

$$\binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_2}{T_2}, \binom{S_2}{T_2} \mathfrak{I} \binom{S_2}{T_2} \Rightarrow \binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_2}{T_2}$$

- Se $T_1 = T_3$ l'implicazione è vera in quanto il conseguente è vero per la proprietà riflessiva (anche l'antecedente è vero se si lavora con leggi associate):

$$\binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_2}{T_2}, \binom{S_2}{T_2} \mathfrak{I} \binom{S_1}{T_1} \Rightarrow \binom{S_1}{T_1} \mathfrak{I} \binom{S_1}{T_1}$$

INTERPRETAZIONE DELLA SCINDIBILITÀ

▷ scindibilità prospettiva ($T_1 < T_2 < T_3$)

Se si investe il capitale S_1 in T_1 fino a T_2, si ritira il relativo montante S_2 in T_2 e lo si reinveste immediatamente fino a T_3, si ottiene lo stesso risultato (cioè lo stesso montante S_3) che sarebbe stato ottenuto investendo direttamente S_1 da T_1 a T_3

$\rightsquigarrow$ Si può quindi pensare di "scindere" l'operazione di investimento da T_1 a T_3 in due sotto operazioni: investimento del capitale iniziale da T_1 a T_2, e poi del montante da T_2 a T_3, con lo stesso risultato

INTERPRETAZIONE DELLA SCINDIBILITÀ

▷ scindibilità retrospettiva ($T_1 > T_2 > T_3$)

Se si anticipa all'istante T_2 il capitale S_1, disponibile in T_1, ricevendone il valore attuale S_2, e poi lo si anticipa ulteriormente fino a T_3, si ottiene lo stesso risultato (cioè lo stesso valore attuale S_3) che si sarebbe ottenuto anticipando direttamente S_1 da T_1 a T_3

$\rightsquigarrow$ Anche qui l'operazione di differimento da T_1 a T_3 è stata "scissa" in due sotto operazioni: anticipo del capitale finale da T_1 a T_2, e poi del suo valore attuale da T_2 a T_3, con lo stesso risultato

INTERPRETAZIONE DELLA SCINDIBILITÀ

Riesce meno naturale l'interpretazione della scindibilità in generale, quando le date non sono ordinate, ad es. $T_1 < T_2$ e $T_2 > T_3$ oppure $T_1 > T_2$ e $T_2 < T_3$, ma si può comunque tentare di farlo nei quattro casi specifici:

- $T_1 < T_3 < T_2 \rightsquigarrow$ si ottiene lo stesso risultato capitalizzando da T_1 a T_3 oppure capitalizzando prima da T_1 a T_2 e poi scontando da T_2 a T_3
- $T_2 < T_1 < T_3 \rightsquigarrow$ si ottiene lo stesso risultato capitalizzando da T_1 a T_3 oppure scontando prima da T_1 a T_2 e poi capitalizzando da T_2 a T_3
- $T_2 < T_3 < T_1 \rightsquigarrow$ si ottiene lo stesso risultato scontando da T_1 a T_3 oppure scontando prima da T_1 a T_2 e poi capitalizzando da T_2 a T_3
- $T_3 < T_1 < T_2 \rightsquigarrow$ si ottiene lo stesso risultato scontando da T_1 a T_3 oppure capitalizzando prima da T_1 a T_2 e poi scontando da T_2 a T_3

Scindibilità

- Nella pratica le leggi finanziarie non sono scindibili perché le condizioni contrattuali cambiano nel tempo (in maniera aleatoria); vedremo tuttavia una proprietà, per certi versi "simile" alla scindibilità, quando parleremo di tassi (o prezzi) forward.

- In termini di leggi finanziarie, la scindibilità può essere espressa, in generale, come

$$f(S_1, T_1, T_3) = f(f(S_1, T_1, T_2), T_2, T_3)$$

(utilizzando, eventualmente, le due restrizione f_M o f_A a seconda dell'ordinamento tra le date).

Scindibilità

- E' tuttavia interessante vedere che cosa succede quando la legge finanziaria è omogenea d'importo; in questo caso possiamo esprimere la scindibilità tramite il fattore di scambio φ:

$$\varphi(T_1,T_3)=\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3) \quad \forall\, T_1,T_2,T_3$$

$\rightsquigarrow$ Per la scindibilità prospettiva, in particolare, abbiamo

$$u(T_1,T_3)=u(T_1,T_2)u(T_2,T_3) \quad \forall\, T_1\leq T_2\leq T_3$$

mentre per la scindibilità retrospettiva si ha

$$v(T_3,T_1)=v(T_2,T_1)v(T_3,T_2) \quad \forall\, T_1\geq T_2\geq T_3$$

- Se inoltre la legge è anche uniforme nel tempo, la scindibilità prospettiva e retrospettiva si possono esprimere come

$$u(t+\tau)=u(t)u(\tau), \quad \text{con } t=T_2-T_1 \text{ e } \tau=T_3-T_2$$

e, rispettivamente:

$$v(t+\tau)=v(t)v(\tau), \quad \text{con } t=T_1-T_2 \text{ e } \tau=T_2-T_3$$

SCINDIBILITÀ

Verifichiamo ora che cosa succede nei tre regimi visti finora:

▷ Interesse semplice

Consideriamo il caso della scindibilità prospettiva, per cui fissiamo arbitrariamente tre date T_1, T_2, T_3 con $T_1 < T_2 < T_3$ e poniamo $t = T_2 - T_1 (> 0)$ e $\tau = T_3 - T_2 (> 0)$.

Poiché $u(y) = 1 + iy$ otteniamo

$$u(t+\tau) = 1 + i(t+\tau) = 1 + it + i\tau$$

$$u(t)u(\tau) = (1+it)(1+i\tau) = 1 + it + i\tau + i^2 t\tau$$

$\rightsquigarrow$ $u(t+\tau) \neq u(t)u(\tau)$

$\rightsquigarrow$ Questa legge non è prospettivamente scindibile

$\rightsquigarrow$ Non è scindibile

(Si può verificare che non lo è nemmeno retrospettivamente)

SCINDIBILITÀ

▷ Sconto commerciale

Consideriamo il caso della scindibilità retrospettiva, per cui fissiamo arbitrariamente T_1, T_2, T_3 con $T_3 + \frac{1}{d} > T_1 > T_2 > T_3$ e poniamo $t = T_1 - T_2 (> 0)$ e $\tau = T_2 - T_3 (> 0)$.

Poiché $v(y) = 1 - dy$ otteniamo

$$v(t+\tau) = 1 - d(t+\tau) = 1 - dt - d\tau$$

$$v(t)v(\tau) = (1-dt)(1-d\tau) = 1 - dt - d\tau + d^2 t\tau$$

$\rightsquigarrow$ $v(t+\tau) \neq v(t)v(\tau)$

$\rightsquigarrow$ Questa legge non è retrospettivamente scindibile

$\rightsquigarrow$ Non è scindibile

(Si può verificare che non lo è nemmeno prospettivamente)

SCINDIBILITÀ

▷ Interesse composto (o legge esponenziale)

Fissiamo arbitrariamente tre date T_1, T_2, T_3.

Poiché $\varphi(Y,Z) = (1+i)^{Z-Y} = \mathrm{e}^{\delta(Z-Y)}$ indipendentemente dal segno di $Z-Y$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3) &= (1+i)^{T_2-T_1}(1+i)^{T_3-T_2} = (1+i)^{T_2-T_1+T_3-T_2} \\ &= (1+i)^{T_3-T_1} = \varphi(T_1,T_3) \quad \forall\, T_1,T_2,T_3\end{aligned}$$

o, equivalentemente, lavorando con le intensità:

$$\begin{aligned}\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3) &= \mathrm{e}^{\delta(T_2-T_1)}\mathrm{e}^{\delta(T_3-T_2)} = \mathrm{e}^{\delta(T_2-T_1+T_3-T_2)} \\ &= \mathrm{e}^{\delta(T_3-T_1)} = \varphi(T_1,T_3) \quad \forall\, T_1,T_2,T_3\end{aligned}$$

⇝ Questa legge è scindibile

PROPRIETÀ DELLE LEGGI FINANZIARIE

- Torniamo alla relazione d'indifferenza tra situazioni finanziarie elementari.

  1) Sappiamo, in quanto lo abbiamo assunto come Postulato (P3), che tale relazione gode della proprietà riflessiva:

  $$\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \mathfrak{I} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \quad \forall\, S, T$$

  $\rightsquigarrow$ In particolare, se la legge è omogenea d'importo, si ha $\varphi(T,T) = 1 \;\; \forall\, T$

  2) Se poi le leggi di capitalizzazione e di attualizzazione sono associate, vale anche la proprietà simmetrica:

  $$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathfrak{I} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \mathfrak{I} \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix}$$

  $\rightsquigarrow$ In particolare, se la legge è omogenea d'importo, si ha $\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_1) = 1 \;\; \forall\, T_1, T_2$

PROPRIETÀ DELLE LEGGI FINANZIARIE

3) Infine, se la legge è scindibile, vale per definizione la proprietà transitiva:

$$\binom{S_1}{T_1}\mathfrak{I}\binom{S_2}{T_2},\ \binom{S_2}{T_2}\mathfrak{I}\binom{S_3}{T_3} \ \Rightarrow\ \binom{S_1}{T_1}\mathfrak{I}\binom{S_3}{T_3}$$

$\rightsquigarrow$ In particolare, se la legge finanziaria è anche omogenea d'importo, si ha $\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3) = \varphi(T_1,T_3)\ \forall\, T_1,T_2,T_3$

- Quindi, se si opera con leggi scindibili e associate, la relazione $\mathfrak{I}$ è un'equivalenza nell'insieme delle situazioni finanziarie elementari, per indicare la quale utilizzeremo il simbolo $\sim$.
- In realtà, se la legge è omogenea d'importo, basta la scindibilità espressa tramite il fattore di scambio ad implicare tutto il resto (in particolare, il fatto di avere a che fare con leggi associate).

PROPRIETÀ DELLE LEGGI FINANZIARIE

- Vale infatti il seguente Teorema:

  Nell'ambito delle leggi finanziarie omogenee d'importo, condizione necessaria e sufficiente affinché la relazione d'indifferenza tra situazioni finanziarie elementari sia un'equivalenza è che il fattore di scambio soddisfi l'equazione

$$\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3)=\varphi(T_1,T_3) \quad \forall\, T_1,T_2,T_3 \tag{1}$$

- Dimostrazione della condizione necessaria

  Se la relazione d'indifferenza $\mathfrak{I}$ è un'equivalenza, allora gode in particolare della proprietà transitiva che, tradotta in termini di fattore di scambio, è proprio l'equazione (1).

PROPRIETÀ DELLE LEGGI FINANZIARIE

- Dimostrazione della condizione sufficiente
  - ▷ Se nell'equazione (1) si pone $T_2 = T_3$, si ottiene $\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_2) = \varphi(T_1,T_2)\ \forall\, T_1,T_2$. Poiché $\varphi(T_1,T_2) > 0\ \forall\, T_1,T_2$, semplificando si ha $\varphi(T_2,T_2) = 1\ \forall\, T_2$, che traduce la proprietà riflessiva in termini di fattore di scambio.
  - ▷ Se nell'equazione (1) si pone $T_1 = T_3$, si ottiene $\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_1) = \varphi(T_1,T_1)\ \forall\, T_1,T_2$ e, come abbiamo appena dimostrato, $\varphi(T_1,T_1) = 1\ \forall\, T_1$. Quindi $\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_1) = 1\ \forall\, T_1,T_2$, che traduce la proprietà simmetrica in termini di fattore di scambio.
  - ▷ L'equazione (1) non è altro che la traduzione della proprietà transitiva, scritta in termini di fattore di scambio.
- Riepilogando:
  - ▷ Scindibilità + Omogeneità d'importo $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I}$ è un'equivalenza.
  - ▷ Le classi di equivalenza indotte da questa relazione sono insiemi di situazioni finanziarie elementari giudicate fra loro indifferenti, a intersezione vuota e la cui unione $= \{\binom{S}{T} : S > 0, T \geq 0\}$.

LEGGI OMOGENEE D'IMPORTO SCINDIBILI

- Ci proponiamo ora di determinare l'espressione del fattore di scambio per leggi omogenee d'importo e scindibili, cioè di risolvere l'equazione

$$\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3)=\varphi(T_1,T_3)\ \ \forall\, T_1,T_2,T_3$$

in cui l'incognita è la funzione φ, trovandone un'espressione analitica.

- In particolare, se $T_2=T_3$, essendo $\varphi(T_2,T_2)=1$ per la proprietà riflessiva, l'equazione precedente non fornisce alcuna informazione in quanto si trasforma in un'identità:

$$\varphi(T_1,T_2)=\varphi(T_1,T_2)\ \ \forall\, T_1,T_2$$

- Supponiamo quindi $T_2\neq T_3$, e poniamo $T=T_1$, $t=T_2-T_1$ e $\tau=T_3-T_2(\neq 0)$ $\rightsquigarrow$ $T_2=T+t,\ \ T_3=T+t+\tau$

$$\rightsquigarrow\ \ \varphi(T,T+t)\varphi(T+t,T+t+\tau)=\varphi(T,T+t+\tau)\,\forall\, T,t,\tau:\tau\neq 0$$

LEGGI OMOGENEE D'IMPORTO SCINDIBILI

- Poniamo inoltre $\psi_K(z) = \varphi(K, K+z)$; possiamo allora riscrivere l'equazione precedente come segue:

$$\psi_T(t)\psi_{T+t}(\tau) = \psi_T(t+\tau) \quad \forall\, T, t, \tau : \tau \neq 0$$

- Sottraiamo $\psi_T(t)$ da entrambi i membri:

$$\psi_T(t)\psi_{T+t}(\tau) - \psi_T(t) = \psi_T(t+\tau) - \psi_T(t)$$

- Raccogliamo $\psi_T(t)(>0)$ a primo membro e dividiamo entrambi i membri per $\tau(\neq 0)$:

$$\psi_T(t)\frac{\psi_{T+t}(\tau) - 1}{\tau} = \frac{\psi_T(t+\tau) - \psi_T(t)}{\tau}$$

- Ricordando che $\psi_K(0) = 1 \;\forall\, K$, si ottiene infine:

$$\psi_T(t)\frac{\psi_{T+t}(\tau) - \psi_{T+t}(0)}{\tau} = \frac{\psi_T(t+\tau) - \psi_T(t)}{\tau}$$

LEGGI OMOGENEE D'IMPORTO SCINDIBILI

- Supponiamo che, $\forall\, K$, la funzione ψ_K sia derivabile, con derivata continua.
- Passando allora al limite, per $\tau \to 0$, in entrambi i membri dell'equazione precedente, si ha:

$$\psi_T(t)\,\psi'_{T+t}(0) = \psi'_T(t)$$

- Ponendo $\delta(K) = \psi'_K(0)$, e ricordando che $\psi_T(0) = \varphi(T,T) = 1$, si ottiene il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} \psi'_T(t) = \delta(T+t)\,\psi_T(t) \\ \psi_T(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

simile a quello già affrontato per determinare il montante nel regime esponenziale data l'intensità; qui la nostra incognita è la funzione $\psi_T(t) = \varphi(T, T+t)$.

LEGGI OMOGENEE D'IMPORTO SCINDIBILI

- Partendo dalla prima equazione del problema (2), e dividendo entrambi i membri per $\psi_T(t)(>0)$, otteniamo:

$$\frac{\psi_T'(t)}{\psi_T(t)} \left(= \frac{\mathrm{d}\ln(\psi_T(t))}{\mathrm{d}t} \right) = \delta(T+t)$$

- Essendo δ una funzione continua su un intervallo, possiamo sfruttare il I Teorema fondamentale del calcolo integrale che ci fornisce una sua primitiva nella funzione integrale $\int_T^{T+t} \delta(x)\mathrm{d}x$ $(= \int_0^t \delta(T+y)\mathrm{d}y$, con la sostituzione di variabile $y = x - T)$.
- Abbiamo quindi due primitive della stessa funzione, la funzione integrale e $\ln(\psi_T(t))$ $\rightsquigarrow$ Essendo definite su un intervallo, per un Corollario del Teorema di Lagrange esse differiscono per una costante:

$$\rightsquigarrow \quad \ln(\psi_T(t)) = \int_T^{T+t} \delta(x)\mathrm{d}x + C \quad \rightsquigarrow \quad \psi_T(t) = \mathrm{e}^{\int_T^{T+t} \delta(x)\mathrm{d}x + C}$$

LEGGI OMOGENEE D'IMPORTO SCINDIBILI

- Infine, tendo conto della condizione iniziale $\psi_T(0) = 1$, si ha $C = 0$, per cui l'espressione del fattore di scambio per leggi finanziarie omogenee d'importo e scindibili è la seguente:

$$\psi_T(t) = \varphi(T, T+t) = \mathrm{e}^{\int_T^{T+t} \delta(x)\mathrm{d}x}$$

  - ▷ Se $t \geq 0$ abbiamo il fattore di capitalizzazione: $\varphi(T, T+t) = u(T, T+t) = \mathrm{e}^{\int_T^{T+t} \delta(x)\mathrm{d}x}$
  - ▷ Se $t \leq 0$ abbiamo il fattore di attualizzazione: $\varphi(T, T+t) = v(T+t, T) = \mathrm{e}^{-\int_{T+t}^{T} \delta(x)\mathrm{d}x}$

- Ricordiamo che δ può essere una funzione qualunque, purché continua; se però vogliamo che $\varphi(T, T+t)$ sia crescente rispetto a t ($\rightsquigarrow$ Postulato di rendimento del denaro), allora dobbiamo richiedere che essa sia una funzione positiva.

- Se, in particolare, δ è costante, ritroviamo il fattore di scambio nel regime esponenziale: $\varphi(T, T+t) = \mathrm{e}^{\delta t}$

LEGGI OMOGENEE D'IMPORTO SCINDIBILI

- Riepilogando, abbiamo appena dimostrato che, se si parte da una legge finanziaria omogenea d'importo e scindibile con fattore di scambio derivabile parzialmente rispetto alla seconda variabile, con derivata continua, si ha

$$\varphi(T,T+t) = \mathrm{e}^{\int_T^{T+t}\delta(x)\mathrm{d}x}, \ \text{dove } \delta(x) = \psi_x'(0) = \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)_{y=x}$$

- In realtà si può verificare che vale anche il viceversa, cioè che se il fattore di scambio di una legge finanziaria omogenea d'importo è esprimibile come $\varphi(T,T+t) = \mathrm{e}^{\int_T^{T+t}\delta(x)\mathrm{d}x}$, con δ funzione continua, allora la legge è scindibile; infatti:

$$\begin{aligned}\varphi(T,T+t)\varphi(T+t,T+t+\tau) &= \mathrm{e}^{\int_T^{T+t}\delta(x)\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\int_{T+t}^{T+t+\tau}\delta(x)\mathrm{d}x}\\ &= \mathrm{e}^{\int_T^{T+t}\delta(x)\mathrm{d}x+\int_{T+t}^{T+t+\tau}\delta(x)\mathrm{d}x}\\ &= \mathrm{e}^{\int_T^{T+t+\tau}\delta(x)\mathrm{d}x} = \varphi(T,T+t+\tau)\end{aligned}$$

LEGGI OMOGENEE D'IMPORTO, UNIFORMI NEL TEMPO E SCINDIBILI

- Vediamo infine che cosa succede nel caso particolare in cui la legge omogenea d'importo e scindibile è anche uniforme nel tempo.
- In tal caso dev'essere $\psi_T(t) = \varphi(T, T+t)$ indipendente da T, cioè ψ_T è la stessa funzione per ogni T

$\rightsquigarrow$ $\delta(T) = \psi'_T(0)$ non cambia al variare di T

$\rightsquigarrow$ δ è una funzione costante

$\rightsquigarrow$ $\varphi(T, T+t) = \mathrm{e}^{\delta t}$

$\rightsquigarrow$ L'unica legge scindibile tra quelle omogenee d'importo e uniformi nel tempo è la legge esponenziale

OPERAZIONI FINANZIARIE NEL REGIME ESPONENZIALE

- D'ora innanzi opereremo nel regime esponenziale, utilizzando leggi di capitalizzazione e di attualizzazione associate
  $\rightsquigarrow$ Quindi opereremo con una ($\rightsquigarrow$ l'unica) legge omogenea d'importo, uniforme nel tempo e scindibile.
- Fin qua abbiamo considerato situazioni finanziarie elementari come coppie $\binom{S}{T}$ con l'importo $S > 0$ e la data $T \geq 0$.
- Siamo partiti da queste situazioni perché il nostro obiettivo era quello di regolamentare gli scambi tra due situazioni finanziarie elementari, ovvero analizzare una prima operazione finanziaria, che abbiamo appunto chiamato operazione finanziaria elementare, cioè l'operazione di scambio tra due importi in epoche diverse.

OPERAZIONI FINANZIARIE NEL REGIME ESPONENZIALE

- Più in generale, come abbiamo visto all'inizio, un'operazione finanziaria si ottiene "combinando" situazioni finanziarie elementari, che possono essere prese "in entrata" o "in uscita".
- Ricordiamo infatti che avevamo definito operazione finanziaria una coppia di vettori $\underline{x}/\underline{t}$ dove gli elementi del vettore $\underline{x}$, cioè gli importi, potevano avere segno sia > 0 che < 0:
  - ▷ se $x_j > 0$ significa che all'epoca t_j si riceve l'importo x_j,
  - ▷ se invece $x_j < 0$ all'epoca t_j si cede l'importo $-x_j (> 0)$.
- Potremmo quindi "estendere" il concetto di operazione di scambio trattata finora anche al caso in cui si scambiano "debiti", cioè gli importi sono < 0, e per portarli "avanti" o "indietro" nel tempo useremo la stessa tecnica (legge esponenziale).

OPERAZIONI FINANZIARIE NEL REGIME ESPONENZIALE

- Ammettiamo dunque che in una situazione finanziaria elementare $\binom{S}{T}$ l'importo S possa essere anche negativo o, al limite, nullo, e richiediamo che

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Abbiamo utilizzato il simbolo di equivalenza perché operiamo nel regime esponenziale, con leggi associate

$\rightsquigarrow$ Questa definizione estende il concetto di omogeneità d'importo anche al caso in cui gli importi di due situazioni finanziarie elementari fra loro equivalenti vengono moltiplicati per un numero reale qualunque, mantenendo l'equivalenza.

EQUIVALENZA TRA OPERAZIONI FINANZIARIE

- Inoltre introduciamo una relazione di equivalenza anche tra operazioni finanziarie richiedendo che

$$\begin{cases} \binom{S_1}{T_1} \sim \binom{S_1'}{T_1'} \\ \dots \\ \binom{S_n}{T_n} \sim \binom{S_n'}{T_n'} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc} S_1 & \dots & S_n \\ \hline T_1 & \dots & T_n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} S_1' & \dots & S_n' \\ \hline T_1' & \dots & T_n' \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ "Impacchettando" le situazioni finanziarie elementari $\binom{S_1}{T_1}$, $\dots$, $\binom{S_n}{T_n}$ si ottiene l'operazione finanziaria

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \dots & S_n \\ \hline T_1 & \dots & T_n \end{array}$$

che risulta equivalente a quella ottenuta "impacchettando" situazioni finanziarie elementari equivalenti a quelle di partenza

EQUIVALENZA TRA OPERAZIONI FINANZIARIE

- In particolare, se $T'_1 = \cdots = T'_n = T$, per il Teorema di divisibilità degli importi (implicato dall'omogeneità d'importo) si ottiene:

$$\begin{pmatrix} S'_1 & \dots & S'_n \\ \hline T & \dots & T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S'_1 + \cdots + S'_n \\ T \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ per la scindibilità (proprietà transitiva) si ha

$$\begin{cases} \binom{S_1}{T_1} \sim \binom{S'_1}{T} \\ \dots \\ \binom{S_n}{T_n} \sim \binom{S'_n}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} S_1 & \dots & S_n \\ \hline T_1 & \dots & T_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S'_1 + \cdots + S'_n \\ T \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Se si vuol "valutare" in T una qualunque operazione finanziaria (cioè trovarne l'importo equivalente), bisogna "portare" in T ogni sua componente e poi sommare gli importi corrispondenti $\rightsquigarrow$ Il corrispondente in T della "somma" di situazioni finanziarie elementari è pari alla somma dei corrispondenti in T di ciascuna di esse $\rightsquigarrow$ linearità

EQUIVALENZA TRA OPERAZIONI FINANZIARIE

- Quindi, date due operazioni finanziarie $\begin{pmatrix} S_1 & \dots & S_n \\ T_1 & \dots & T_n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \tilde{S}_1 & \dots & \tilde{S}_m \\ \tilde{T}_1 & \dots & \tilde{T}_m \end{pmatrix}$, sappiamo che $\begin{pmatrix} S_1 & \dots & S_n \\ T_1 & \dots & T_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}$, dove S è la somma dei “corrispondenti” in T degli S_j, cioè $S = S'_1 + \cdots + S'_n$.
- Analogamente, $\begin{pmatrix} \tilde{S}_1 & \dots & \tilde{S}_m \\ \tilde{T}_1 & \dots & \tilde{T}_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{S} \\ T \end{pmatrix}$, con $\tilde{S} = \tilde{S}'_1 + \cdots + \tilde{S}'_m$.
- Inoltre, per la proprietà simmetrica della relazione di equivalenza, $\begin{pmatrix} \tilde{S} \\ T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{S}_1 & \dots & \tilde{S}_m \\ \tilde{T}_1 & \dots & \tilde{T}_m \end{pmatrix}$ e dunque, se in particolare $S = \tilde{S}$, per la proprietà transitiva (cioè la scindibilità), si ha che $\begin{pmatrix} S_1 & \dots & S_n \\ T_1 & \dots & T_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{S}_1 & \dots & \tilde{S}_m \\ \tilde{T}_1 & \dots & \tilde{T}_m \end{pmatrix}$

EQUIVALENZA TRA OPERAZIONI FINANZIARIE

- In conclusione, due operazioni finanziarie sono fra loro equivalenti se hanno lo stesso "corrispondente", in un (qualunque) istante T.
- Siccome operiamo nel regime esponenziale, se le operazioni hanno lo stesso corrispondente in T, avranno lo stesso corrispondente anche in qualunque istante $T' \neq T$.
- Infatti, per la scindibilità, il corrispondente in T' di ciascuna delle due operazioni si ottiene moltiplicando quello in T per il fattore di scambio (di capitalizzazione piuttosto che di attualizzazione) $\bar{\varphi}(T'-T)$ $\rightsquigarrow$ se si parte da due importi coincidenti e li si moltiplica per la stessa quantità, essi rimangono coincidenti

VALORE DI UN'OPERAZIONE FINANZIARIA

- La data di valutazione T può essere qualunque, successiva a tutte le T_j, oppure precedente, oppure intermedia, ...; si potrebbe anche valutare prima ciascuna componente in una data posteriore a T e poi portarne indietro il valore fino a T, o viceversa, tanto per la scindibilità si ottiene lo stesso risultato che si sarebbe ottenuto portando tutto direttamente in T.
- Data un'operazione finanziaria

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \dots & S_n \\ \vdash\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- & \!\!+\!\! & -\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\dashv \\ T_1 & \dots & T_n \end{array}$$

con $0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_n$, definiamo valore, o saldo, dell'operazione in $T(\geq 0)$ proprio la somma $S'_1 + \cdots + S'_n$, dove

$$\begin{cases} \binom{S'_1}{T} \sim \binom{S_1}{T_1} \\ \dots \\ \binom{S'_n}{T} \sim \binom{S_n}{T_n} \end{cases}$$

VALORE DI UN'OPERAZIONE FINANZIARIA

- Siccome operiamo nel regime esponenziale, con intensità δ, sappiamo che $S'_j = S_j e^{\delta(T-T_j)}$, $j = 1, \ldots, n$, e quindi il valore, o saldo, in T, dell'operazione è pari a

$$W(T) = \sum_{j=1}^{n} S_j e^{\delta(T-T_j)}$$

- In particolare, l'operazione si definisce equa se $W(T) = 0$

  $\rightsquigarrow$ per la scindibilità, $W(T) = 0 \Leftrightarrow W(T') = 0 \ \forall T' \neq T$; infatti $W(T) = W(T')e^{\delta(T-T')}$

  $\rightsquigarrow$ se l'operazione è equa in T, lo è in qualunque altra data

ESEMPIO

- Consideriamo un'operazione elementare di scambio tra due importi S_1 e S_2, entrambi > 0 o entrambi < 0:

$$\begin{array}{ccc} S_1 & & -S_2 \\ \vdash & \text{———} & \dashv \\ T_1 & & T_2 \end{array}$$

- Sia $T \geq 0 \rightsquigarrow W(T) = S_1 e^{\delta(T-T_1)} - S_2 e^{\delta(T-T_2)}$
- L'operazione è equa $\Leftrightarrow W(T) = 0 \Leftrightarrow S_1 e^{\delta(T-T_1)} = S_2 e^{\delta(T-T_2)}$

  $\Leftrightarrow S_2 = S_1 e^{\delta(T_2-T_1)}$

  $\rightsquigarrow$ S_2 è proprio il montante in T_2 di S_1 in T_1, cioè l'importo che si reputa equo scambiare contro S_1 in T_1

  $\rightsquigarrow$ Ciò appare ovvio per come abbiamo definito l'indifferenza tra situazioni finanziarie elementari, ma il concetto di equità vale in generale, per qualunque operazione finanziaria, anche complessa

Montante e Fabbisogno

- Data un'operazione finanziaria $(S_1, \ldots, S_n)/(T_1, \ldots, T_n)$, definiamo montante dell'operazione in $T \geq 0$ la quantità

$$M(T) = \sum_{j:T_j \leq T} (-S_j) \mathrm{e}^{\delta(T-T_j)}$$

$\rightsquigarrow$ Si tratta dell'opposto dell'importo che si giudica equo scambiare in T contro tutti gli importi S_j esigibili in epoche precedenti T (per convenzione, se T coincide con una delle T_j, l'importo corrispondente è stato incluso nella definizione)

$\rightsquigarrow$ $M(T) = [\mathit{dato} - \mathit{avuto}]$, si guarda retrospettivamente (come la riserva matematica retrospettiva nelle assicurazioni vita)

$\rightsquigarrow$ $T < T_1 \; \Rightarrow \; M(T) = 0; \quad T \geq T_n \; \Rightarrow \; M(T) = -W(T)$

MONTANTE E FABBISOGNO

- Definiamo invece fabbisogno dell'operazione in $T \geq 0$ la quantità
$$V(T) = \sum_{j:T_j>T} S_j \mathrm{e}^{-\delta(T_j - T)}$$

$\rightsquigarrow$ Si tratta dell'importo che si giudica equo scambiare in T contro tutti gli importi esigibili in epoche successive a T (per convenzione, se T coincide con una delle T_j, l'importo corrispondente non è stato incluso nella definizione)

$\rightsquigarrow$ $V(T) = [avere - dare]$, si guarda prospettivamente (come la riserva matematica prospettiva nelle assicurazioni vita)

$\rightsquigarrow$ $T < T_1 \;\Rightarrow\; V(T) = W(T); \quad T \geq T_n \;\Rightarrow\; V(T) = 0$

MONTANTE E FABBISOGNO

- Essendo

$$W(T) = \sum_{j=1}^{n} S_j e^{\delta(T-T_j)} = \sum_{j:T_j \leq T} S_j e^{\delta(T-T_j)} + \sum_{j:T_j > T} S_j e^{-\delta(T_j-T)}$$

$\rightsquigarrow$ $W(T) = -M(T) + V(T)$

$\rightsquigarrow$ L'operazione è equa $\Leftrightarrow$ $W(T) = 0 \Leftrightarrow M(T) = V(T)$

- Per convenzione abbiamo incluso l'eventuale data di valutazione T (se coincidente con qualche T_j) nel montante anziché nel valore attuale; la convenzione potrebbe anche essere diversa, ad es. lo è (come vedremo) quando si valutano rendite anticipate.

SCOMPOSIZIONE DEL FABBISOGNO

- Ricordando che il fabbisogno ad una generica epoca T altro non è che il valore attuale di tutti i movimenti futuri, si potrebbe voler isolare il valore dei movimenti futuri di interessi da quello dei movimenti futuri di capitale.
- Si definisce allora usufrutto il valore attuale del movimento futuro di interessi, nuda proprietà quello del movimento futuro di capitali.
- Queste quantità sono rilevanti in vista di eventuali negoziazioni dell'operazione finanziaria residua (ad es. gli interessi passivi potrebbero essere deducibili dalle tasse, e se si estingue in blocco un mutuo si potrebbe voler recuperare in anticipo l'intero bonus fiscale a cui si avrebbe diritto).

SCOMPOSIZIONE DEL FABBISOGNO

- La valutazione di usufrutto e nuda proprietà in generale può essere effettuata ad un tasso (o intensità) diverso da quello concordato all'inizio dell'operazione finanziaria.
- In tal caso la somma di usufrutto e nuda proprietà, anziché chiamarsi fabbisogno, si chiama valore residuo dell'operazione finanziaria, come vedremo più avanti nel caso degli ammortamenti.
- Omettiamo per ora di calcolare usufrutto e nuda proprietà di una generale operazione finanziaria; lo faremo più avanti nel caso particolare degli ammortamenti.

ALTRI REGIMI FINANZIARI

- Abbiamo definito il valore, o saldo, di un'operazione finanziaria nel regime esponenziale, e così il montante, il fabbisogno, etc., anche se tali definizioni possono essere date con una legge finanziaria arbitraria.
- Tuttavia in generale esse non scendono più come conseguenza dell'omogeneità d'importo e della scindibilità bensì bisogna definire direttamente il valore dell'operazione come somma dei valori delle singole componenti (montanti, o valori attuali, a seconda che si portino avanti o indietro gli importi nel tempo).
- Rimane valido il concetto di equità, in una fissata data però.
- Infatti, se la legge non è scindibile, bisogna portare direttamente in T le singole componenti e poi sommarne i valori, non potendo più "transitare" per un'altra data T' $\rightsquigarrow$ Se un'operazione finanziaria è equa in T, non è detto che lo sia anche in $T' \neq T$

RENDITE

- Possiamo definire una rendita come una situazione finanziaria (non elementare) in cui le epoche di esigibilità degli importi sono usualmente equidistanzate e gli importi sono tutti dello stesso segno:

$$
\begin{array}{cccc}
R_1 & R_2 & \dots & R_n \\
\vdash\!\!\text{———} & \!\!+\!\!\text{———} & \!\!+\!\!\text{———} & \!\!\dashv \\
T_1 & T_2 & \cdots & T_n
\end{array}
$$

  con $T_{j+1} - T_j =$ costante $\forall\, j$ e $R_h R_k > 0 \;\forall\, h,k$.

- $R_1, R_2, \dots, R_n$ si chiamano rate (o termini) della rendita, $T_1, T_2, \dots, T_n$ sono le scadenze.

Valore attuale e Montante di una Rendita

- Data una rendita di rate $R_1, R_2, \ldots, R_n$ esigibili in $T_1, T_2, \ldots, T_n$ e fissata un'intensità di valutazione δ, si definisce
  - ▷ valore attuale della rendita in $T_0 \leq T_1$:

$$V = \sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{e}^{-\delta(T_j - T_0)}$$

    ⇝ per calcolare il valore attuale prenderemo sempre $T_0 = 0$, sottintendendo l'epoca di valutazione

  - ▷ montante della rendita in $T \geq T_n$:

$$M = \sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{e}^{\delta(T - T_j)}$$

    ⇝ a seconda del tipo di rendita, prenderemo $T = T_n$ oppure $T = T_n + \Delta$, dove $\Delta = T_{j+1} - T_j$ è la comune distanza tra date consecutive, sottintendendo l'epoca di valutazione

Operazioni di rendita

- Per operazione di rendita si intende un'operazione finanziaria che prevede lo scambio di un unico importo, di solito all'inizio o al termine della stessa, contro una sequenza di importi tutti dello stesso segno, ovvero contro una rendita.
- Potremmo anche pensare al caso teorico in cui le rate della rendita sono pagate nel continuo, per un certo intervallo di tempo, anziché nel discreto; per ora comunque ragioniamo nel caso discreto.

ESEMPI DI OPERAZIONI DI RENDITA

- Ammortamento di un debito

$$\begin{array}{ccccc} C & -R_1 & -R_2 & \dots & -R_n \\ \hline T_0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{array}$$

Immaginando che gli importi coinvolti siano tutti > 0, in T_0 si riceve C impegnandosi a pagare $R_1, R_2, \dots, R_n$ in futuro

$\rightsquigarrow$ Se l'operazione di scambio è giudicata equa in base all'intensità δ, C è il valore attuale in T_0 della rendita

- Costituzione di un capitale

$$\begin{array}{ccccc} -R_1 & -R_2 & \dots & -R_n & C \\ \hline T_1 & T_2 & \cdots & T_n & T \end{array}$$

In $T_1, T_2, \dots, T_n$ si pagano $R_1, R_2, \dots, R_n$ per ricevere C in T

$\rightsquigarrow$ Se l'operazione è equa, C è il montante in T della rendita

Classificazione delle rendite

- Consideriamo la rendita

$$\begin{array}{cccc} R_1 & R_2 & \dots & R_n \\ \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- & \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- & \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- & \dashv \\ T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{array}$$

e prendiamo come unità di misura del tempo l'ampiezza dell'intervallo $[T_j, T_{j+1}]$ (costante).

$\rightsquigarrow$ La rendita può allora essere rappresentata come segue:

$$\begin{array}{cccc} R_1 & R_2 & \dots & R_n \\ \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- & \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- & \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- & \dashv \\ T_1 & T_1+1 & \dots & T_1+n-1 \end{array}$$

  - ▷ Se $T_{j+1} - T_j = 1$ anno, la rendita si dice annua, se $T_{j+1} - T_j = 1$ semestre la rendita si dice semestrale, ..., se $T_{j+1} - T_j = 1$ mese la rendita si dice mensile, ...

CLASSIFICAZIONE DELLE RENDITE

- Se il numero di rate è finito, come abbiamo supposto fin qua, la rendita si chiama temporanea (ad es. temporanea di durata n anni, o semplicemente temporanea n anni, se prevede n rate e $T_{j+1} - T_j = 1$ anno); se il numero di rate è invece infinito, si ha a che fare con una rendita perpetua, o perpetuità.

- La rendita è anticipata se la rata di competenza dell'intervallo $[T_j, T_j + 1]$ viene pagata all'inizio dell'intervallo, cioè in $T_j, \ \forall j$; posticipata se invece tale rata viene pagata alla fine, cioè in $T_j + 1$.

- La rendita si dice immediata se la prima rata è pagata nel primo intervallo di tempo ($T_1 = 0$ se anticipata, $T_1 = 1$ se posticipata), differita se invece tale rata viene pagata successivamente ($T_1 > 0$ se anticipata, $T_1 > 1$ se posticipata).

ESEMPI DI RENDITE TEMPORANEE

- rendita temporanea n periodi, immediata, posticipata

$$\begin{array}{ccccc} & R_1 & R_2 & \ldots & R_n \\ \hline 0 & 1 & 2 & \ldots & n \end{array}$$

- rendita temporanea n periodi, immediata, anticipata

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & R_2 & \ldots & R_n & \\ \hline 0 & 1 & \ldots & n-1 & n \end{array}$$

- rendita temporanea n periodi, posticipata, differita di m periodi

$$\begin{array}{ccccccc} & \ldots & & R_1 & R_2 & \ldots & R_n \\ \hline 0 & \ldots & m & m+1 & m+2 & \ldots & m+n \end{array}$$

- rendita temporanea n periodi, anticipata, differita di m periodi

$$\begin{array}{ccccccc} & \ldots & R_1 & R_2 & \ldots & R_n & \\ \hline 0 & \ldots & m & m+1 & \ldots & m+n-1 & m+n \end{array}$$

VALORI ATTUALI E MONTANTI DI RENDITE

- Ci occupiamo ora di calcolare il valore attuale e il montante di una rendita con rate "regolari" (ad es. costanti, crescenti o decrescenti in progressione aritmetica o geometrica).
- Il valore attuale sarà sempre calcolato all'epoca 0
  $\rightsquigarrow$ l'epoca di valutazione è pari a quella di pagamento della prima rata per le rendite immediate anticipate, a un periodo prima per le rendite immediate posticipate
- Il montante sarà sempre calcolato all'epoca $m+n$ per le rendite di n rate differite di m periodi (immediate se $m=0$)
  $\rightsquigarrow$ l'epoca di valutazione è pari a quella di pagamento dell'ultima rata per le rendite posticipate, a un periodo dopo per le rendite anticipate
- Supponiamo di operare con tassi (o intensità, o fattori di capitalizzazione/attualizzazione) corrispondenti alla distanza tra due scadenze consecutive $T_{j+1} - T_j$, anche se per comodità usiamo i simboli precedentemente introdotti per i tassi annui.

RENDITE A RATA COSTANTE

- Consideriamo una rendita a rata costante R esigibile alle epoche $T_1, T_2, \ldots, T_n$ $\rightsquigarrow$ Siccome stiamo lavorando con una legge omogenea d'importo, ci basta valutare rendite di rata unitaria
- Ricordiamo infatti che

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \hline T_1 & T_2 & \ldots & T_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S'_1 & S'_2 & \ldots & S'_n \\ \hline T'_1 & T'_2 & \ldots & T'_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} KS_1 & KS_2 & \ldots & KS_n \\ \hline T_1 & T_2 & \ldots & T_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} KS'_1 & KS'_2 & \ldots & KS'_n \\ \hline T'_1 & T'_2 & \ldots & T'_n \end{pmatrix} \quad \forall\, K$$

$\rightsquigarrow$ In particolare, se $T'_1 = T'_2 = \cdots = T'_n = T$, otteniamo:

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \hline T_1 & T_2 & \ldots & T_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S'_1 + S'_2 + \cdots + S'_n \\ T \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} KS_1 & KS_2 & \ldots & KS_n \\ \hline T_1 & T_2 & \ldots & T_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} K(S'_1 + S'_2 + \cdots + S'_n) \\ T \end{pmatrix} \quad \forall\, K$$

RENDITE A RATA COSTANTE

- Quindi, prendendo $T = T_n$ se la rendita è posticipata o $T = T_n + 1$ se anticipata, oppure $T = 0$, e indicando con B il montante in T di una rendita a rata costante unitaria (se $T = T_n$ o $T = T_n + 1$) oppure il valore attuale della stessa (se $T = 0$), abbiamo che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B \\ T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} R & R & \dots & R \\ T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} R \cdot B \\ T \end{pmatrix} \; \forall R$$

$\rightsquigarrow$ Dunque basta saper calcolare B

SIMBOLI UTILIZZATI PER LE RENDITE UNITARIE

- Per fissare le idee, consideriamo il caso di una rendita annua, e utilizziamo quindi il tasso annuo d'interesse i (o i corrispondenti δ, u, v, d) $\rightsquigarrow$ Se le rate fossero invece pagate k volte all'anno, si utilizzerebbero i tassi i_k, d_k (o intensità δ_k o fattori u_k, v_k) equivalenti nel regime esponenziale
- Il valore attuale in 0 di una rendita annua, immediata, unitaria, temporanea n anni si indica con i seguenti simboli alternativi:
  - ▷ posticipata $a_{n\rceil i}$ anticipata $\mathrm{a}_{n\rceil i}$
  - ▷ posticipata $a_{n\rceil i}$ anticipata $\ddot{a}_{n\rceil i}$
  - ▷ posticipata $\mathrm{a}_{n\rceil i}$ anticipata $\ddot{\mathrm{a}}_{n\rceil i}$

  che si leggono "a figurato n al tasso i"

  $\rightsquigarrow$ Quindi, in alternativa, si utilizza:
  - ▷ la lettera in corsivo per le rendite posticipate e quella in stampatello per le rendite anticipate
  - ▷ lo stesso simbolo, o corsivo o stampatello, ma con la dieresi se la rendita è anticipata

SIMBOLI UTILIZZATI PER LE RENDITE UNITARIE

- In Italia è più usata la prima notazione, a livello internazionale quelle con la dieresi
  $\rightsquigarrow$ Nel seguito, per non creare confusione (e anche in analogia a quanto verrà fatto in corsi successivi), adotteremo la notazione con la dieresi
  $\rightsquigarrow$ Non dobbiamo quindi preoccuparci di usare il corsivo piuttosto che lo stampatello perché è la dieresi che discrimina
- Riepilogando, si ha quindi:

$$\begin{pmatrix} a_{\overline{n}|i} \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{a}_{\overline{n}|i} \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

SIMBOLI UTILIZZATI PER LE RENDITE UNITARIE

- Se la rendita è differita di m anni si antepone ${}_{m/}$ ad a o ad $\ddot{a}$ (talvolta si usa la barretta verticale anziché obliqua):

$$\begin{pmatrix} {}_{m/}a_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m+1 & m+2 & \dots & m+n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}_{m/}\ddot{a}_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m & m+1 & \dots & m+n-1 \end{pmatrix}$$

- Se la rendita è continua (immediata o differita) si utilizzano i simboli $\bar{a}_{n\rceil i}$ e ${}_{m/}\bar{a}_{n\rceil i}$ $\rightsquigarrow$ In tal caso n rappresenta la durata della rendita anziché il numero di rate, mentre non ha senso distinguere tra anticipata e posticipata
- Se infine la rendita è perpetua (immediata o differita, anticipata o posticipata o continua), in analogia si usano i simboli $a_{\infty\rceil i}$, $\ddot{a}_{\infty\rceil i}$, $\bar{a}_{\infty\rceil i}$, ${}_{m/}a_{\infty\rceil i}$, ${}_{m/}\ddot{a}_{\infty\rceil i}$, ${}_{m/}\bar{a}_{\infty\rceil i}$.

SIMBOLI UTILIZZATI PER LE RENDITE UNITARIE

- Per quanto riguarda i montanti, si usano notazioni analoghe, ma con s (corsivo piuttosto che stampatello) al posto di a.
- Anche qui utilizzeremo lo stesso simbolo per le rendite anticipate e posticipate, apponendoci la dieresi nel caso anticipato:
  - ▷ per le rendite immediate abbiamo dunque $s_{n\rceil i}$ (se posticipate) e $\ddot{s}_{n\rceil i}$ (se anticipate), che si leggono "s figurato n al tasso i"
  - ▷ per le rendite differite abbiamo ${}_{m/}s_{n\rceil i}$ e, rispettivamente, ${}_{m/}\ddot{s}_{n\rceil i}$
  - ▷ per le rendite continue, immediate o differite, abbiamo $\bar{s}_{n\rceil i}$ e ${}_{m/}\bar{s}_{n\rceil i}$
  - ▷ se $i > 0$ ($\rightsquigarrow$ Postulato di rendimento del denaro) non esiste invece il montante di una rendita perpetua ($\rightsquigarrow$ sarebbe $+\infty$)

SIMBOLI UTILIZZATI PER LE RENDITE UNITARIE

- Quindi, schematicamente, si ha:

$$\begin{pmatrix} s_{n\rceil i} \\ n \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{s}_{n\rceil i} \\ n \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}_{m/}s_{n\rceil i} \\ m+n \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline m+1 & m+2 & \dots & m+n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}_{m/}\ddot{s}_{n\rceil i} \\ m+n \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline m & m+1 & \dots & m+n-1 \end{pmatrix}$$

- Tutti i simboli fin qui introdotti per rappresentare il valore attuale o il montante di rendite unitarie vanno bene soltanto nel regime esponenziale, così come tutti i collegamenti che faremo fra di essi basati sulla scindibilità.

VALORE ATTUALE E MONTANTE DI RENDITE UNITARIE

- Cominciamo con il caso delle rendite posticipate, prima immediate e poi differite.
- Calcolo di $a_{n\rceil i}$

  1) via definizione

$$a_{n\rceil i} = v + v^2 + \cdots + v^n = v(1 + v + \cdots + v^{n-1})$$

$\rightsquigarrow$ somma dei termini di una progressione geometrica di ragione v

$$= v\frac{1-v^n}{1-v} = v\frac{1-v^n}{d} = v\frac{1-v^n}{iv} = \frac{1-v^n}{i}$$

VALORE ATTUALE E MONTANTE DI RENDITE UNITARIE

2) via significato finanziario

▷ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1+i\\1\end{pmatrix}$ per definizione di tasso d'interesse

▷ $\begin{pmatrix}1+i\\1\end{pmatrix} \sim \left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ per l'omogeneità d'importo

($\rightsquigarrow$ divisibilità degli importi)

▷ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1+i\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}$ per l'uniformità nel tempo

$$\rightsquigarrow \left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \sim \left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}\right\}$$

▷ $\left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}\right\} \sim \left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} \sim \dots$

$$\sim \left\{\begin{pmatrix}i & i & \dots & i\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix}\right\}$$

VALORE ATTUALE E MONTANTE DI RENDITE UNITARIE

- $\left\{ \begin{pmatrix} i & i & \ldots & i \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} i a_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^n \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \sim \begin{pmatrix} i a_{n\rceil i} + v^n \\ 0 \end{pmatrix}$
  per l'omogeneità d'importo
- $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i a_{n\rceil i} + v^n \\ 0 \end{pmatrix}$ per la scindibilità (ovvero la proprietà transitiva, applicata iterativamente)
- $\Rightarrow 1 = i a_{n\rceil i} + v^n$ per i Postulati (P1) e (P3)
  $\Rightarrow a_{n\rceil i} = \frac{1-v^n}{i}$

Interpretazione: avere un capitale unitario in 0 equivale a ricevere gli interessi sullo stesso capitale alla fine di ciascun anno ($= i$) più la restituzione del capitale in fondo (cioè in n)

VALORE ATTUALE E MONTANTE DI RENDITE UNITARIE

- Calcolo di $a_{\infty\rceil i}$

$$a_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to+\infty} a_{n\rceil i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i} \quad \text{poiché } 0 < v < 1$$

Interpretazione: Come abbiamo visto per la rendita temporanea, possiamo portare avanti l'importo unitario nel tempo, ma in questo caso senza avere mai restituzione del capitale; applicando le varie proprietà e postulati si ottiene infatti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} i & i & \dots \\ 1 & 2 & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} ia_{\infty\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ 1 = ia_{\infty\rceil i}\ \Rightarrow\ a_{\infty\rceil i} = \frac{1}{i}$$

Valore attuale e Montante di rendite unitarie

- Calcolo di $s_{n\rceil i}$
  - ▷ Per definizione

$$\binom{s_{n\rceil i}}{n} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \binom{a_{n\rceil i}}{0} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

  - ▷ Per la proprietà simmetrica della relazione d'equivalenza

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \sim \binom{a_{n\rceil i}}{0}$$

  - ▷ Per la proprietà transitiva

$$\binom{s_{n\rceil i}}{n} \sim \binom{a_{n\rceil i}}{0}$$

Valore attuale e Montante di rendite unitarie

- Essendo, per definizione di fattore di capitalizzazione e per l'omogeneità d'importo

$$\begin{pmatrix} a_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{n\rceil i} u^n \\ n \end{pmatrix}$$

per le varie proprietà e postulati

$$\Rightarrow s_{n\rceil i} = a_{n\rceil i} u^n = \frac{1 - v^n}{i} u^n = \frac{u^n - 1}{i}$$

VALORE ATTUALE E MONTANTE DI RENDITE UNITARIE

- Passiamo ora al caso delle rendite posticipate differite.
- Calcolo di ${}_{m/}a_{\overline{n}|i}$

$$\binom{{}_{m/}a_{\overline{n}|i}}{0} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline m+1 & m+2 & \dots & m+n \end{array}\right) \sim \binom{a_{\overline{n}|i}}{m} \sim \binom{a_{\overline{n}|i}v^m}{0}$$

$$\Rightarrow {}_{m/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}v^m$$

La prima equivalenza è per definizione, la seconda per la proprietà di uniformità nel tempo, la terza per la definizione di fattore di attualizzazione combinata con la proprietà di omogeneità d'importo, la conclusione segue dalla scindibilità nonché dai Postulati (P1) e (P3).

VALORE ATTUALE E MONTANTE DI RENDITE UNITARIE

In alternativa, una rendita differita può essere decomposta come segue:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 2 & \dots & m & m+1 & m+2 & \dots & m+n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; {}_{m/}a_{n\rceil i} = a_{m+n\rceil i} - a_{m\rceil i}$$

- Calcolo di ${}_{m/}a_{\infty\rceil i}$
  Per le stesse considerazioni di prima, nel caso delle rendite differite perpetue si ha:

$${}_{m/}a_{\infty\rceil i} = a_{\infty\rceil i} v^m = a_{\infty\rceil i} - a_{m\rceil i}$$

VALORE ATTUALE E MONTANTE DI RENDITE UNITARIE

- Calcolo di ${}_{m/}s_{n\rceil i}$
  1) Per le varie proprietà, in particolare la proprietà simmetrica e transitiva della relazione di equivalenza, si ha:

$$\begin{pmatrix} {}_{m/}s_{n\rceil i} \\ m+n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} {}_{m/}a_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{m/}s_{n\rceil i} = {}_{m/}a_{n\rceil i}\, u^{m+n}$$

  2) In alternativa, pensando alla decomposizione

$$\left(\begin{array}{cccccccc} -1 & -1 & \dots & -1 & & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 2 & \dots & m & m+1 & m+2 & \dots & m+n \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow {}_{m/}s_{n\rceil i} = s_{m+n\rceil i} - s_{m\rceil i}\, u^{n}$$

3) Infine, come terza alternativa, ricordiamo che, per l'uniformità nel tempo, si ha:

$$\binom{s_{n\rceil i}}{n} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \Rightarrow \binom{s_{n\rceil i}}{m+n} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m+1 & m+2 & \dots & m+n \end{pmatrix}$$

Ma anche

$$\binom{{}_{m/}s_{n\rceil i}}{m+n} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m+1 & m+2 & \dots & m+n \end{pmatrix}$$

per cui, per le varie proprietà e postulati

$$\Rightarrow {}_{m/}s_{n\rceil i} = s_{n\rceil i}$$

Valore attuale e Montante di rendite unitarie

- Passiamo ora al caso delle rendite anticipate.
- Calcolo di $\ddot{a}_{n\rceil i}$

  Ci sono vari modi alternativi. Ad esempio:

  1) via definizione

$$\ddot{a}_{n\rceil i} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

  2) Poiché, per l'uniformità nel tempo e per la definizione del fattore di capitalizzazione u, $\binom{1}{j-1} \sim \binom{u}{j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{a}_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u & u & \ldots & u \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u a_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ddot{a}_{n\rceil i} = u a_{n\rceil i} = (1+i)\frac{1-v^n}{i} = \frac{1-v^n}{iv} = \frac{1-v^n}{d}$$

VALORE ATTUALE E MONTANTE DI RENDITE UNITARIE

3) Sempre per l'uniformità nel tempo e per la definizione di tasso d'interesse anticipato $d = iv$, $\binom{d}{j-1} \sim \binom{i}{j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\Rightarrow \binom{1}{0} \sim \left\{ \begin{pmatrix} i & i & \ldots & i \\ \hline 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}, \binom{1}{n} \right\}$$

$$\sim \left\{ \begin{pmatrix} d & d & \ldots & d \\ \hline 0 & 1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}, \binom{1}{n} \right\} \sim \binom{d\ddot{a}_{n\rceil i} + v^n}{0}$$

$$\Rightarrow 1 = d\ddot{a}_{n\rceil i} + v^n \Rightarrow \ddot{a}_{n\rceil i} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Interpretazione: avere un capitale unitario in 0 equivale a ricevere gli interessi anticipati sullo stesso capitale all'inizio di ciascun anno ($= d$) più la restituzione del capitale in fondo (cioè in n)

4) Infine, si può considerare la seguente decomposizione:

$$\binom{\ddot{a}_{n\rceil i}}{0} \sim \left\{ \binom{1}{0}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \right\} \sim \binom{1+a_{n-1\rceil i}}{0}$$

$$\Rightarrow \ddot{a}_{n\rceil i} = 1 + a_{n-1\rceil i}$$

- Calcolo di $\ddot{a}_{\infty\rceil i}$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\infty\rceil i} &= \lim_{n\to+\infty} \ddot{a}_{n\rceil i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-v^n}{d} = \frac{1}{d} \\ &= u a_{\infty\rceil i} = \frac{1+i}{i} \\ &= 1 + a_{\infty\rceil i} = 1 + \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Interpretazione: Si può pensare anche alla relazione

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d & d & \dots \\ 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d\ddot{a}_{\infty\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = d\ddot{a}_{\infty\rceil i}$$

che stabilisce l'equivalenza tra l'importo unitario in 0 e il pagamento degli interessi anticipati all'inizio di ciascun anno senza mai restituzione del capitale.

- Calcolo di $\ddot{s}_{n\rceil i}$

$$\ddot{s}_{n\rceil i} = u^n \ddot{a}_{n\rceil i} = u s_{n\rceil i} = \frac{u^n - 1}{d}$$

Valore attuale e Montante di rendite unitarie

- Infine, per quanto riguarda le rendite anticipate differite, abbiamo lo stesso tipo di relazioni che ci sono per le posticipate, tenendo presente che qui è tutto "shiftato" indietro di un anno:

$$
\begin{aligned}
{}_{m/}\ddot{a}_{n\rceil i} &= \ddot{a}_{n\rceil i} v^m = \ddot{a}_{m+n\rceil i} - \ddot{a}_{m\rceil i} \\
{}_{m/}\ddot{a}_{\infty\rceil i} &= \ddot{a}_{\infty\rceil i} v^m = \ddot{a}_{\infty\rceil i} - \ddot{a}_{m\rceil i} \\
{}_{m/}\ddot{s}_{n\rceil i} &= {}_{m/}\ddot{a}_{n\rceil i}\, u^{m+n} = \ddot{s}_{m+n\rceil i} - \ddot{s}_{m\rceil i}\, u^n = \ddot{s}_{n\rceil i}
\end{aligned}
$$

RATA DI AMMORTAMENTO DI UN DEBITO UNITARIO

- Supponiamo di voler restituire un debito unitario mediante n rate costanti, ad esempio posticipate:

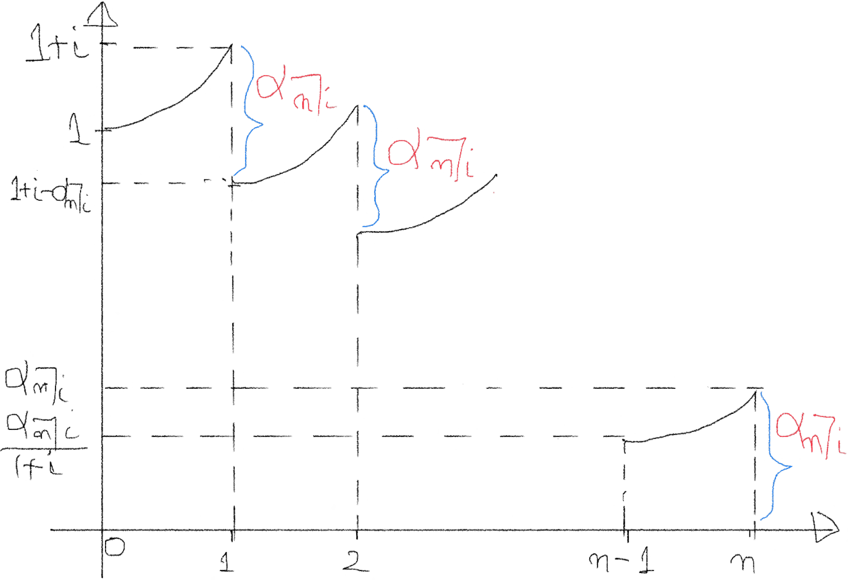
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} R & R & \dots & R \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} Ra_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Poiché dev'essere $1 = Ra_{n\rceil i}$, si ottiene

$$R = \frac{1}{a_{n\rceil i}} \doteq \alpha_{n\rceil i}$$

- $\alpha_{n\rceil i}$ si chiama rata di ammortamento di un debito unitario (sottinteso costante).

RATA DI AMMORTAMENTO DI UN DEBITO UNITARIO



Rata di ammortamento di un debito unitario

- Si potrebbe pensare di fare la stessa cosa, però con rate anticipate; in tal caso la rata è pari a

$$\frac{1}{\ddot{a}_{n\rceil i}} \doteq \ddot{\alpha}_{n\rceil i}$$

$\leadsto$ Visto che la prima rata va pagata subito, quello che si riceve all'inizio non è 1 bensì $1 - \ddot{\alpha}_{n\rceil i}$

- Per questo motivo tale modalità di ammortamento, in cui si restituisce subito qualcosa, non è utilizzata nella pratica, mentre è possibile il pagamento anticipato dei soli interessi

$\leadsto$ Quindi all'inizio si riceve $1 - d$

$\leadsto$ Vengono detratti dal prestito solo gli interessi anticipati sul capitale unitario, pari a d, mentre non si restituisce anche una quota del capitale, che sarebbe inclusa in $\ddot{\alpha}_{n\rceil i}$

QUOTA COSTITUTIVA DI UN CAPITALE UNITARIO

- Simmetricamente a quanto appena visto, immaginiamo di voler, pian pianino, costituire un capitale ($\rightsquigarrow$ montante) unitario in n, mediante il versamento di n rate costanti.
- Anche se qui avrebbe più senso considerare il caso di rate anticipate, per analogia con l'ammortamento di un debito unitario (e anche per fare un confronto) consideriamo invece il caso di rate posticipate:

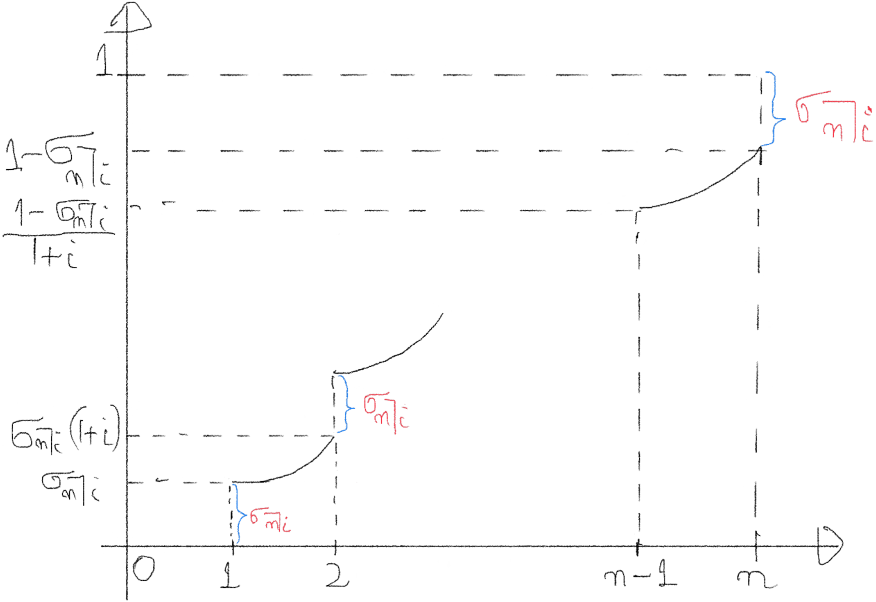
$$\begin{pmatrix} R & R & \dots & R \\ \hline 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}$$

- Poiché

$$\begin{pmatrix} R & R & \dots & R \\ \hline 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} Rs_{n\rceil i} \\ n \end{pmatrix} \Rightarrow Rs_{n\rceil i} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{s_{n\rceil i}} \doteq \sigma_{n\rceil i}$$

- $\sigma_{n\rceil i}$ si chiama quota costitutiva di un capitale unitario (sottinteso costante).

QUOTA COSTITUTIVA DI UN CAPITALE UNITARIO



LEGAME TRA α E σ

- Ricordiamo che

$$a_{n\rceil i} = \frac{1-v^n}{i} \quad \Rightarrow \quad i a_{n\rceil i} = 1 - v^n$$

- Dividiamo entrambi i membri per $a_{n\rceil i} (> 0)$:

$$\Rightarrow \; i = \frac{1}{a_{n\rceil i}} - \frac{v^n}{a_{n\rceil i}} = \frac{1}{a_{n\rceil i}} - \frac{1}{u^n a_{n\rceil i}} = \frac{1}{a_{n\rceil i}} - \frac{1}{s_{n\rceil i}} = \alpha_{n\rceil i} - \sigma_{n\rceil i}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{n\rceil i} = \sigma_{n\rceil i} + i$$

Interpretazione: Versando annualmente $\sigma_{n\rceil i}$ si ottiene il capitale unitario in n, versando invece $\alpha_{n\rceil i}$ si ottiene lo stesso capitale in 0

$\rightsquigarrow$ La differenza è data dagli interessi annui sul capitale unitario

LEGAME TRA α E σ

Infatti:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{pmatrix} i & i & \dots & i \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \right\}$$

$$\sim \left\{ \begin{pmatrix} i & i & \dots & i \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & \dots & \sigma \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \right\}$$

$$\sim \begin{pmatrix} i+\sigma & i+\sigma & \dots & i+\sigma \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i+\sigma & i+\sigma & \dots & i+\sigma \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = i + \sigma$$

Osservazione: In generale

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \not\Rightarrow R_j = S_j \;\; \forall j$$

ma nel nostro caso sì perché sia R_j che S_j sono costanti al variare di j.

LEGAME TRA $\ddot{\alpha}$ E $\ddot{\sigma}$

- Analogamente, si potrebbe istituire una simile relazione anche nel caso anticipato, dopo aver definito

$$\ddot{\sigma}_{n\rceil i} \doteq \frac{1}{\ddot{s}_{n\rceil i}}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} & \ddot{\alpha} & \dots & \ddot{\alpha} \\ \hline 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{pmatrix} d & d & \dots & d \\ \hline 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \right\} \\
&\sim \left\{ \begin{pmatrix} d & d & \dots & d \\ \hline 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddot{\sigma} & \ddot{\sigma} & \dots & \ddot{\sigma} \\ \hline 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \right\} \\
&\sim \begin{pmatrix} d+\ddot{\sigma} & d+\ddot{\sigma} & \dots & d+\ddot{\sigma} \\ \hline 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \ddot{\alpha}_{n\rceil i} = d + \ddot{\sigma}_{n\rceil i}$$

RENDITE FRAZIONATE

- Nella pratica, anche se la periodicità di pagamento delle rate non è annua, viene dichiarata la rata annua, ad es. unitaria, che viene frazionata in $k > 1$ rate pari a $\frac{1}{k}$ pagabili all'inizio o alla fine di ciascun k-esimo d'anno
  $\rightsquigarrow$ Se $k = 2$ abbiamo quindi una rendita semestrale di rata $\frac{1}{2}$, se $k = 12$ abbiamo una rendita mensile di rata $\frac{1}{12}, \ldots$
- Una siffatta rendita si chiama frazionata
  $\rightsquigarrow$ La sua valutazione può essere effettuata come visto finora, pur di usare tassi coerenti con la periodicità dei pagamenti
- In particolare, dal momento che continuano a sussistere i precedenti legami con tutte le altre quantità (montante, rendite anticipate, differite, $\ldots$), ci concentriamo sul valore attuale di rendite immediate di n rate annue unitarie frazionate in rate di $\frac{1}{k}$ pagabili posticipatamente k volte l'anno.

RENDITE FRAZIONATE

- Indichiamo con $a^{(k)}_{\overline{n}|}$ tale valore attuale dove, per non fare confusione, omettiamo di esplicitare il tasso perché quello che viene di solito dichiarato non è i bensì il tasso nominale convertibile k volte all'anno j_k:

$$\begin{pmatrix} a^{(k)}_{\overline{n}|} \\ \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \\ \hline \frac{1}{k} & \frac{2}{k} & \cdots & \frac{nk}{k} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ In tutto abbiamo nk rate, ciascuna di importo $\frac{1}{k}$

RENDITE FRAZIONATE

- Il valore attuale in 0 della rendita è dunque dato da

$$a^{(k)}_{n\rceil} = \frac{1}{k} a_{nk\rceil i_k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - v_k^{nk}}{i_k}$$

dove è stato usato il tasso "adeguato", riferito al k-esimo d'anno, $i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$, e $v_k = \frac{1}{1+i_k} = v^{\frac{1}{k}}$ è il fattore di attualizzazione corrispondente

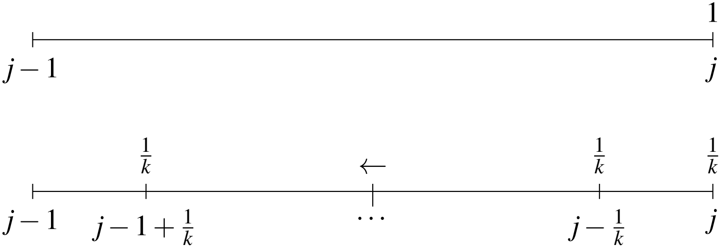
$$\Rightarrow \quad a^{(k)}_{n\rceil} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \left(v^{\frac{1}{k}}\right)^{nk}}{i_k} = \frac{1 - v^n}{k i_k} = \frac{1 - v^n}{j_k}$$

$\rightsquigarrow$ Quindi c'è il seguente legame tra i valori attuali di una rendita annua ed una frazionata:

$$a_{n\rceil i} = \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1 - v^n}{i} \cdot \frac{j_k}{j_k} = \frac{j_k}{i} a^{(k)}_{n\rceil}$$

RENDITE FRAZIONATE

- Ricordando che nel regime esponenziale $j_k < i$ se $k > 1$, si ha $a_{n\rceil}^{(k)} > a_{n\rceil i}$, com'è d'altronde intuitivo perché se le rate sono pagate prima valgono di più visto che i tassi sono > 0:



RENDITE FRAZIONATE

- Casi limite:
  - ▷ rendita perpetua, frazionata, immediata e posticipata

$$a^{(k)}_{\infty\rceil} = \lim_{n\to+\infty} a^{(k)}_{n\rceil} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-v^n}{j_k} = \frac{1}{j_k}$$

  - ▷ rendita continua, temporanea e immediata $\rightsquigarrow$ le rate sono pagate nel continuo, cioè istante per istante, con flusso annuo unitario

$$\bar{a}_{n\rceil} = \lim_{k\to+\infty} a^{(k)}_{n\rceil} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1-v^n}{j_k} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

$\rightsquigarrow$ Allo stesso risultato si poteva pervenire calcolando

$$\bar{a}_{n\rceil} = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \left[\frac{e^{-\delta t}}{-\delta}\right]_0^n = \frac{e^{-\delta n}-1}{-\delta} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

  - ▷ rendita continua, immediata e perpetua

$$\bar{a}_{\infty\rceil} = \lim_{n\to+\infty} \bar{a}_{n\rceil} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-v^n}{\delta} = \frac{1}{\delta}$$

RENDITE CON RATE IN PROGRESSIONE ARITMETICA

- Consideriamo una rendita immediata posticipata, con rate crescenti in progressione aritmetica, e supponiamo che la ragione della progressione, unitaria, coincida con la prima rata:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \dots & n \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & n \end{array}$$

- Tale rendita si chiama increasing, e il suo valore attuale, montante, etc., vengono indicati in maniera analoga a quelli delle rendite a rata costante unitaria salvo anteporre la lettera I al simbolo corrispondente; quindi, in particolare:

$$\begin{pmatrix} (Ia)_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Rendite con rate in progressione aritmetica

- Calcolo di $(Ia)_{n\rceil i}$

$$(Ia)_{n\rceil i} = v + 2v^2 + \cdots + (n-1)v^{n-1} + nv^n$$

▷ Moltiplichiamo entrambi i membri per $u = 1 + i$:

$$(1+i)(Ia)_{n\rceil i} = 1 + 2v + 3v^2 + \cdots + nv^{n-1}$$

▷ Sottraiamo membro a membro la prima equazione dalla seconda:

$$i(Ia)_{n\rceil i} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} - nv^n = \ddot{a}_{n\rceil i} - nv^n$$

$$\Rightarrow \quad (Ia)_{n\rceil i} = \frac{\ddot{a}_{n\rceil i} - nv^n}{i}$$

RENDITE CON RATE IN PROGRESSIONE ARITMETICA

- Calcolo di $(Ia)_{\infty\rceil i}$

  Se la rendita è perpetua si ha

$$(Ia)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to+\infty}(Ia)_{n\rceil i} = \frac{\ddot{a}_{\infty\rceil i}}{i} = \frac{1}{id} = \frac{1}{i^2 v} = \frac{1+i}{i^2}$$

  in quanto, essendo $0 < v < 1$, $\lim_{n\to+\infty} nv^n = 0$.

- Calcolo di $(Is)_{n\rceil i}$

  Il montante in n della rendita è dato da

$$(Is)_{n\rceil i} = u^n (Ia)_{n\rceil i} = \frac{\ddot{s}_{n\rceil i} - n}{i}$$

RENDITE CON RATE IN PROGRESSIONE ARITMETICA

- Calcolo di $(I\ddot{a})_{n\rceil i}$

  1) Se la rendita è anticipata si può ragionare come segue:

$$\begin{pmatrix} (I\ddot{a})_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \hline 0 & 1 & \dots & n-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} u & 2u & \dots & nu \\ \hline 1 & 2 & \dots & n \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \; (I\ddot{a})_{n\rceil i} = u(Ia)_{n\rceil i} = \frac{\ddot{a}_{n\rceil i} - nv^n}{iv} = \frac{\ddot{a}_{n\rceil i} - nv^n}{d}$$

  2) In alternativa:

$$\begin{pmatrix} (I\ddot{a})_{n\rceil i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \hline 0 & 1 & \dots & n-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \; (I\ddot{a})_{n\rceil i} = \ddot{a}_{n\rceil i} + (Ia)_{n-1\rceil i}$$

RENDITE CON RATE IN PROGRESSIONE ARITMETICA

- Calcolo di $(I\ddot{a})_{\infty\rceil i}$

  Se la rendita anticipata è perpetua si ha:

$$
\begin{aligned}
(I\ddot{a})_{\infty\rceil i} &= (1+i)(Ia)_{\infty\rceil i} = (1+i)\cdot\frac{1+i}{i^2} = \left(\frac{1+i}{i}\right)^2 \\
&= \ddot{a}_{\infty\rceil i} + (Ia)_{\infty\rceil i} = \frac{1}{d} + \frac{1+i}{i^2} = \frac{1+i}{i} + \frac{1+i}{i^2} = \left(\frac{1+i}{i}\right)^2
\end{aligned}
$$

- Calcolo di $(I\ddot{s})_{n\rceil i}$

$$
\begin{aligned}
(I\ddot{s})_{n\rceil i} &= u^n (I\ddot{a})_{n\rceil i} = u(Is)_{n\rceil i} \\
&= \ddot{s}_{n\rceil i} + u(Is)_{n-1\rceil i} = \ddot{s}_{n\rceil i} + (I\ddot{s})_{n-1\rceil i}
\end{aligned}
$$

- Formule ovvie si ottengono anche per le rendite increasing differite.

RENDITE CON RATE IN PROGRESSIONE ARITMETICA

- Ci si può comunque ricondurre al caso precedente anche quando la ragione della progressione, b, è diversa dalla prima rata, R:

$$\begin{array}{ccccc} & R & R+b & \ldots & R+b(n-1) \\ \hline 0 & 1 & 2 & \ldots & n \end{array}$$

⇝ Se $b > 0$ la rendita è increasing, se $-\frac{R}{n-1} < b < 0$ è decreasing

- Si ha infatti:

$$\left(\begin{array}{cccc} R & R+b & \ldots & R+(n-1)b \\ \hline 1 & 2 & \ldots & n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} b & 2b & \ldots & nb \\ R-b & R-b & \ldots & R-b \\ \hline 1 & 2 & \ldots & n \end{array}\right)$$

⇝ Il valore attuale in 0 della rendita è quindi dato da

$$V = \sum_{j=1}^{n} [R+b(j-1)]v^j = (R-b)a_{\overline{n}|i} + b(Ia)_{\overline{n}|i}$$

RENDITE CON RATE IN PROGRESSIONE GEOMETRICA

- Se invece le rate sono in progressione geometrica di ragione $b > 0$:

	R	Rb	$\dots$	Rb^{n-1}
0	1	2	$\dots$	n

il valore attuale in 0 della rendita è dato da

$$\begin{aligned} V &= Rv + Rbv^2 + Rb^2v^3 + \cdots + Rb^{n-1}v^n \\ &= Rv\left[1 + (bv) + (bv)^2 + \dots (bv)^{n-1}\right] \\ &= \begin{cases} Rv\frac{1-(bv)^n}{1-bv} & \text{se } b \neq 1+i \\ Rvn & \text{se } b = 1+i \end{cases} = Rv\ddot{a}_{n\rceil \frac{1}{bv}-1} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Si tratta del valore attuale di una rendita a rata costante Rv immediata, anticipata, in cui il fattore di attualizzazione è pari a bv ($\rightsquigarrow$ tasso di valutazione $= \frac{1}{bv} - 1$, ≤ 0 se $b \geq 1+i$)

AMMORTAMENTI

- Ci occupiamo ora delle modalità in base a cui viene restituito un debito.
- Quando un debitore prende a prestito un capitale C da un creditore, nel contratto di mutuo stipulato tra le parti vengono precisate tutte le modalità che regolano la restituzione del capitale e la corresponsione degli interessi.
- Tali modalità vengono descritte in quello che si chiama piano di ammortamento del debito.
- Almeno in un primo momento, consideriamo prestiti a tasso fisso (e costante nel tempo).

AMMORTAMENTI

- Indichiamo con $T_0 = 0$ l'epoca di stipulazione del contratto e supponiamo che la restituzione del capitale avvenga tramite la corresponsione di $n+1$ rate $R_0, R_1, \ldots, R_n$ alle epoche T_0, T_1, $\ldots$, T_n (eventualmente la prima rata R_0 potrebbe non esserci).
- Dal punto di vista del debitore possiamo quindi rappresentare l'operazione di ammortamento (scambio del capitale C contro la rendita di rate $R_0, \ldots, R_n$) come segue:

$$
\begin{array}{ccccc}
C - R_0 & -R_1 & -R_2 & \ldots & -R_n \\
\hline
T_0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_n
\end{array}
$$

AMMORTAMENTI

- Il tasso d'interesse i che rende equa l'operazione finanziaria all'epoca iniziale ($\rightsquigarrow$ e quindi anche in seguito, visto che operiamo nel regime esponenziale) si chiama tasso di remunerazione del prestito, o anche tasso tecnico:

$$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_n \\ \hline 0 & T_1 & \dots & T_n \end{pmatrix}$$

ovvero

$$C = \sum_{j=0}^{n} R_j v^{T_j} = \sum_{j=0}^{n} R_j \left(\frac{1}{1+i} \right)^{T_j}$$

- Questa condizione, che esprime l'equità in 0 dell'operazione di ammortamento in base al tasso di remunerazione i, si chiama condizione di chiusura finanziaria.

AMMORTAMENTI

- Tutte le rate sono formate da due componenti: la quota capitale (o quota di ammortamento del debito) C_j, che va ad abbattere il debito, e la quota interessi I_j, relativa appunto agli interessi:

$$R_j = C_j + I_j,\ \ j = 0, 1, \ldots, n, \quad \text{con}\ \ C_0 = 0$$

- Deve valere inoltre la condizione di chiusura elementare:

$$C = \sum_{j=1}^{n} C_j$$

- Nel seguito dimostreremo l'equivalenza tra la condizione di chiusura elementare e quella di chiusura finanziaria.

AMMORTAMENTI

- Se tutte le rate (eccetto R_0) contengono una quota capitale strettamente > 0, l'ammortamento si dice progressivo.
- Usualmente i mutui concessi a privati (ad es. per l'acquisto della casa) sono progressivi, ma talvolta sono preceduti da una fase iniziale di preammortamento, in cui si pagano solo gli interessi, oppure l'ammortamento parte con ritardo e nella fase iniziale non si pagano nemmeno gli interessi
  $\rightsquigarrow$ in quest'ultimo caso il debito aumenta anziché diminuire
- Lo Stato, gli enti pubblici e le società usano invece indebitarsi tramite l'emissione di obbligazioni e con ammortamenti non progressivi, restituendo in blocco l'intero capitale a scadenza
  $\rightsquigarrow$ unica quota capitale a scadenza

AMMORTAMENTI NON PROGRESSIVI

- Tratteremo preliminarmente la situazione degli ammortamenti non progressivi con un'unica quota capitale a scadenza, distinguendo tra quattro tipologie:

  1) Gli interessi sono pagati in blocco alla scadenza T_n
  $\rightsquigarrow$ c'è un'unica quota interessi a scadenza $\rightsquigarrow$ c'è un'unica rata

$$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} C(1+i)^{T_1} \\ T_1 \end{pmatrix}$$

  $\rightsquigarrow R_0 = I_0 = 0,$
  $R_1 = C(1+i)^{T_1}, \; C_1 = C, \; I_1 = R_1 - C_1 = C\left[(1+i)^{T_1} - 1\right]$

  ▷ In realtà questa è l'operazione finanziaria elementare di scambio tra due importi in epoche diverse, di cui abbiamo ampiamente discusso al momento della definizione delle leggi finanziarie.

  ▷ Tale modalità è tipica, ad es., dei Buoni Fruttiferi Postali (in cui tuttavia il tasso d'interesse di solito cambia nel tempo in maniera deterministica).

AMMORTAMENTI NON PROGRESSIVI

2) Gli interessi sono pagati in blocco alla stipula del contratto
$\rightsquigarrow$ c'è un'unica quota interessi anticipata in 0 $\rightsquigarrow$ ci sono due rate

$$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} R_0 & R_1 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow R_0 = I_0 = C\left[(1+i)^{T_1} - 1\right] v^{T_1} = C\left(1 - v^{T_1}\right),$$
$$I_1 = 0, \;\; R_1 = C_1 = C$$

▷ Tenendo conto che in 0 si riceve l'importo netto $C - R_0$ e in 1 si paga R_1, anche questa è un'operazione finanziaria elementare di scambio tra due importi in epoche diverse.

▷ Tale modalità è tipica, ad es., dei BOT (Buoni Ordinari del Tesoro), titoli emessi dallo Stato di tipo zero-coupon, in cui T_1 è pari a 3 mesi, 6 mesi o 1 anno, e dei CTZ (Certificati del Tesoro di tipo Zero-coupon), con $T_1 = 2$ anni; in entrambi i casi il capitale C, valore nominale del Buono, è un multiplo di 1000 Euro.

- A parte queste due situazioni particolari in cui sono coinvolte soltanto 2 date, per tutte le altre d'ora innanzi supporremo, per alleggerire la notazione, che le date siano equidistanziate, e assumeremo come unità di misura del tempo la comune distanza tra due date consecutive, naturalmente usando tassi (o fattori) coerenti con tale unità di misura nel regime esponenziale, anche se li indicheremo con i simboli introdotti per i tassi annui

  $\rightsquigarrow T_j = j,\ \ j = 1, 2, \ldots, n$

AMMORTAMENTI NON PROGRESSIVI

3) Gli interessi sono pagati posticipatamente, alla fine di ciascun periodo (anno, semestre, ...)

$$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} Ci & Ci & \dots & Ci+C \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $I_0 = 0,\ I_1 = I_2 = \cdots = I_n = Ci$
$C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-1} = 0,\ C_n = C$
$R_0 = 0,\ R_1 = R_2 = \cdots = R_{n-1} = Ci,\ R_n = C_n + I_n = C(1+i)$

▷ Tale modalità è tipica, ad es., dei BTP (Buoni del Tesoro Poliennali) o, in generale, delle obbligazioni a tasso fisso (coupon bonds); in particolare, i BTP sono titoli emessi dallo Stato con durate fino a 50 anni, cedole (cioè quote interessi) semestrali posticipate, e valore nominale multiplo di 1000 Euro.

4) Gli interessi sono pagati anticipatamente, all'inizio di ciascun periodo

$$\binom{C}{0} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} Cd & Cd & \dots & Cd & C \\ 0 & 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $I_0 = I_1 = \cdots = I_{n-1} = Cd, \;\; I_n = 0$

$C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-1} = 0, \;\; C_n = C$

$R_0 = R_1 = \cdots = R_{n-1} = Cd, \;\; R_n = C$

AMMORTAMENTI PROGRESSIVI

- Come già detto, negli ammortamenti progressivi tutte le quote capitale (eccetto C_0) sono > 0.
- Indichiamo con Q_j il debito residuo all'epoca j, così definito:

$$\begin{cases} Q_0 = C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \ (\rightsquigarrow \text{chiusura elementare}) \\ Q_1 = Q_0 - C_1 = C_2 + C_3 + \cdots + C_n \\ \vdots \\ Q_j = Q_{j-1} - C_j = C_{j+1} + C_{j+2} + \cdots + C_n = \sum_{k=j+1}^{n} C_k \\ \vdots \\ Q_{n-1} = C_n \\ Q_n = 0 \end{cases}$$

- Distinguiamo tra due situazioni: ammortamenti a interessi posticipati e a interessi anticipati.

AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

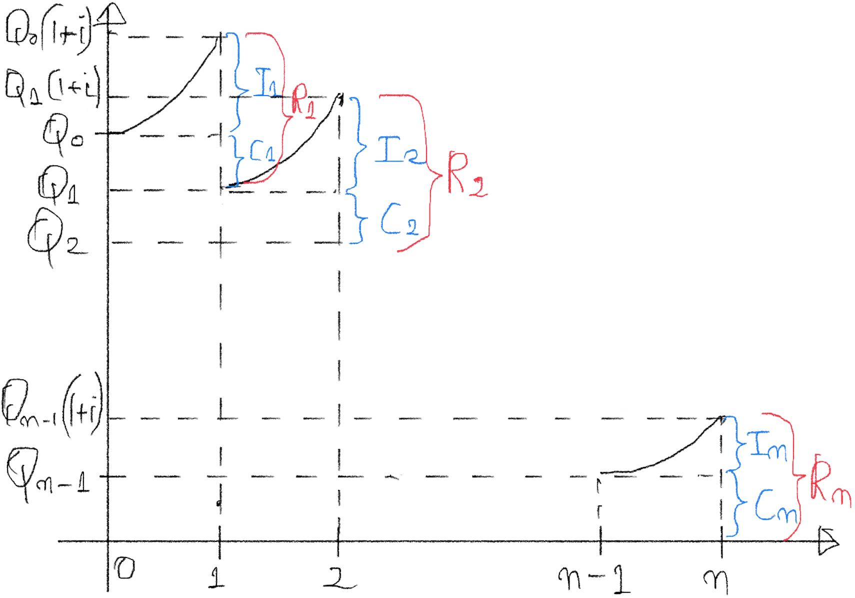
- Negli ammortamenti a interessi posticipati le quote interessi sono pagate posticipatamente, alla fine di ciascun periodo.
- La quota interessi I_j, pagata posticipatamente all'epoca j, coincide con gli interessi maturati in j sul debito residuo Q_{j-1} e relativi all'intervallo di tempo $[j-1, j]$:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} I_j = iQ_{j-1} = i(C_j + \cdots + C_n) \\ R_j = C_j + I_j = C_j + iQ_{j-1} \end{cases} \quad , \ j = 1, 2, \ldots, n$$

$\rightsquigarrow$ Le quote interessi sono decrescenti, perché proporzionali al debito residuo, che decresce nel tempo

- In particolare, poiché $Q_{n-1} = C_n$, l'ultima quota interessi è $I_n = iQ_{n-1} = iC_n$ e l'ultima rata è $R_n = C_n + I_n = C_n(1+i)$
$\rightsquigarrow$ $C_n = R_n v$

AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI



AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

- La seguente tabella descrive il piano di ammortamento di un debito a interessi posticipati e scadenze equidistanziate:

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	$-$	$-$	$-$	C
1	$I_1 + C_1$	iQ_0	C_1	$Q_0 - C_1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$I_j + C_j$	iQ_{j-1}	C_j	$Q_{j-1} - C_j$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$(1+i)C_n$	iC_n	C_n	0

AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

- Negli ammortamenti a interessi posticipati vale la seguente Proposizione:

$$Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} C_h,\ j=0,1,\dots,n-1 \ \Leftrightarrow\ Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j},\ j=0,1,\dots,n-1$$

dove $v = \frac{1}{1+i}$

⇝ Il debito residuo Q_j, definito come somma di tutte le quote capitale future, negli ammortamenti a interessi posticipati si ottiene anche come valore attuale in j, al tasso di remunerazione i, di tutte le rate future

⇝ Nel caso particolare in cui $j = 0$, questa proposizione fornisce l'equivalenza tra chiusura elementare e chiusura finanziaria dell'operazione di ammortamento

AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

- Dimostrazione

  $(\Rightarrow)$ Supponiamo che $Q_h = \sum_{k=h+1}^{n} C_k, \;\; h = 0, 1, \ldots, n-1$
  $\rightsquigarrow \;\; Q_{h-1} = C_h + Q_h \;\; \rightsquigarrow \;\; C_h = Q_{h-1} - Q_h, \;\; h = 1, 2, \ldots, n$

  Dobbiamo allora dimostrare che $\sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j} = Q_j$ $\forall\, j = 0, 1, \ldots, n-1$; a tale scopo fissiamo arbitrariamente $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, per cui:

$$\sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j} = \sum_{h=j+1}^{n} (C_h + I_h) v^{h-j} = \sum_{h=j+1}^{n} (Q_{h-1} - Q_h + iQ_{h-1}) v^{h-j}$$

$$= \sum_{h=j+1}^{n} [Q_{h-1}(1+i) - Q_h] v^{h-j} = \sum_{h=j+1}^{n} Q_{h-1} v^{h-j-1} - \sum_{h=j+1}^{n} Q_h v^{h-j}$$

$$= Q_j + \sum_{h=j+2}^{n} Q_{h-1} v^{h-j-1} - \sum_{h=j+1}^{n-1} Q_h v^{h-j} - Q_n v^{n-j} = Q_j \quad \square$$

$\rightsquigarrow$ Per l'arbitrarietà di j, questo vale qualunque esso sia

AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

($\Leftarrow$) Supponiamo che $Q_h = \sum_{k=h+1}^n R_k v^{k-h}$, $h = 0, 1, \dots, n-1$.

Dobbiamo ora dimostrare che $\sum_{h=j+1}^n C_h = Q_j \ \forall j = 0, \dots, n-1$; a tale scopo fissiamo arbitrariamente $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, per cui:

$$\sum_{h=j+1}^{n} C_h = \sum_{h=j+1}^{n} (R_h - I_h) = \sum_{h=j+1}^{n} (R_h - iQ_{h-1}) = \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{h=j+1}^{n} iQ_{h-1}$$

$$= \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{h=j+1}^{n} i \sum_{k=h}^{n} R_k v^{k-h+1} = \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{k=j+1}^{n} iR_k \sum_{h=j+1}^{k} v^{k-h+1}$$

$$= \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{k=j+1}^{n} iR_k \sum_{r=1}^{k-j} v^r = \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{k=j+1}^{n} iR_k a_{k-j\rceil i}$$

$$= \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{k=j+1}^{n} iR_k \frac{1 - v^{k-j}}{i} = \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{k=j+1}^{n} R_k + \sum_{k=j+1}^{n} R_k v^{k-j} = Q_j \qquad \square$$

$\rightsquigarrow$ Per l'arbitrarietà di j, questo vale qualunque esso sia

AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

- Quindi

$$\begin{pmatrix} Q_j \\ j \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} R_{j+1} & R_{j+2} & \dots & R_n \\ j+1 & j+2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

ovvero $Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j}$ non è altro che il fabbisogno in j dell'operazione finanziaria di ammortamento del debito dal punto di vista del creditore ($\rightsquigarrow$ $[avere - dare] = [avere]$):

$$\begin{array}{cccccccc} -C & R_1 & R_2 & \dots & R_j & R_{j+1} & \dots & R_n \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & j & j+1 & \dots & n \end{array}$$

- Questo risultato vale in generale nel caso degli ammortamenti a interessi posticipati, anche per scadenze non equidistanziate.

ESEMPI DI AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

- Quote capitale costanti ($\rightsquigarrow$ Ammortamento italiano)

  $C_1 = C_2 = \cdots = C_n$

  $\rightsquigarrow$ Per la condizione di chiusura elementare $C = \sum_{j=1}^{n} C_j$

  $$\Rightarrow \quad C_j = \frac{C}{n},\ j = 1, \ldots, n$$

  $$\Rightarrow \quad Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} C_h = (n-j)\frac{C}{n},\ \ j = 0, \ldots, n-1 \quad \Rightarrow \quad Q_j - Q_{j+1} = \frac{C}{n}$$

  $\rightsquigarrow$ il debito residuo decresce in progressione aritmetica di ragione C/n

  $$\Rightarrow \quad I_j = iQ_{j-1} = i(n-j+1)\frac{C}{n},\ \ j = 1, \ldots, n$$

  $$\Rightarrow \quad R_j = C_j + I_j = \frac{C}{n}[1 + i(n-j+1)],\ \ j = 1, \ldots, n$$

  $\rightsquigarrow$ sia le quote interessi che le rate decrescono in progressione aritmetica di ragione iC/n

Esempi di ammortamenti a interessi posticipati

- Rate costanti ($\rightsquigarrow$ Ammortamento francese)

  $R_1 = R_2 = \cdots = R_n \doteq R$

  $\rightsquigarrow$ Per la condizione di chiusura finanziaria

$$C = \sum_{j=1}^{n} R_j v^j = R a_{n\rceil i} \;\Rightarrow\; R = \frac{C}{a_{n\rceil i}} = C\alpha_{n\rceil i}$$

$$\Rightarrow\; Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j} = R a_{n-j\rceil i},\; j = 0, \ldots, n-1$$

$$\Rightarrow\; I_j = iQ_{j-1} = iRa_{n-j+1\rceil i} = R\left(1 - v^{n-j+1}\right),\; j = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow\; C_j = R - I_j = Rv^{n-j+1},\; j = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow\; \frac{C_{j+1}}{C_j} = \frac{Rv^{n-j}}{Rv^{n-j+1}} = \frac{1}{v} = 1 + i,\; j = 1, \ldots, n-1$$

  $\rightsquigarrow$ le quote capitale crescono in progressione geometrica di ragione $1 + i$

ESEMPIO NUMERICO DI AMMORTAMENTO ITALIANO

- $C = 100000$, $n = 10$, $i = 0.03$

  $\rightsquigarrow$ $C_j = 100000/10 = 10000, \; j = 1, \ldots, 10$

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	–	–	–	100000
1	13000	3000	10000	90000
2	12700	2700	10000	80000
3	12400	2400	10000	70000
4	12100	2100	10000	60000
5	11800	1800	10000	50000
6	11500	1500	10000	40000
7	11200	1200	10000	30000
8	10900	900	10000	20000
9	10600	600	10000	10000
10	10300	300	10000	0

ESEMPIO NUMERICO DI AMMORTAMENTO FRANCESE

- $C = 100000$, $n = 10$, $i = 0.03$

  $\rightsquigarrow$ $R = 100000/a_{10\rceil 0.03} \simeq 100000/8.5302 \simeq 11723.05$

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	–	–	–	100000.00
1	11723.05	3000.00	8723.05	91276.95
2	11723.05	2783.31	8984.74	82292.21
3	11723.05	2468.77	9254.28	73037.93
4	11723.05	2191.14	9531.91	63506.02
5	11723.05	1905.18	9817.87	53688.15
6	11723.05	1610.64	10112.41	43575.74
7	11723.05	1307.27	10415.78	33159.96
8	11723.05	994.80	10728.25	22431.71
9	11723.05	672.95	11050.10	11381.61
10	11723.05	341.45	11381.60	0.01

CONFRONTO TRA ITALIANO E FRANCESE

- Come si vede dagli esempi numerici precedenti, le quote capitale dell'ammortamento francese sono dapprima inferiori, e poi superiori, a quelle, costanti, dell'ammortamento italiano.
- E' infatti naturale attendersi che le quote capitale, costanti, dell'italiano siano una media di quelle, non costanti, di un altro ammortamento con le stesse scadenze e debito iniziale.
- Per vedere questo indichiamo, per comodità, con $\bar{C}$ le quote capitale costanti di un ammortamento italiano e continuiamo ad indicare con C_j quelle di un altro ammortamento, ad es. francese.
- Per la condizione di chiusura elementare dev'essere

$$n\bar{C} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \quad \Rightarrow \quad \bar{C} = \frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n}$$

$\rightsquigarrow$ $\bar{C}$ è compresa tra la minima e la massima delle C_j

$\rightsquigarrow$ Nel caso dell'ammortamento francese, in cui le quote capitale sono crescenti, la minima è C_1 e la massima è C_n

CONFRONTO TRA ITALIANO E FRANCESE

- Analogamente, le rate dell'ammortamento italiano sono dapprima superiori, e poi inferiori, a quelle, costanti, dell'ammortamento francese.
- Anche qui è naturale attendersi che le rate, costanti, del francese siano una media di quelle, non costanti, di un altro ammortamento con pari scadenze, tasso tecnico e debito iniziale.
- Per vedere questo indichiamo, come già fatto, con R le rate costanti di un ammortamento francese e continuiamo ad indicare con R_j quelle di un altro ammortamento, ad es. italiano.
- Per la condizione di chiusura finanziaria dev'essere

$$Ra_{n\rceil i} = R_1 v + R_2 v^2 + \cdots + R_n v^n \;\Rightarrow\; R = \frac{R_1 v + R_2 v^2 + \cdots + R_n v^n}{v + v^2 + \cdots + v^n}$$

$\leadsto$ R è compresa tra la minima e la massima delle R_j

$\leadsto$ Nel caso dell'ammortamento italiano, in cui le rate sono decrescenti, la minima è R_n e la massima è R_1

AMMORTAMENTI A INTERESSI ANTICIPATI

- Negli ammortamenti a interessi anticipati le quote interessi sono pagate anticipatamente, all'inizio di ciascun periodo.
- La quota interessi I_j è relativa agli interessi maturati in $j+1$ sul debito residuo Q_j nell'intervallo di tempo $[j, j+1]$, interessi che vengono anticipati e pagati all'epoca j:

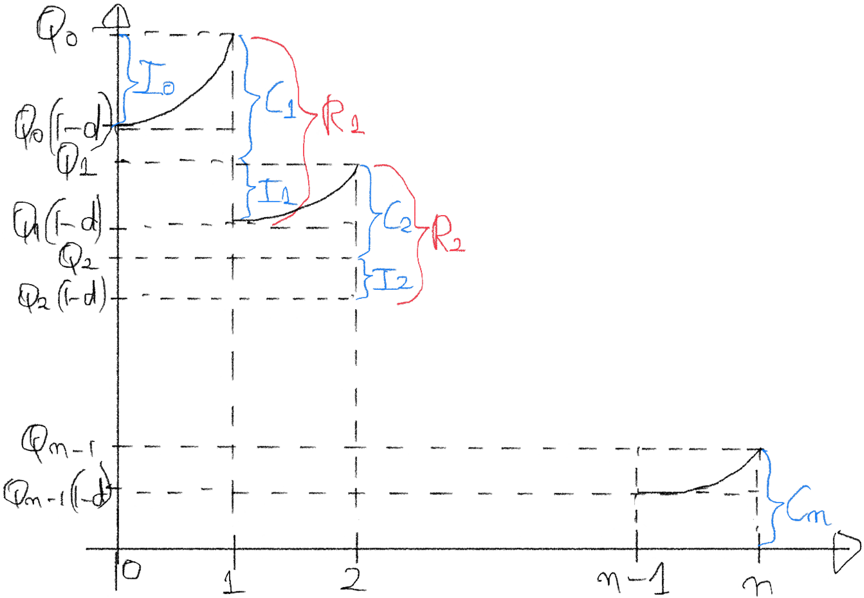
$$I_j = (iQ_j)v = dQ_j = d(C_{j+1} + \cdots + C_n), \;\; j = 0, 1, \ldots, n-1$$

$\rightsquigarrow$ Anche qui le quote interessi sono decrescenti, perché proporzionali al debito residuo, che decresce nel tempo

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} R_0 = I_0 = dQ_0 = dC \\ R_j = C_j + I_j = C_j + dQ_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ R_n = C_n = Q_{n-1} \end{cases}$$

- In particolare, poiché l'interesse relativo all'ultimo periodo viene pagato anticipatamente in $n-1$, l'ultima rata contiene solo la quota capitale.

AMMORTAMENTI A INTERESSI ANTICIPATI



Ammortamenti a interessi anticipati

- La seguente tabella descrive il piano di ammortamento di un debito a interessi anticipati e scadenze equidistanziate:

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	I_0	dQ_0	$-$	C
1	$I_1 + C_1$	dQ_1	C_1	$Q_0 - C_1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$I_j + C_j$	dQ_j	C_j	$Q_{j-1} - C_j$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	C_n	$-$	C_n	0

Ammortamenti a interessi anticipati

- Negli ammortamenti a interessi anticipati vale la seguente Proposizione:

$$Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} C_h, \; j = 0, \ldots, n-1 \;\Leftrightarrow\; Q_j = I_j + \sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j}, \; j = 0, \ldots, n-1$$

dove $v = \frac{1}{1+i}$

$\rightsquigarrow$ Il debito residuo Q_j, definito come somma di tutte le quote capitale future, negli ammortamenti a interessi anticipati si ottiene anche come valore attuale in j, al tasso di remunerazione i, di tutte le rate future, più la quota interessi ivi dovuta

$\rightsquigarrow$ Nel caso particolare in cui $j = 0$, questa proposizione fornisce l'equivalenza tra chiusura elementare e chiusura finanziaria dell'operazione di ammortamento

- Dimostrazione

  ($\Rightarrow$) Supponiamo che $Q_h = \sum_{k=h+1}^{n} C_k, \;\; h = 0,1,\ldots,n-1$
  $\rightsquigarrow \;\; Q_{h-1} = C_h + Q_h \;\; \rightsquigarrow \;\; C_h = Q_{h-1} - Q_h, \;\; h = 1,2,\ldots,n$
  Dobbiamo allora dimostrare che $\sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j} = Q_j(1-d)$, ovvero $\sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j-1} = Q_j \;\; \forall\, j = 0,1,\ldots,n-1$; a tale scopo fissiamo arbitrariamente $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, per cui:

$$\sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j-1} = \sum_{h=j+1}^{n} (C_h + I_h) v^{h-j-1} = \sum_{h=j+1}^{n} (Q_{h-1} - Q_h + dQ_h) v^{h-j-1}$$

$$= \sum_{h=j+1}^{n} [Q_{h-1} - Q_h(1-d)] v^{h-j-1} = \sum_{h=j+1}^{n} Q_{h-1} v^{h-j-1} - \sum_{h=j+1}^{n} Q_h v^{h-j}$$

$$= Q_j + \sum_{h=j+2}^{n} Q_{h-1} v^{h-j-1} - \sum_{h=j+1}^{n-1} Q_h v^{h-j} - Q_n v^{n-j} = Q_j \quad \square$$

$\rightsquigarrow$ Per l'arbitrarietà di j, questo vale qualunque esso sia

AMMORTAMENTI A INTERESSI ANTICIPATI

($\Leftarrow$) Supponiamo che $Q_h = \sum_{k=h+1}^{n} R_k v^{k-h-1}$, $h = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dobbiamo ora dimostrare che $\sum_{h=j+1}^{n} C_h = Q_j \;\; \forall\, j = 0, \ldots, n-1$;

a tale scopo fissiamo arbitrariamente $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, per cui:

$$\sum_{h=j+1}^{n} C_h = \sum_{h=j+1}^{n} (R_h - I_h) = \sum_{h=j+1}^{n} (R_h - dQ_h) = \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{h=j+1}^{n-1} dQ_h$$

$$= \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{h=j+1}^{n-1} d \sum_{k=h+1}^{n} R_k v^{k-h-1} = \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{k=j+2}^{n} dR_k \sum_{h=j+1}^{k-1} v^{k-h-1}$$

$$= \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{k=j+2}^{n} dR_k \sum_{r=0}^{k-j-2} v^r = \sum_{h=j+1}^{n} R_h - \sum_{k=j+2}^{n} dR_k \ddot{a}_{k-j-1\rceil i} = \sum_{h=j+1}^{n} R_h$$

$$- \sum_{k=j+2}^{n} dR_k \frac{1 - v^{k-j-1}}{d} = \sum_{h=j+2}^{n} R_h - \sum_{k=j+2}^{n} R_k + \sum_{k=j+1}^{n} R_k v^{k-j-1} = Q_j \quad \square$$

$\rightsquigarrow$ Per l'arbitrarietà di j, questo vale qualunque esso sia

AMMORTAMENTI A INTERESSI ANTICIPATI

- Quindi

$$\begin{pmatrix} Q_j - I_j \\ j \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} R_{j+1} & R_{j+2} & \dots & R_n \\ \hline j+1 & j+2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

ovvero $Q_j(1-d) = \sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j}$ non è altro che il fabbisogno in j dell'operazione finanziaria di ammortamento del debito dal punto di vista del creditore ($\rightsquigarrow$ $[avere - dare] = [avere]$):

$$\begin{array}{cccccccc} -C+R_0 & R_1 & R_2 & \dots & R_j & R_{j+1} & \dots & R_n \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & j & j+1 & \dots & n \end{array}$$

- Questo risultato vale in generale nel caso degli ammortamenti a interessi anticipati, anche per scadenze non equidistanziate.

ESEMPI DI AMMORTAMENTI A INTERESSI ANTICIPATI

- Quote capitale costanti ($\rightsquigarrow$ Ammortamento tedesco)
  $C_1 = C_2 = \cdots = C_n$

  $\rightsquigarrow$ Per la condizione di chiusura elementare $C = \sum_{j=1}^{n} C_j$

  $\Rightarrow \;\; C_j = C/n, \;\; j = 1, \ldots, n$

  $\Rightarrow \;\; Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} C_h = (n-j)C/n, \;\; j = 0, \ldots, n-1$

  $\Rightarrow \;\; Q_j - Q_{j+1} = C/n$ $\rightsquigarrow$ il debito residuo decresce in progressione aritmetica di ragione C/n

  $\Rightarrow \;\; I_j = dQ_j = d(n-j)C/n, \;\; j = 0, \ldots, n-1$

  $$\Rightarrow \;\; R_j = \begin{cases} dC & j = 0 \\ C_j + I_j = [1 + d(n-j)]C/n & j = 1, \ldots, n-1 \\ C/n & j = n \end{cases}$$

  $\rightsquigarrow$ sia le quote interessi che le rate (eccetto la prima) decrescono in progressione aritmetica di ragione dC/n

ESEMPIO NUMERICO DI AMMORTAMENTO TEDESCO

- $C = 100000,\ n = 10,\ i = 0.03 \rightsquigarrow \quad d = 0.03/1.03 \simeq 0.0291$
  $\rightsquigarrow \quad C_j = 100000/10 = 10000,\ \ j = 1, \ldots, 10$

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	2912.62	2912.62	–	100000
1	12621.36	2621.36	10000	90000
2	12330.10	2330.10	10000	80000
3	12038.83	2038.83	10000	70000
4	11747.57	1747.57	10000	60000
5	11456.31	1456.31	10000	50000
6	11165.05	1165.05	10000	40000
7	10873.79	873.79	10000	30000
8	10582.52	582.52	10000	20000
9	10291.26	291.26	10000	10000
10	10000.00	–	10000	0

AMMORTAMENTO A DUE TASSI

- Vediamo ora alcuni tipi particolari di ammortamento, al di fuori degli schemi precedentemente descritti: il primo di questi è chiamato ammortamento a due tassi, o americano.
- Si tratta di una combinazione tra un ammortamento non progressivo, con unica quota capitale a scadenza e pagamento degli interessi (posticipati o anticipati) per tutta la durata contrattuale, come negli esempi 3) e 4) visti precedentemente, e un piano di costituzione di un capitale a scadenza, di solito con rate costanti, gestito dalla stessa controparte che ha prestato i soldi o da una diversa, con l'obiettivo di avere a scadenza l'importo C da restituire integralmente.
- Il piano di accumulazione "viaggia" ad un tasso $i' \neq i$, di solito $i' < i \rightsquigarrow$ per questo si parla di ammortamento a 2 tassi

AMMORTAMENTO A DUE TASSI

- Per fissare le idee, supponiamo che gli interessi sul debito C siano pagati posticipatamente e le rate costitutive del capitale a scadenza siano anch'esse versate posticipatamente.
- Mettiamoci dal punto di vista del debitore che, in $j = 1, 2, \ldots, n$, deve pagare gli interessi sul debito al tasso i ($\rightsquigarrow I_j$) e versare le quote costitutive del capitale remunerate al tasso i' ($\rightsquigarrow R'$):

$$I_j = iC, \quad R' = \frac{C}{s_{n\rceil i'}} = C\sigma_{n\rceil i'}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

- Alla scadenza n si ritira il capitale C e lo si versa a estinzione del debito, per cui il saldo è nullo.
- "Sommando" le due operazioni di ammortamento non progressivo e costituzione di capitale si ottiene quindi un ammortamento progressivo a rata costante $R \doteq R' + I_j$.

AMMORTAMENTO A DUE TASSI

- Ricordando che $\alpha_{n\rceil i'} = i' + \sigma_{n\rceil i'} \rightsquigarrow \sigma_{n\rceil i'} = \alpha_{n\rceil i'} - i'$

$$\Rightarrow R = C\left[\sigma_{n\rceil i'} + i\right] = C\left[\left(\alpha_{n\rceil i'} - i'\right) + i\right] = C\left[\alpha_{n\rceil i'} + \left(i - i'\right)\right]$$

$\rightsquigarrow$ Se $i > i' \Rightarrow R > C\alpha_{n\rceil i'}$, cioè della rata costante di un ammortamento francese con (unico) tasso tecnico $= i'$

- Ricordando inoltre che $\alpha_{n\rceil i} = i + \sigma_{n\rceil i} \rightsquigarrow i = \alpha_{n\rceil i} - \sigma_{n\rceil i}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R = C\left[\sigma_{n\rceil i'} + i\right] &= C\left[\sigma_{n\rceil i'} + \left(\alpha_{n\rceil i} - \sigma_{n\rceil i}\right)\right] \\ &= C\left[\alpha_{n\rceil i} + \left(\sigma_{n\rceil i'} - \sigma_{n\rceil i}\right)\right] \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Se $i > i' \Rightarrow s_{n\rceil i} > s_{n\rceil i'} \Rightarrow \sigma_{n\rceil i} < \sigma_{n\rceil i'} \Rightarrow R > C\alpha_{n\rceil i}$, cioè della rata costante di un ammortamento francese con (unico) tasso tecnico $= i$

$\rightsquigarrow$ Non vale la condizione di chiusura finanziaria dell'operazione complessiva né al tasso i né al tasso i', bensì ad un tasso i'' maggiore di entrambi

AMMORTAMENTO A DUE TASSI

- Ci potrebbero comunque essere dei vantaggi fiscali per il debitore, che può scaricare fiscalmente le quote interessi del debito, più alte di quelle di un ammortamento progressivo, tipo il francese.
- Bisogna però tener presente che nel momento in cui si ritira il capitale accumulato C, si devono pagare le tasse sugli interessi attivi $C - nR'$.
- Poiché in Italia la ritenuta sostitutiva sugli interessi attivi è pari al 26% (12.5% per i titoli di Stato e i Buoni Fruttiferi Postali), mentre gli interessi passivi si detraggono al 19%, anche se $i' < i$ questo (presunto) vantaggio fiscale potrebbe essere vanificato.

AMMORTAMENTO A TASSO VARIABILE

- Una tipologia molto diffusa di mutui è quella a tasso variabile, in cui i tassi di remunerazione sono agganciati al mercato, e quindi aleatori.
- Per fissare le idee, consideriamo il caso degli ammortamenti progressivi a interessi posticipati.
- Il tasso d'interesse che verrà utilizzato per calcolare la prima quota interessi, I_1, in realtà è già noto in 0 perché dipende da qualche variabile di mercato ivi osservata; analogamente, il tasso utilizzato per calcolare I_2 è noto già in 1, e così via.
- Di solito le variabili di riferimento sono i tassi di rendimento dei BOT oppure dei tassi LIBOR (o EURIBOR) che sono tassi interbancari in base a cui si prestano denaro le banche (il primo prevalente nell'area UK, il secondo nell'area EURO).
- In questo caso si dice che le quote interessi sono predeterminate.

AMMORTAMENTO A TASSO VARIABILE

- Descriviamo ora come funziona un siffatto ammortamento.
- Teoricamente, una volta fissate le quote capitale $C_1, C_2, \ldots, C_n$ in modo tale da soddisfare la condizione di chiusura elementare, poco cambia rispetto a quanto visto finora, nel senso che è automaticamente fissata (già in 0) la sequenza dei debiti residui.
- L'unica differenza è che le quote interessi saranno calcolate in base al tasso variabile (quindi non sono note in 0, a parte la prima), e così le rate sono aleatorie.
- Ovviamente non potrà più sussistere, a priori, la condizione di chiusura finanziaria, sia perché non c'è un unico tasso di remunerazione ma, soprattutto, perché i tassi futuri saranno noti soltanto a posteriori.

AMMORTAMENTO A TASSO VARIABILE

- Quindi, indicata con $i^{(1)}, i^{(2)}, \ldots, i^{(n)}$ la sequenza dei tassi e fissate $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tali che $\sum_{j=1}^{n} C_j = C$, si ha il seguente Piano di ammortamento a interessi variabili posticipati (che numericamente potrà essere steso solo a posteriori):

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	$-$	$-$	$-$	C
1	$I_1 + C_1$	$i^{(1)} Q_0$	C_1	$Q_0 - C_1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
j	$I_j + C_j$	$i^{(j)} Q_{j-1}$	C_j	$Q_{j-1} - C_j$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$I_n + C_n$	$i^{(n)} Q_{n-1}$	C_n	0

AMMORTAMENTO A TASSO VARIABILE

- Tuttavia sorge un problema se si vuole "mimare" un ammortamento a rata costante, cioè il francese.
  1) Un primo metodo è quello di seguire la logica appena descritta.

  ▷ Precisamente, visto che $i^{(1)}$ è noto in 0, si calcola la prima rata, come se essa dovesse rimanere costante: $R_1 = C\alpha_{n\rceil i^{(1)}}$ e, in base alle relazioni viste nel caso dell'ammortamento francese, si determina la sequenza di quote capitale $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tali che $C_1 = R_1 - i^{(1)}Q_0$, $C_{j+1} = C_j(1+i^{(1)})$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

  ▷ Date le quote capitale, si procede come descritto, solo che le rate non potranno essere costanti (lo saranno "quasi", se i tassi varieranno poco) in quanto le quote interessi sono calcolate con tassi in generale diversi da $i^{(1)}$ ($\rightsquigarrow$ se il tasso rimanesse fermo a $i^{(1)}$, allora le rate sarebbero effettivamente costanti).

AMMORTAMENTO A TASSO VARIABILE

2) Un secondo metodo mantiene effettivamente le rate costanti (a parte l'ultima).

▷ Precisamente, si calcola R_1 come prima, e date la prima quota interessi $I_1 = i^{(1)}Q_0$ e la prima quota capitale $C_1 = R_1 - I_1$, le successive quote interessi saranno determinate dai tassi osservati, mentre le quote capitale verranno fissate in modo da mantenere la rata costante e pari a R_1

- ⇝ In questo modo si può allungare o accorciare la durata del prestito, e alla fine si avrà un'ultima rata $\leq R_1$
- ⇝ Questo metodo è un po' rischioso perché, se il tasso d'interesse dovesse salire molto, specie all'inizio in cui il debito residuo è elevato, e far sì che la quota interessi variabile superi R_1, allora la quota capitale corrispondente sarebbe < 0 e il debito residuo aumenterebbe anziché diminuire

AMMORTAMENTO A TASSO VARIABILE

3) Col metodo "classico" (chiamato anche per inseguimento), la rata risulterà variabile, come nel caso 1), ma in misura inferiore perché la variazione del tasso d'interesse, anziché essere assorbita in blocco al momento del pagamento della quota interessi, sarà "spalmata" lungo tutta la durata residua del contratto.

▷ Precisamente: in 0 si calcola R_1 come prima, e quindi si determinano $I_1 = i^{(1)} Q_0$ e $C_1 = R_1 - I_1$.

▷ In 1 si calcola $R_2 = Q_1 \alpha_{\overline{n-1}|i^{(2)}}$, come se si dovesse ammortizzare un "nuovo" debito, di importo Q_1, con $n-1$ rate costanti e tasso di remunerazione $i^{(2)}$: sarà ora $I_2 = i^{(2)} Q_1$ e $C_2 = R_2 - I_2, \ldots,$ e così via.

Esempio di ammortamento a tasso variabile

- Consideriamo il seguente esempio di ammortamento a tasso variabile che “mima” il francese, ovvero ha l’obiettivo di mantenere le rate approssimativamente costanti, e stendiamo, a posteriori, il relativo piano d’ammortamento.

- Sia $C = 100000$, $n = 10$ e la sequenza di tassi osservati $i^{(1)} = 3\%$, $i^{(2)} = 5\%$, $i^{(3)} = 3\%$, $i^{(4)} = 7\%$, $i^{(5)} = 1\%$, $i^{(6)} = 6\%$, $i^{(7)} = 3\%$, $i^{(8)} = 4\%$, $i^{(9)} = 5\%$, $i^{(10)} = 9\%$, $i^{(11)} = 5\%$

  $\rightsquigarrow$ E’ stato indicato un tasso in più da usare nell’eventualità in cui il secondo metodo implichi un allungamento della durata contrattuale

ESEMPIO DI AMMORTAMENTO A TASSO VARIABILE

- Tutti e tre i metodi illustrati hanno in comune la riga del piano d'ammortamento relativa alla prima scadenza (1) e la seconda quota interessi I_2:

$$R_1 = C\alpha_{n\rceil i^{(1)}} = \frac{100000}{a_{10\rceil 0.03}} \simeq 11723.05$$

$$I_1 = i^{(1)}C = 0.03 \cdot 100000 = 3000$$

$$C_1 = R_1 - I_1 = 11723.05 - 3000 = 8723.05$$

$$Q_1 = Q_0 - C_1 = 100000 - 8723.05 = 91276.95$$

$$I_2 = i^{(2)}Q_1 = 0.05 \cdot 91276.95 = 4563.85$$

ESEMPIO DI AMMORTAMENTO A TASSO VARIABILE

- Per completare la stesura del piano d'ammortamento:

  1) Col primo metodo si può procedere sia per righe che per colonne; ad es. se si procede per colonne si riempie prima la colonna relativa alle quote capitale $C_j = C_{j-1}(1+i^{(1)}),\ j = 2,\ldots,10$, successivamente quella del debito residuo $Q_j = Q_{j-1} - C_j$, $j = 2,\ldots,10$, poi quella delle quote interessi $I_j = i^{(j)} Q_{j-1}$, $j = 3,\ldots,10$, e infine quella delle rate $R_j = C_j + I_j,\ j = 2,\ldots,10$.

  2) Col secondo metodo si procede per righe: $R_j = R_1,\ I_j = i^{(j)} Q_{j-1}$, $C_j = R_j - I_j,\ Q_j = Q_{j-1} - C_j$, per $j = 2,\ldots,m-1$, dove $m \doteq \min\{j : Q_{j-1}(1+i^{(j)}) \leq R_1\}$; infine nell'ultima riga si pone $C_m = Q_{m-1},\ I_m = i^{(m)} C_m,\ R_m = C_m + I_m$, e risulta quindi $Q_m = Q_{m-1} - C_m = 0$.

  3) Anche col terzo metodo si procede per righe: per $j = 2,\ldots,10$ si calcola $R_j = Q_{j-1}\alpha_{n-j+1\rceil i^{(j)}},\ I_j = i^{(j)} Q_{j-1},\ C_j = R_j - I_j$, $Q_j = Q_{j-1} - C_j$.

Piano d'ammortamento col Metodo 1)

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	–	–	–	100000.00
1	11723.05	3000.00	8723.05	91276.95
2	13548.59	4563.85	8984.74	82292.21
3	11723.05	2468.77	9254.28	73037.93
4	14644.57	5112.66	9531.91	63506.02
5	10452.93	635.06	9817.87	53688.15
6	13333.70	3221.29	10112.41	43575.74
7	11723.05	1307.27	10415.78	33159.96
8	12054.65	1326.40	10728.25	22431.71
9	12171.69	1121.59	11050.10	11381.61
10	12405.94	1024.34	11381.60	0.01

Piano d'ammortamento col Metodo 2)

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	–	–	–	100000.00
1	11723.05	3000.00	8723.05	91276.95
2	11723.05	4563.85	7159.20	84117.75
3	11723.05	2523.53	9199.52	74918.23
4	11723.05	5244.28	6478.77	68439.46
5	11723.05	684.39	11038.66	57400.80
6	11723.05	3444.05	8279.00	49121.80
7	11723.05	1473.65	10249.40	38872.40
8	11723.05	1554.90	10168.15	28704.25
9	11723.05	1435.21	10287.84	18416.41
10	11723.05	1657.48	10065.57	8350.84
11	8768.38	417.54	8350.84	0.00

PIANO D'AMMORTAMENTO COL METODO 2)

- Come si vede dall'esempio, il fatto che i tassi osservati siano risultati quasi sempre più alti di $i^{(1)} = 3\%$, utilizzato per calcolare R_1, ha comportato che tale rata è risultata insufficiente per coprire gli interessi complessivi fino all'iniziale scadenza $n = 10$; pertanto la durata contrattuale si è allungata di un periodo.

- Comunque la rata è risultata sempre sufficientemente capiente per coprire gli interessi annui.

- Se però l'iniziale durata contrattuale fosse stata ad es. di 40 anni, $R_1 = 100000\alpha_{40\rceil 0.03} \simeq 4326.24$, $I_1 = 0.03 \cdot 100000 = 3000$, $C_1 = R_1 - I_1 = 1326.24$, $Q_1 = 100000 - C_1 = 98673.76$, e infine la quota interessi $I_2 = 0.05Q_1 = 4.933.69$ sarebbe risultata più alta della rata R_1.

PIANO D'AMMORTAMENTO COL METODO 3)

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	–	–	–	100000.00
1	11723.05	3000.00	8723.05	91276.95
2	12841.76	4563.85	8277.91	82999.04
3	11823.74	2489.97	9333.77	73665.27
4	13668.83	5156.57	8512.26	65153.01
5	11242.05	651.53	10590.52	54562.49
6	12952.94	3273.75	9679.19	44883.30
7	12074.82	1346.50	10728.32	34154.98
8	12307.70	1366.20	10941.50	23213.48
9	12484.32	1160.67	11323.65	11889.83
10	12959.91	1070.08	11889.83	0.00

CONFRONTO TRA METODO 1) E METODO 3)

- Come si può notare confrontando i piani d'ammortamento alternativi, le rate ottenute col terzo metodo sono molto più stabili rispetto a quelle costruite col primo.

- Fanno eccezione soltanto le ultime due rate in cui la durata residua su cui "spalmare" la variazione di tasso è esigua o addirittura pari ad un solo periodo, e quindi l'effetto prevalente è quello dovuto al debito residuo, più elevato col terzo metodo, che amplifica la variazione stessa.

PREAMMORTAMENTO

- Si parla di preammortamento quando, per un certo numero di periodi, all'inizio, si pagano solo gli interessi ($\rightsquigarrow$ le quote capitale sono nulle), e quindi il debito residuo resta fermo.
- Si parte poi con l'ammortamento progressivo dopo questo periodo iniziale, chiamato appunto di preammortamento.
- Questa modalità è utilizzata per venire incontro alle imprese che iniziano qualche nuovo progetto produttivo che produrrà i suoi frutti più avanti.

AMMORTAMENTO CON RITARDO

- Nel caso dell'ammortamento con ritardo, invece, all'inizio, per un certo numero di periodi, non solo non si pagano le quote capitale (come nel preammortamento), ma non si pagano nemmeno le quote interessi, cioè le rate sono nulle e quindi di fatto le quote capitale sono negative
  $\rightsquigarrow$ aumenta il debito residuo
- Trascorso questo periodo iniziale, si parte in ritardo con l'ammortamento progressivo di un capitale pari al montante di quello iniziale
  $\rightsquigarrow$ se m è il numero di periodi di ritardo, il debito da ammortizzare nei successivi n periodi non è C bensì $C(1+i)^m$, dove i è il tasso di remunerazione

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

- Torniamo ora al caso degli ammortamenti standard, con un unico tasso fisso di remunerazione, non variable stocasticamente.

- Ai fini, ad es., di una negoziazione del prestito ($\rightsquigarrow$ il creditore vuol vendere i suoi crediti futuri oppure il debitore vuole estinguere anticipatamente il debito), può interessare valutare gli impegni residui in una qualunque epoca $T: \ 0 \leq T < T_n$.

- La valutazione avviene ad un tasso i_*, chiamato tasso di valutazione, in generale diverso dal tasso di remunerazione i in quanto riflette le condizioni prevalenti del mercato al momento della negoziazione.

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

- Definiamo, rispettivamente, valore residuo, usufrutto e nuda proprietà il valore attuale in T, al tasso di valutazione i_*, delle future rate, quote interessi e quote capitale.
- Se l'epoca di valutazione T coincide con una scadenza contrattuale, per convenzione si suppone che il pagamento ivi dovuto sia già stato assolto.
- La scomposizione del valore residuo in usufrutto e nuda proprietà può avere interesse per motivi fiscali, in quanto gli interessi passivi sono detraibili dalle tasse (in Italia al 19%).

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

- Indicando, rispettivamente, con $V(T)$, $U(T)$ e $P(T)$ il valore residuo, l'usufrutto e la nuda proprietà, e supponendo che $T_j \leq T < T_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, si ha dunque:

$$\begin{pmatrix} V(T) \\ T \end{pmatrix} \underset{i_*}{\sim} \begin{pmatrix} R_{j+1} & R_{j+2} & \dots & R_n \\ \hline T_{j+1} & T_{j+2} & \dots & T_n \end{pmatrix}, \text{ cioè } V(T) = \sum_{h=j+1}^{n} R_h v_*^{T_h - T}$$

$$\begin{pmatrix} U(T) \\ T \end{pmatrix} \underset{i_*}{\sim} \begin{pmatrix} I_{j+1} & I_{j+2} & \dots & I_n \\ \hline T_{j+1} & T_{j+2} & \dots & T_n \end{pmatrix}, \text{ cioè } U(T) = \sum_{h=j+1}^{n} I_h v_*^{T_h - T}$$

$$\begin{pmatrix} P(T) \\ T \end{pmatrix} \underset{i_*}{\sim} \begin{pmatrix} C_{j+1} & C_{j+2} & \dots & C_n \\ \hline T_{j+1} & T_{j+2} & \dots & T_n \end{pmatrix}, \text{ cioè } P(T) = \sum_{h=j+1}^{n} C_h v_*^{T_h - T}$$

dove $v_* = \dfrac{1}{1+i_*}$

$\rightsquigarrow$ Ovviamente $V(T) = U(T) + P(T)$, $0 \leq T < T_n$

USUFRUTTO E NUDA PROPRIETÀ

- L'usufrutto, così come definito all'inizio per una generale operazione finanziaria (e, di conseguenza, anche la nuda proprietà, che è la differenza tra valore residuo e usufrutto), è diverso da quello che abbiamo appena definito per gli ammortamenti.
- Nel caso generale, infatti, l'usufrutto è stato definito come valore del movimento futuro degli interessi, man mano che si formano, mentre nel caso degli ammortamenti esso è stato definito come valore delle future quote interessi, e quindi si considerano gli interessi in blocco, nel momento in cui vengono pagati.
- Tuttavia la definizione appena data può essere intesa come una ragionevole approssimazione di quella generale e risulta di più facile applicazione, dal punto di vista pratico, perché in un contratto di mutuo è ben netta la distinzione tra quote capitale e quote interessi.

ESEMPIO DI CALCOLO DELL'USUFRUTTO

- Per illustrare la differenza tra le due definizioni consideriamo, a titolo di esempio, il caso di un ammortamento (non progressivo) a interessi posticipati con un'unica rata.
- Dal punto di vista del creditore possiamo rappresentare l'operazione finanziaria come segue:

$$\begin{array}{cc} -C & R_1 \\ \vdash\!\!\!\text{———}\!\!\!\dashv & \\ 0 & T_1 \end{array}$$

- Indicando con $\delta = \ln(1+i)$ l'intensità di remunerazione si ha:

$$R_1 = C(1+i)^{T_1} = Ce^{\delta T_1}$$

$$C_1 = C$$

$$I_1 = R_1 - C_1 = C(e^{\delta T_1} - 1)$$

ESEMPIO DI CALCOLO DELL'USUFRUTTO

- Sia $\delta_* = \ln(1+i_*)$ l'intensità di valutazione.
- Il valore residuo in T ($0 \leq T < T_1$) dell'operazione è dunque dato da

$$V(T) = R_1 \mathrm{e}^{-\delta_*(T_1-T)} = C\mathrm{e}^{\delta T_1}\mathrm{e}^{-\delta_*(T_1-T)} = C\mathrm{e}^{(\delta-\delta_*)T_1}\mathrm{e}^{\delta_* T}$$

- In particolare, se $\delta_* = \delta$, otteniamo il fabbisogno dell'operazione dal punto di vista del creditore che, per distinguere dal valore residuo, indichiamo ora con $F(T)$:

$$F(T) = C\mathrm{e}^{\delta T}$$

$\rightsquigarrow$ Come già sappiamo, $F(T)$ coincide con il montante $M(T)$ perché il tasso (intensità) di remunerazione, qui utilizzato per la valutazione, è proprio quello che rende equa l'operazione finanziaria

ESEMPIO DI CALCOLO DELL'USUFRUTTO

- Calcoliamo ora l'usufrutto e la nuda proprietà in base alla definizione che abbiamo dato nel caso di operazioni di ammortamento:

$$U(T) = I_1 \mathrm{e}^{-\delta_*(T_1 - T)} = C(\mathrm{e}^{\delta T_1} - 1)\mathrm{e}^{-\delta_*(T_1 - T)}$$
$$P(T) = C\mathrm{e}^{-\delta_*(T_1 - T)}$$

- In particolare, se $T = 0$ e $\delta_* = \delta$, si ha:

$$U(0) = C(\mathrm{e}^{\delta T_1} - 1)\mathrm{e}^{-\delta T_1} = C(1 - \mathrm{e}^{-\delta T_1})$$
$$P(0) = C\mathrm{e}^{-\delta T_1}$$
$$V(0) = U(0) + P(0) = C$$

ESEMPIO DI CALCOLO DELL'USUFRUTTO

- Se vogliamo invece utilizzare l'altra definizione di usufrutto, data per le operazioni finanziarie in generale, osserviamo che gli interessi si formano istantaneamente sul fabbisogno in base all'intensità di remunerazione δ.

- Quindi gli interessi prodotti istantaneamente, tra t e $t + \mathrm{d}t$, sono pari a $\delta F(t)\mathrm{d}t$, ed il loro valore attuale in T, in base all'intensità di valutazione δ_*, è dato da $\mathrm{e}^{-\delta_*(t-T)}\delta F(t)\mathrm{d}t$.

ESEMPIO DI CALCOLO DELL'USUFRUTTO

- Indicando con $\underline{U}(T)$ e, rispettivamente, $\underline{P}(T)$, usufrutto e nuda proprietà in base alla definizione generale, otteniamo dunque:

$$
\begin{aligned}
\underline{U}(T) &= \int_T^{T_1} \delta F(t)\mathrm{e}^{-\delta_*(t-T)}\mathrm{d}t = \int_T^{T_1} \delta C\mathrm{e}^{\delta t}\mathrm{e}^{-\delta_*(t-T)}\mathrm{d}t \\
&= \delta C\mathrm{e}^{\delta_* T}\int_T^{T_1} \mathrm{e}^{(\delta-\delta_*)t}\mathrm{d}t = \delta C\mathrm{e}^{\delta_* T}\left[\frac{\mathrm{e}^{(\delta-\delta_*)t}}{\delta-\delta_*}\right]_T^{T_1} \\
&= \frac{\delta C\mathrm{e}^{\delta_* T}}{\delta-\delta_*}\left[\mathrm{e}^{(\delta-\delta_*)T_1}-\mathrm{e}^{(\delta-\delta_*)T}\right] \\
&= \frac{\delta C\mathrm{e}^{\delta_* T}}{\delta-\delta_*}\mathrm{e}^{(\delta-\delta_*)T}\left[\mathrm{e}^{(\delta-\delta_*)(T_1-T)}-1\right] \\
&= \frac{\delta C\mathrm{e}^{\delta T}}{\delta-\delta_*}\left[\mathrm{e}^{(\delta-\delta_*)(T_1-T)}-1\right] \\
\underline{P}(T) &= V(T)-\underline{U}(T)
\end{aligned}
$$

ESEMPIO DI CALCOLO DELL'USUFRUTTO

- In particolare, se $T = 0$ e $\delta_* = \delta$, si ha:

$$\underline{U}(0) = \int_0^{T_1} \delta C \mathrm{d}t = \delta C T_1$$

$\rightsquigarrow$ si può ottenere anche passando al limite, per $\delta_* \to \delta$, dell'espressione precedente con $T = 0$

visibilmente diverso da $U(0) = C(1 - \mathrm{e}^{-\delta T_1})$.

- Si noti che l'approssimante lineare di $U(0) = C(1 - \mathrm{e}^{-\delta T_1})$, in un intorno di $T_1 = 0$, è proprio $\underline{U}(0) = \delta C T_1$.

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

- Vediamo ora qualche esempio di valutazione di valore residuo, usufrutto e nuda proprietà per gli ammortamenti progressivi, e poniamoci, come abbiamo fatto precedentemente, nell'ipotesi $T_j = j$, $j = 0, 1, \ldots, n$.
- Ci occupiamo della valutazione esclusivamente negli istanti di pagamento rate $j = 0, 1, \ldots, n-1$ in quanto, per la scindibilità, si ha in generale:

$$V(T) = V(\lfloor T \rfloor)(1+i_*)^{T-\lfloor T \rfloor}$$

$$U(T) = U(\lfloor T \rfloor)(1+i_*)^{T-\lfloor T \rfloor}$$

$$P(T) = P(\lfloor T \rfloor)(1+i_*)^{T-\lfloor T \rfloor}$$

dove $\lfloor T \rfloor$ = parte intera di T = max intero $\leq T$.

- D'ora innanzi utilizziamo la notazione indiciata quando T è un intero, cioè scriviamo V_j, U_j, P_j al posto di $V(j), U(j), P(j)$.

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

1) Ammortamento a quota capitale costante
E' immediato valutare la nuda proprietà perché $C_h = \frac{C}{n}$, $h = 1, 2, \ldots, n$:

$$\rightsquigarrow \; P_j = \sum_{h=j+1}^{n} C_h v_*^{h-j} = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n-j} v_*^k = \frac{C}{n} a_{n-j\rceil i_*}, \; j = 0, 1, \ldots, n-1$$

1a) interessi posticipati ($\rightsquigarrow$ Ammortamento italiano)

$$I_h = iQ_{h-1} = i\frac{C}{n}(n-h+1), \; h = 1, 2, \ldots, n$$

$$\rightsquigarrow \; U_j = \sum_{h=j+1}^{n} I_h v_*^{h-j} = \sum_{k=1}^{n-j} I_{j+k} v_*^k = i\frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n-j} (n-j-k+1) v_*^k$$

$$= i\frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n-j} \left[(n-j+1)v_*^k - kv_*^k\right]$$

$$= i\frac{C}{n} \left[(n-j+1)a_{n-j\rceil i_*} - (Ia)_{n-j\rceil i_*}\right] = \frac{iC}{i_* n} \left(n-j-a_{n-j\rceil i_*}\right)$$

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

$1b)$ interessi anticipati ($\rightsquigarrow$ Ammortamento tedesco)

$$I_h = dQ_h = d\tfrac{C}{n}(n-h),\;\; h = 0,1,\ldots,n-1$$

$$\rightsquigarrow\;\; U_j = \sum_{h=j+1}^{n-1} I_h v_*^{h-j} = \sum_{k=1}^{n-j-1} I_{j+k} v_*^k = d\frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n-j-1}(n-j-k)v_*^k$$

$$= d\frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n-j-1}\left[(n-j)v_*^k - kv_*^k\right]$$

$$= d\frac{C}{n}\left[(n-j)a_{n-j-1\rceil i_*} - (Ia)_{n-j-1\rceil i_*}\right]$$

$$= \frac{dC}{i_* n}\left(n-j-1-a_{n-j-1\rceil i_*}\right),\;\; j = 0,1,\ldots,n-2$$

$$\rightsquigarrow\;\; U_{n-1} = 0$$

$\rightsquigarrow$ Ovviamente $V_j = U_j + P_j,\;\; j = 0,1,\ldots,n-1$

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

2) Ammortamento francese

E' immediato calcolare il valore residuo in quanto le rate sono costanti: $R_h = R,\ h = 1, 2, \ldots, n$. Quindi

$$\rightsquigarrow\ V_j = \sum_{h=j+1}^{n} R_h v_*^{h-j} = R \sum_{k=1}^{n-j} v_*^k = R a_{\overline{n-j}|i_*},\ \ j = 0, 1, \ldots, n-1$$

Sfruttando il fatto che le quote capitale crescono in progressione geometrica di ragione $1 + i = \frac{1}{v}$, è facile calcolare anche la nuda proprietà:

$$\rightsquigarrow\ P_j = \sum_{h=j+1}^{n} C_h v_*^{h-j} = \sum_{k=1}^{n-j} C_{j+k} v_*^k = C_j \sum_{k=1}^{n-j} \left(\frac{v_*}{v}\right)^k$$

$$= R v^{n-j+1} \sum_{k=1}^{n-j} \left(\frac{v_*}{v}\right)^k = \begin{cases} R v^{n-j+1}(n-j) & \text{se } i = i_* \\ R \frac{v^{n-j} - v_*^{n-j}}{i_* - i} & \text{se } i \neq i_* \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow\ U_j = V_j - P_j,\ \ j = 0, 1, \ldots, n-1$$

Formula di Makeham

- Tuttavia, negli ammortamenti a interessi posticipati e scadenze equidistanziate c'è un modo ancora più facile per calcolare alcune delle grandezze coinvolte.
- Si tratta della Formula di Makeham, che collega fra loro valore residuo, debito residuo e nuda proprietà (o anche usufrutto, debito residuo e nuda proprietà); si ha infatti:

$$
\begin{aligned}
U_j &= \sum_{h=j+1}^{n} I_h v_*^{h-j} = \sum_{h=j+1}^{n} i Q_{h-1} v_*^{h-j} = \sum_{h=j+1}^{n} i \left(\sum_{k=h}^{n} C_k \right) v_*^{h-j} \\
&= i \sum_{k=j+1}^{n} C_k \sum_{h=j+1}^{k} v_*^{h-j} = i \sum_{k=j+1}^{n} C_k a_{\overline{k-j|}i_*} = i \sum_{k=j+1}^{n} C_k \frac{1-v_*^{k-j}}{i_*} \\
&= \frac{i}{i_*} \sum_{k=j+1}^{n} C_k (1-v_*^{k-j}) = \frac{i}{i_*} \left(\sum_{k=j+1}^{n} C_k - \sum_{k=j+1}^{n} C_k v_*^{k-j} \right) \\
&= \frac{i}{i_*}(Q_j - P_j) \quad \Rightarrow \quad V_j = \frac{i}{i_*}(Q_j - P_j) + P_j, \;\; j = 0, 1, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

APPLICAZIONE DELLA FORMULA DI MAKEHAM

1) Ammortamento italiano

Nell'ammortamento italiano è immediato calcolare

$$Q_j = \frac{C}{n}(n-j) \quad \text{e} \quad P_j = \frac{C}{n} a_{n-j\rceil i_*}$$

$\rightsquigarrow$ da qui si può subito ricavare

$$U_j = \frac{i}{i_*}(Q_j - P_j) = \frac{iC}{i_* n}\left(n - j - a_{n-j\rceil i_*}\right)$$

Applicazione della formula di Makeham

2) Ammortamento francese

Nell'ammortamento francese è immediato calcolare

$$Q_j = Ra_{n-j\rceil i} = R\frac{1-v^{n-j}}{i} \quad \text{e} \quad V_j = Ra_{n-j\rceil i_*} = R\frac{1-v_*^{n-j}}{i_*}$$

$\rightsquigarrow$ da qui si può ricavare P_j, se $i \neq i_*$:

$$V_j = P_j + \frac{i}{i_*}(Q_j - P_j) \Rightarrow i_*V_j = i_*P_j + iQ_j - iP_j$$

$$\Rightarrow R(1-v_*^{n-j}) = (i_* - i)P_j + R(1-v^{n-j})$$

$$\Rightarrow P_j = \frac{R(1-v_*^{n-j}) - R(1-v^{n-j})}{i_* - i} = R\frac{v^{n-j} - v_*^{n-j}}{i_* - i}$$

Se $i = i_*$ $\rightsquigarrow$ $P_j = Rv^{n-j+1}(n-j)$ può essere calcolata direttamente, come già fatto, oppure tramite passaggio al limite, per $i_* \to i$, dell'espressione precedente, ad es. applicando il Teorema de l'Hôpital.

FORMULA DI MAKEHAM

- Torniamo alla formula di Makeham per fare un'ultima osservazione:

$$V_j = \frac{i}{i_*}(Q_j - P_j) + P_j - Q_j + Q_j = (Q_j - P_j)\left(\frac{i}{i_*} - 1\right) + Q_j$$
$$= Q_j + (Q_j - P_j)\frac{i - i_*}{i_*} \;\Rightarrow\; V_j - Q_j = (Q_j - P_j)\frac{i - i_*}{i_*}$$

- Poiché $i_* > 0 \;\Rightarrow\; Q_j > P_j$ (la somma delle quote capitale future è maggiore del loro valore attuale, al tasso $i_* > 0$)

$\rightsquigarrow$ la differenza $V_j - Q_j$ ha lo stesso segno di $i - i_*$

$\rightsquigarrow \begin{cases} i \geq i_* \;\Rightarrow\; V_j \geq Q_j \\ i \leq i_* \;\Rightarrow\; V_j \leq Q_j \end{cases}$

(cosa d'altronde ovvia visto che V_j e Q_j si ottengono come valore attuale delle rate future, rispettivamente al tasso i_* e al tasso i, e il valore attuale risulta decrescente con il tasso di attualizzazione)

PRESTITI DIVISI

- Finora abbiamo implicitamente assunto che, in un'operazione di mutuo (prestito), ci fosse unicità di debitore e creditore, per cui tutta l'analisi fatta sugli ammortamenti andava bene per entrambi (salvo un cambio di segno di tutti gli importi).
- Tuttavia può capitare che, se il debitore è ad es. lo Stato, o una società per azioni, il capitale richiesto sia talmente elevato da rendere impossibile trovare un unico creditore disposto a fornirlo.
- Per questo è usuale che lo Stato, o le società, si rivolgano al pubblico, cioè ad una molteplicità di investitori ($\rightsquigarrow$ creditori) tramite l'emissione di un prestito obbligazionario.
- Chi presta denaro (cioè investe) compra un titolo, chiamato obbligazione, o bond, o buono, che gli dà diritto di ricevere dei pagamenti (interessi e restituzione del capitale) in futuro.

PRESTITI DIVISI

- Il debitore ($\rightsquigarrow$ mutuatario), cioè lo Stato, o la società, si chiama emittente; il creditore ($\rightsquigarrow$ mutuante) si chiama possessore, o titolare, o portatore, dell'obbligazione, o semplicemente obbligazionista.
- Al momento dell'emissione le obbligazioni vengono collocate, di solito dalle banche, su quello che si chiama mercato primario.
- Successivamente possono essere negoziate sul mercato secondario, e quindi è importante valutarne gli impegni residui.
- Le transazioni possono aver luogo sui
  - ▷ mercati regolamentati, come ad es. il MOT (Mercato Obbligazionario Telematico) per i Titoli di Stato, che è un segmento della Borsa, e in tal caso i titoli sono quotati ufficialmente,

  oppure sui
  - ▷ mercati non regolamentati, detti Over The Counter (OTC), dove la contrattazione è privata.

PRESTITI DIVISI

- Noi ci occuperemo in seguito di alcuni aspetti pratici concernenti le obbligazioni, tipo tassazione, quotazione, etc.
- Per il momento vediamo ancora un aspetto, di carattere teorico, che viene usualmente collocato sempre nell'ambito della Matematica finanziaria classica, che è quello delle obbligazioni rimborsabili con sorteggio, e che è strettamente collegato con quanto abbiamo appena visto riguardo agli ammortamenti.
- Se pensiamo, ad es., ad un prestito di 5000000000 di Euro, dal punto di vista del debitore, unico, si ha $C = 5000000000$.
- Se questo prestito è collocato tramite l'emissione, ad es., di $N = 5000000$ obbligazioni, ciascuna di valore nominale $c = 1000$ Euro, ciascun creditore avrà prestato un capitale pari a $c = 1000$ Euro, che si vedrà restituire, assieme agli interessi.
- Quindi si può pensare al piano di ammortamento dell'importo C dal punto di vista del debitore, unico, e dell'importo c, una frazione di C, dal punto di vista del singolo obbligazionista.

PRESTITI DIVISI

- Tuttavia, se il debitore vuole un ammortamento progressivo (come avviene talvolta per le società, ma in genere non per lo Stato), può sorgere un problema perché di solito le obbligazioni sono o del tipo zero-coupon oppure con cedole posticipate e unica quota capitale in fondo ($\rightsquigarrow$ coupon bonds).
- Concentrandoci, in particolare, sulla seconda tipologia, ci chiediamo allora cosa può fare un debitore che vuole indebitarsi tramite l'emissione di coupon bonds e rimborsare il debito C tramite il pagamento di n quote capitale $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (e interessi $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sul debito residuo).
- Una prima alternativa potrebbe essere semplicemente quella di emettere contestualmente tante serie di obbligazioni:
    - ▷ un primo lotto di valore nominale C_1 e scadenza 1;
    - ▷ un secondo lotto di valore nominale C_2 e scadenza 2;
    - ▷ …
    - ▷ un ultimo lotto di valore nominale C_n e scadenza n.

OBBLIGAZIONI RIMBORSABILI TRAMITE SORTEGGIO

- Un'altra modalità, talvolta usata dalle società, è invece quella di emettere un unico prestito obbligazionario di ammontare $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ prevedendo, alla fine di ciascun periodo (ad es. anno), di sorteggiare un certo numero di obbligazioni di valore nominale totale C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, rimborsandole in blocco in j tramite il pagamento, oltre che della quota interessi relativa al periodo $[j-1, j]$, anche del loro valore nominale.
- Naturalmente questa clausola del sorteggio deve essere esplicitamente dichiarata nel contratto, cioè nel prospetto fornito all'obbligazionista.
- Dal punto di vista del debitore, dunque, non cambia niente; costui si fa il proprio piano di ammortamento progressivo.
- Dal punto di vista del possessore di una singola obbligazione, invece, l'operazione diventa di durata aleatoria.

OBBLIGAZIONI RIMBORSABILI TRAMITE SORTEGGIO

- Vediamo di fissare un attimo le idee.
- Sia $C = Nc$, dove c rappresenta il valore nominale di ogni singola obbligazione ed N il loro numero, e supponiamo che C_1, C_2, $\ldots$, C_n siano multipli di c, cioè $C_1 = N_1 c$, $C_2 = N_2 c$, $\ldots$, $C_n = N_n c$, con $N_1 + N_2 + \cdots + N_n = N$ (perché $C_1 + C_2 + \cdots + C_n = C$).
- Quindi il debitore si fa il proprio piano di ammortamento, per cui la sua operazione finanziaria, certa, può essere rappresentata come segue:

$$\begin{array}{ccccc}
C & -(C_1+I_1) & -(C_2+I_2) & \ldots & -(C_n+I_n) \\
\hline
0 & 1 & 2 & \ldots & n
\end{array}$$

Obbligazioni rimborsabili tramite sorteggio

- Il singolo creditore, invece, si trova di fronte ad un'operazione finanziaria aleatoria, con possibili "determinazioni":

   1) se la sua obbligazione viene estratta nel primo periodo

   $$\begin{array}{cc} -c & ic+c \\ \vdash\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- & \!\!-\!\!-\!\!-\!\!\dashv \\ 0 & 1 \end{array}$$

   2) se la sua obbligazione viene estratta nel secondo periodo

   $$\begin{array}{ccc} -c & ic & ic+c \\ \vdash\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- & \!\!-\!\!-\!\!+\!\!-\!\!- & \!\!-\!\!-\!\!-\!\!\dashv \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

   $\ldots$

   n) se la sua obbligazione non viene mai estratta

   $$\begin{array}{ccccc} -c & ic & ic & \ldots & ic+c \\ \vdash\!\!-\!\!-\!\!- & \!\!-\!\!+\!\!-\!\!- & \!\!-\!\!+\!\!-\!\!- & \!\!-\!\!+\!\!-\!\!- & \!\!-\!\!-\!\!\dashv \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{array}$$

OBBLIGAZIONI RIMBORSABILI TRAMITE SORTEGGIO

- Noi ci metteremo dal punto di vista dell'obbligazionista e, in particolare, ci interessa valutare valore residuo, usufrutto e nuda proprietà.
- Cominciamo col fare le valutazioni all'emissione, cioè in 0.
- Ovviamente V_0, U_0 e P_0 sono aleatori, con possibili determinazioni date da $V_0^{(h)}$, $U_0^{(h)}$, $P_0^{(h)}$, $h = 1, 2, \ldots, n$, dove

$$\begin{pmatrix} V_0^{(h)} \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i_*}{\sim} \begin{pmatrix} ic & ic & \ldots & ic + c \\ 1 & 2 & \ldots & h \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad V_0^{(h)} = ica_{h\rceil i_*} + cv_*^h$$

$$\begin{pmatrix} P_0^{(h)} \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i_*}{\sim} \begin{pmatrix} c \\ h \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad P_0^{(h)} = cv_*^h$$

$$\rightsquigarrow \quad U_0^{(h)} = V_0^{(h)} - P_0^{(h)} = ica_{h\rceil i_*}$$

OBBLIGAZIONI RIMBORSABILI TRAMITE SORTEGGIO

- Volendo, visto che $Q_k^{(h)} = c$ per $k = 0, 1, \dots, h-1$, si può anche sfruttare la formula di Makeham:

$$V_0^{(h)} = P_0^{(h)} + \frac{i}{i_*}\left(c - P_0^{(h)}\right) = c - \frac{i_* - i}{i_*}\left(c - P_0^{(h)}\right)$$

- E' allora naturale assumere come valutazione sintetica di queste tre variabili aleatorie il loro valore atteso $V_0^* \doteq E[V_0]$, $U_0^* \doteq E[U_0]$, $P_0^* \doteq E[P_0]$.
- Per calcolarlo assegniamo come probabilità di sorteggio nel periodo h il quoziente tra il numero di obbligazioni sorteggiate in tale periodo ed il numero totale di obbligazioni:

$$\frac{N_h}{N}, \;\; h = 1, 2, \dots, n$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ V_0^* &= \sum_{h=1}^{n} V_0^{(h)} \frac{N_h}{N} = \sum_{h=1}^{n} \left[c - \frac{i_* - i}{i_*} \left(c - P_0^{(h)} \right) \right] \frac{N_h}{N} \\
&= \sum_{h=1}^{n} \left[c - \frac{i_* - i}{i_*} c + \frac{i_* - i}{i_*} P_0^{(h)} \right] \frac{N_h}{N} \\
&= c \sum_{h=1}^{n} \frac{N_h}{N} - \frac{i_* - i}{i_*} c \sum_{h=1}^{n} \frac{N_h}{N} + \frac{i_* - i}{i_*} \sum_{h=1}^{n} P_0^{(h)} \frac{N_h}{N} \\
\Rightarrow\ V_0^* &= c - \frac{i_* - i}{i_*} (c - P_0^*)
\end{aligned}
$$

- Quest'ultima formula viene chiamata Formula di Achard (all'emissione).

OBBLIGAZIONI RIMBORSABILI TRAMITE SORTEGGIO

- Se $i_* > 0 \rightsquigarrow P_0^{(h)} = cv_*^h < c \;\; \forall\, h \rightsquigarrow$ anche la media dei $P_0^{(h)}$, cioè P_0^*, risulta $< c \rightsquigarrow V_0^* < (=)\, c \Leftrightarrow i_* > (=)\, i$

- Se l'obbligazione vale
  - ▷ meno del suo valore nominale, cioè $V_0^* < c$, si dice che è quotata sotto la pari
  - ▷ più del suo valore nominale, cioè $V_0^* > c$, si dice che è quotata sopra la pari
  - ▷ esattamente quanto il suo valore nominale, cioè $V_0^* = c$, si dice che è quotata alla pari

- Naturalmente la formula di Achard può anche essere espressa al seguente modo:

$$V_0^* = P_0^* + \frac{i}{i_*}(c - P_0^*)$$

OBBLIGAZIONI RIMBORSABILI TRAMITE SORTEGGIO

- Più in generale, consideriamo un'obbligazione ancora in circolazione all'epoca j $(= 0, 1, \ldots, n-1)$.
- Indichiamo con $L_j = \sum_{h=j+1}^{n} N_h$ $(= N - \sum_{h=1}^{j} N_h)$ il numero di obbligazioni ancora circolanti all'epoca j e con $V_j^{(h)}$ il loro valore residuo in j nell'ipotesi che il sorteggio abbia luogo in h $(> j)$

$$\rightsquigarrow \quad \binom{V_j^{(h)}}{j} \underset{i_*}{\sim} \begin{pmatrix} ic & ic & \ldots & ic+c \\ j+1 & j+2 & \ldots & h \end{pmatrix}$$

- Per Makeham

$$\rightsquigarrow \quad V_j^{(h)} = c - \frac{i_* - i}{i_*}\left(c - P_j^{(h)}\right)$$

dove

$$\binom{P_j^{(h)}}{j} \underset{i_*}{\sim} \binom{c}{h}$$

OBBLIGAZIONI RIMBORSABILI TRAMITE SORTEGGIO

- Anche qui è naturale prendere come indice sintetico di valore residuo, usufrutto e nuda proprietà ($\rightsquigarrow$ aleatori) il loro valore atteso, con probabilità di sorteggio all'epoca h data da

$$\frac{N_h}{L_j},\ h = j+1, j+2, \ldots, n$$

- Possiamo così ricavare la Formula di Achard, che generalizza quella vista nel caso $j = 0$ (in cui $L_j = N$):

$$\rightsquigarrow\ V_j^* = \sum_{h=j+1}^{n} V_j^{(h)} \frac{N_h}{L_j} = c - \frac{i_* - i}{i_*}(c - P_j^*),\ j = 0, 1, \ldots, n-1$$

dove

$$P_j^* = \sum_{h=j+1}^{n} P_j^{(h)} \frac{N_h}{L_j} = c \sum_{h=j+1}^{n} v_*^{h-j} \frac{N_h}{L_j}$$

OBBLIGAZIONI RIMBORSABILI TRAMITE SORTEGGIO

- In alternativa, il valore residuo atteso può anche essere espresso come
$$V_j^* = P_j^* + \frac{i}{i_*}(c - P_j^*), \;\; j = 0, 1, \ldots, n-1$$
dove
$$\frac{i}{i_*}(c - P_j^*) = U_j^* = \sum_{h=j+1}^{n} U_j^{(h)} \frac{N_h}{L_j} = ic \sum_{h=j+1}^{n} a_{h-j\rceil i_*} \frac{N_h}{L_j}$$

ESEMPIO

- Come caso particolare consideriamo quello di un ammortamento a quota capitale costante (per il debitore)

$$\rightsquigarrow \; N_h = \frac{N}{n} \qquad \rightsquigarrow \; \frac{N_h}{N} = \frac{1}{n}, \qquad h = 1, 2, \dots, n$$

$$\rightsquigarrow \; L_j = \frac{(n-j)N}{n} \qquad \rightsquigarrow \; \frac{N_h}{L_j} = \frac{1}{n-j}, \qquad h = j+1, j+2, \dots, n$$

$$\rightsquigarrow \; P_j^* = \sum_{h=j+1}^{n} P_j^{(h)} \frac{1}{n-j} = \frac{c}{n-j} \sum_{h=j+1}^{n} v_*^{h-j} = \frac{c}{n-j} \sum_{k=1}^{n-j} v_*^k = \frac{c}{n-j} a_{n-j\rceil i_*}$$

$$\rightsquigarrow \; U_j^* = \frac{i}{i_*}(c - P_j^*), \qquad V_j^* = U_j^* + P_j^*, \qquad j = 0, 1, \dots, n-1$$

VITA MEDIA E VITA MATEMATICA DI UN'OBBLIGAZIONE

- Supponiamo di avere un'obbligazione ancora in circolazione all'epoca j $(= 0, 1, \ldots, n-1)$.
- Si definisce vita media dell'obbligazione la speranza matematica, in base alle probabilità di estrazione $\frac{N_h}{L_j}$, $h = j+1, j+2, \ldots, n$, della durata residua di vita della stessa:

$$z_j \doteq \sum_{h=j+1}^{n} (h-j)\frac{N_h}{L_j}, \;\; j = 0, 1, \ldots, n-1$$

- Si definisce invece vita matematica dell'obbligazione quel numero $\tilde{z}_j$ tale che

$$v_*^{\tilde{z}_j} = \sum_{h=j+1}^{n} v_*^{h-j}\frac{N_h}{L_j}, \;\; j = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad (1)$$

$$\text{cioè} \;\; \tilde{z}_j \doteq \frac{\ln\left(\sum_{h=j+1}^{n} v_*^{h-j}\frac{N_h}{L_j}\right)}{\ln v_*}$$

INTERPRETAZIONE DELLA VITA MATEMATICA

- Moltiplicando entrambi i membri della (1) per c si ottiene:

$$cv_*^{\tilde{z}_j} = \sum_{h=j+1}^{n} (cv_*^{h-j}) \frac{N_h}{L_j} = \sum_{h=j+1}^{n} P_j^{(h)} \frac{N_h}{L_j} = P_j^*$$

$\rightsquigarrow$ Se tutte le obbligazioni venissero rimborsate in blocco, con certezza, all'epoca $j + \tilde{z}_j$ (cioè dopo $\tilde{z}_j$ unità di tempo rispetto all'istante corrente j), la nuda proprietà, $cv_*^{\tilde{z}_j}$, sarebbe la stessa di quella attesa, P_j^*, derivante dal rimborso graduale

- Si può provare che
  - ▷ la vita matematica $\tilde{z}_j$ è decrescente con il tasso di valutazione i_* (si consulti, ad es., il testo di Daboni e de Ferra)
  - ▷ $\lim_{i_* \to 0} \tilde{z}_j = \lim_{v_* \to 1} \tilde{z}_j = z_j$ (ad es. applicando il Teorema de l'Hôpital)
  - ▷ $\lim_{i_* \to +\infty} \tilde{z}_j = \lim_{v_* \to 0} \tilde{z}_j = 1$ (ad es. applicando prima il Teorema de l'Hôpital e poi il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$\rightsquigarrow$ $1 < \tilde{z}_j < z_j$ se $j < n-1$, mentre $\tilde{z}_j = z_j = 1$ se $j = n-1$

RIMBORSO NON ALLA PARI

- Talvolta è previsto che il rimborso avvenga non alla pari, cioè che venga rimborsato un capitale $\tilde{c}$ diverso dal valore nominale c.

- Spesso, in tal caso, il rimborso avviene sopra la pari, cioè $\tilde{c} > c$, e la differenza $\tilde{c} - c$ si chiama premio di rimborso.

- Tutta la trattazione svolta rimane comunque valida pur di considerare come valore nominale $\tilde{c}$ anziché c e come tasso di remunerazione $\tilde{i} = ic/\tilde{c}$ al posto di i
  $\rightsquigarrow$ Le cedole, infatti, rimangono inalterate in quanto $\tilde{i}\tilde{c} = ic$

Valore Attuale Netto

- Consideriamo una generica operazione finanziaria certa contrattata all'epoca $T_0 = 0$ (ad es. un'operazione di investimento, piuttosto che di finanziamento, rendita, ammortamento, etc., non invece l'acquisto di un'obbligazione rimborsabile tramite sorteggio):

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- & + & + & + & -\!\!\!\dashv \\ T_0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{array}$$

- Ricordiamo che gli importi $x_0, x_1, \dots, x_n$ possono essere di segno qualunque.
- Ricordiamo inoltre che abbiamo chiamato valore, o saldo, dell'operazione finanziaria in un generico istante $T \geq 0$ la somma dei montanti (se $T_j \leq T$) o valori attuali ($T_j \geq T$) in T degli importi x_j; tale valore era stato indicato con $W(T)$.

Valore Attuale Netto

- Poniamoci ora all'inizio dell'operazione, cioè in $T_0 = 0$
  $\rightsquigarrow$ se $x_0 \neq 0$ l'operazione è pronti, altrimenti è a termine
- Il saldo $W(0)$ si chiama anche Valore Attuale Netto ($\rightsquigarrow$ VAN) dell'operazione
  $\rightsquigarrow$ valore attuale perché $T = 0 \leq T_j \ \forall j$
  $\rightsquigarrow$ netto perché si "sommano algebricamente" i valori attuali degli importi in entrata e di quelli in uscita, cioè si sottraggono i costi attualizzati dai ricavi attualizzati
- E' chiaro che questo valore dipende dalla legge di attualizzazione scelta e quindi dal tasso di valutazione i o, equivalentemente, dal fattore di attualizzazione $v = \frac{1}{1+i}$ (o anche dall'intensità $\delta = \ln(1+i), \dots$); si tratta cioè di una funzione di i (o di v o di $\delta, \dots$).

Valore Attuale Netto

- Con un abuso di notazione omettiamo ora di indicare esplicitamente l'istante di valutazione $T = 0$ e vediamo invece questo valore come funzione di v:

$$W(v) = \sum_{j=0}^{n} x_j v^{T_j}$$

- Talvolta si separano le poste attive da quelle passive, e si utilizzano tassi diversi per l'attualizzazione:
  - ▷ i^+ per le poste attive $\rightsquigarrow v^+ = \frac{1}{1+i^+}$,
  - ▷ $i^-(> i^+)$ per le quelle passive $\rightsquigarrow v^- = \frac{1}{1+i^-}$.
- Tuttavia non teniamo conto di ciò, in coerenza anche con quanto avviene nei mercati perfetti.

Tasso Interno di Rendimento

- Definiamo invece Tasso Interno di Rendimento ($\rightsquigarrow$ TIR) dell'operazione finanziaria quel tasso i^*, se esiste unico in un fissato intervallo I, che rende equa l'operazione stessa:
  - ▷ di solito si prende $I = (0, +\infty)$ (Postulato di rendimento del denaro) o, al limite, $I = [0, +\infty)$;
  - ▷ se si ammette la possibilità di tassi negativi (come avviene in questi ultimi tempi) si prende invece $I = (-1, +\infty)$, in modo che i fattori di capitalizzazione e attualizzazione risultino comunque positivi ($\rightsquigarrow$ posso anche rimetterci, ma mai l'intero capitale!)

$\rightsquigarrow$ $i^* = \frac{1}{v^*} - 1$, dove v^* è l'unica soluzione in $(0, 1)$ (oppure in $(0, 1]$, o ancora in $(0, +\infty)$) dell'equazione $W(v^*) = 0$

$\rightsquigarrow$ il TIR di un'operazione di ammortamento è il tasso tecnico, o tasso di remunerazione, che realizza la chiusura finanziaria

TASSO INTERNO DI RENDIMENTO

- Non tutte le operazioni finanziarie ammettono TIR, nel senso che potrebbe non esistere una soluzione v^* compresa tra 0 e 1 (o semplicemente > 0 se i^* può essere < 0), oppure potrebbero essercene più d'una.
- Se però abbiamo a che fare, ad es., con un'operazione di puro investimento in cui c'è un unico esborso iniziale $c_0 = -x_0 > 0$, seguito da una sequenza di introiti $x_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tali che $\sum_{j=1}^{n} x_j > c_0$, allora esiste un unico tasso $i^* > 0$ che rende $W(\frac{1}{1+i^*}) = 0$.
- Lo stesso discorso vale per le operazioni di puro finanziamento con un unico introito iniziale $x_0 > 0$, seguito da una sequenza di esborsi $c_j = -x_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tali che $\sum_{j=1}^{n} c_j > x_0$.

TASSO INTERNO DI RENDIMENTO

- Infatti, con riferimento, ad es., all'operazione di puro investimento con un unico esborso iniziale, si ha:

$$W(v) = \sum_{j=0}^{n} x_j v^{T_j} = x_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j v^{T_j} = \sum_{j=1}^{n} x_j v^{T_j} - c_0$$

$\rightsquigarrow$ W è funzione continua, definita su un intervallo

- Poiché $\lim_{i\to+\infty} v(=\frac{1}{1+i}) = 0$ e $\lim_{i\to 0} v(=\frac{1}{1+i}) = 1$, estendiamo per continuità W all'intervallo $[0,1]$:

$$W(0) = -c_0 < 0, \quad W(1) = \sum_{j=1}^{n} x_j - c_0 > 0$$

$\rightsquigarrow$ per il Teorema degli zeri W ammette almeno uno zero, cioè $\exists v^* \in (0,1) : \ W(v^*) = 0$

Tasso Interno di Rendimento

- Inoltre W è derivabile, con derivata

$$W'(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j T_j v^{T_j - 1} > 0 \ \text{ nell'intervallo aperto } (0,1)$$

$\rightsquigarrow$ W risulta strettamente crescente in $[0,1]$

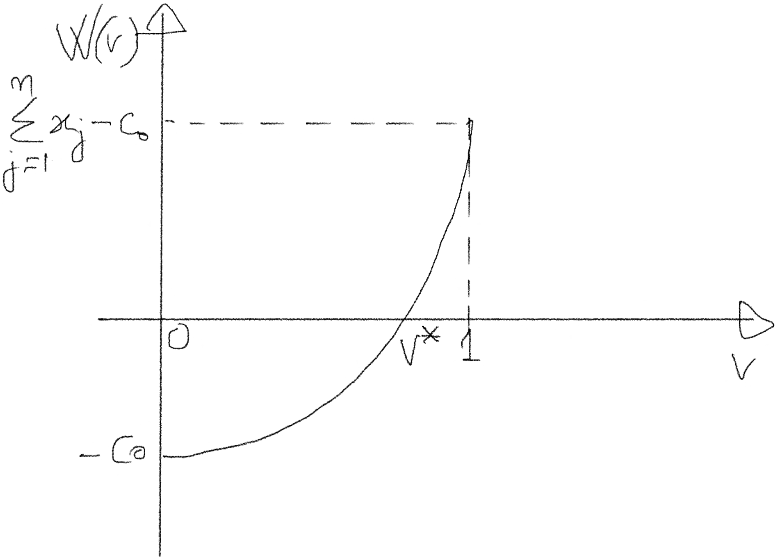
$\rightsquigarrow$ lo zero, cioè v^*, è unico

- Si ha infine:

$$W''(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j T_j (T_j - 1) v^{T_j - 2}$$

  - ▷ se $T_1 = 1$ e $n = 1$ $\rightsquigarrow$ $W''(v) = 0 \ \forall\, v \in (0,1)$ $\rightsquigarrow$ W è lineare
  - ▷ se $T_1 = 1$ e $n > 1$, oppure $T_1 > 1$ $\rightsquigarrow$ $W''(v) > 0 \ \forall\, v \in (0,1)$ $\rightsquigarrow$ W è strettamente convessa sull'intervallo $[0,1]$
  - ▷ se $T_n = 1$ e $n > 1$, oppure $T_n < 1$ $\rightsquigarrow$ $W''(v) < 0 \ \forall\, v \in (0,1)$ $\rightsquigarrow$ W è strettamente concava sull'intervallo $[0,1]$
  - ▷ negli altri casi W può risultare localmente concava o convessa, ma non è detto che lo sia globalmente

Operazioni di puro investimento



Tasso Interno di Rendimento

- Nel caso simmetrico di un'operazione di puro finanziamento con un unico introito iniziale le considerazioni di prima valgono ancora, ma con segno invertito, in quanto:

$$W(v) = \sum_{j=0}^{n} x_j v^{T_j} = x_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j v^{T_j} = x_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j v^{T_j}$$

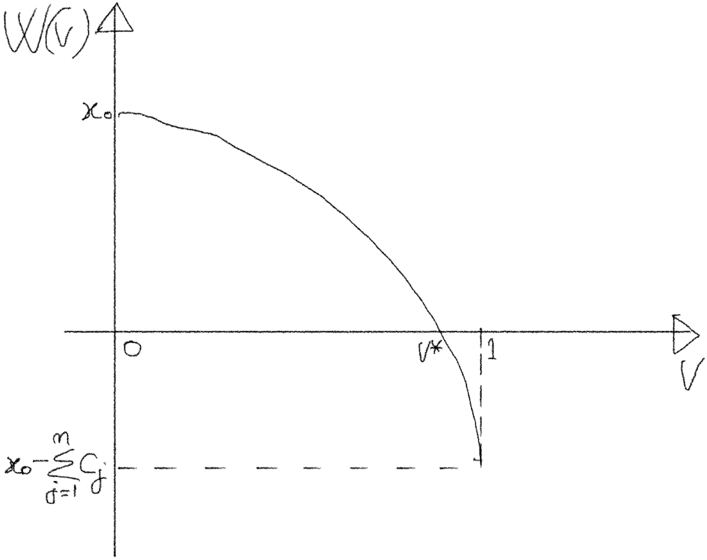
$\rightsquigarrow$ $W(0) = x_0 > 0, \quad W(1) = x_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j < 0$

$\rightsquigarrow$ $W'(v) = -\sum_{j=1}^{n} c_j T_j v^{T_j - 1} < 0$ $\rightsquigarrow$ W strettamente decrescente

$\rightsquigarrow$ $W''(v) = -\sum_{j=1}^{n} c_j T_j (T_j - 1) v^{T_j - 2}$ $\rightsquigarrow$ In particolare:

- ▷ W è lineare se $T_1 = 1$ e $n = 1$
- ▷ W è strettamente concava sull'intervallo $[0,1]$ se $T_1 = 1$ e $n > 1$, oppure $T_1 > 1$
- ▷ W è strettamente convessa sull'intervallo $[0,1]$ se $T_n = 1$ e $n > 1$, oppure $T_n < 1$

OPERAZIONI DI PURO FINANZIAMENTO



OSSERVAZIONE

- Se invece avessimo considerato il VAN di un'operazione finanziaria come funzione di i, diciamo $\tilde{W}$, anziché di v, avremmo ottenuto i seguenti risultati:
  - ▷ operazioni di puro investimento

$$\tilde{W}(i) = -c_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j (1+i)^{-T_j}, \quad \tilde{W}'(i) = -\sum_{j=1}^{n} x_j T_j (1+i)^{-T_j-1} < 0,$$

$$\tilde{W}''(i) = \sum_{j=1}^{n} x_j T_j (T_j+1)(1+i)^{-T_j-2} > 0 \rightsquigarrow \tilde{W} \text{ è decrescente e convessa}$$

  - ▷ operazioni di puro finanziamento

$$\tilde{W}(i) = x_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j (1+i)^{-T_j}, \quad \tilde{W}'(i) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_j (1+i)^{-T_j-1} > 0,$$

$$\tilde{W}''(i) = -\sum_{j=1}^{n} c_j T_j (T_j+1)(1+i)^{-T_j-2} < 0 \rightsquigarrow \tilde{W} \text{ è crescente e concava}$$

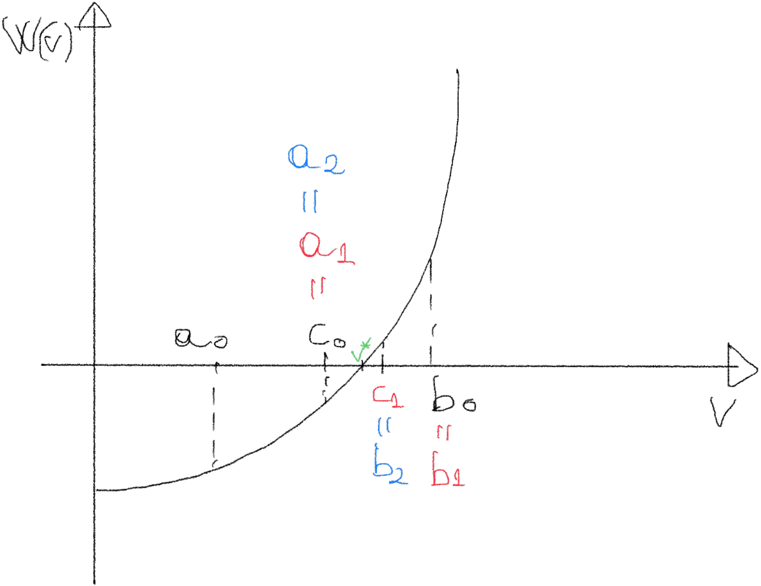
METODI DI RICERCA DEL TIR

- Torniamo al caso in cui il VAN è espresso come funzione di v, e consideriamo un'operazione di puro investimento o di puro finanziamento con le caratteristiche precedentemente illustrate.
- Un primo, semplice, metodo per ricercare il TIR di queste operazioni è quello di utilizzare un algoritmo di ricerca binaria, o dicotomica, come nella dimostrazione del Teorema degli zeri, a cui va imposta un'opportuna condizione d'arresto (ad es. quando $|W|$ risulta "sufficientemente piccolo", cioè $<$ di un $\varepsilon > 0$ prefissato, oppure, visto che ad ogni iterazione si dimezza l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il TIR e quindi si è in grado di maggiorare l'errore, dopo un fissato numero di iterazioni).

METODO DI RICERCA DICOTOMICA

- Per fissare le idee, concentriamoci sull'operazione di puro investimento, in cui la funzione W risulta strettamente crescente:
  - ▷ Fissiamo $a_0 : W(a_0) < 0$ e $b_0 : W(b_0) > 0$ (ad es. $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$).
  - ▷ Poniamo $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ e calcoliamo $W(c_0)$.
  - ▷ Se $W(c_0) = 0$ ci fermiamo perché abbiamo trovato esattamente uno zero di W, e poniamo $v^* = c_0$.
  - ▷ Se $W(c_0) > 0$ "spostiamo" l'estremo superiore dell'intervallo ponendo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$, se invece $W(c_0) < 0$ "spostiamo" l'estremo inferiore ponendo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$, in modo da ritrovarci con un nuovo intervallo, $[a_1, b_1]$, in cui agli estremi la funzione W assume valori di segno diverso.
  - ▷ Procediamo quindi allo stesso modo, ponendo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, calcolando $W(c_1)$ e controllando se questo risulta $= 0$, > 0 o < 0, e così via.
  - ▷ In conclusione, ci fermiamo dopo n iterazioni o perché $W(c_n) = 0$ o perché, pur essendo $W(c_n) \neq 0$, abbiamo raggiunto la condizione d'arresto imposta (ad es. $|W(c_n)| < \varepsilon$ prefissato, oppure $b_n - a_n < \varepsilon$ prefissato), e poniamo $v^* = c_n$ e $i^* = \frac{1}{v^*} - 1$.

METODO DI RICERCA DICOTOMICA



Metodo di ricerca dicotomica

- Sono ovvie le modifiche da apportare a quanto abbiamo appena descritto se invece la funzione W è strettamente decrescente, come nelle operazioni di puro finanziamento.
- Tuttavia ci si può sempre ricondurre alla situazione precedente se si cambia il segno di W; infatti $W(v) = 0 \Leftrightarrow (-W)(v) = 0$.
- Il metodo di ricerca dicotomica, pur essendo molto semplice ed adattandosi a qualunque tipo di funzione con le caratteristiche indicate, converge lentamente alla soluzione cercata.
- Se la funzione, oltre che monotona in senso stretto, è anche concava o convessa sull'intervallo, allora si possono sfruttare altri metodi, di convergenza più rapida, come ad es. il Metodo delle secanti oppure quello delle tangenti (detto anche Metodo di Newton).

METODO DELLE SECANTI

- Illustriamo ora il funzionamento del Metodo delle secanti.
- Per fissare le idee, supponiamo di aver a che fare con una funzione W strettamente crescente e convessa come nel caso, ad esempio, delle operazioni di puro investimento in cui $T_1 > 1$ oppure $T_1 = 1$ e $n > 1$.
- Anche qui si parte da due punti in cui W assume valori di segno diverso:
  - ▷ Siano $v^{(0)} : W(v^{(0)}) < 0$ e $b : W(b) > 0$
    $\rightsquigarrow v^{(0)} < v^*(< b)$
  - ▷ Si costruisca la retta "secante" il grafico di W che passa per i due punti $(v^{(0)}, W(v^{(0)}))$ e $(b, W(b))$, e sia $v^{(1)}$ la sua intercetta sull'asse delle ascisse
    $\rightsquigarrow v^{(0)} < v^{(1)} < v^*$
    $\rightsquigarrow$ ci stiamo avvicinando alla soluzione cercata

METODO DELLE SECANTI

Infatti l'equazione della retta secante è

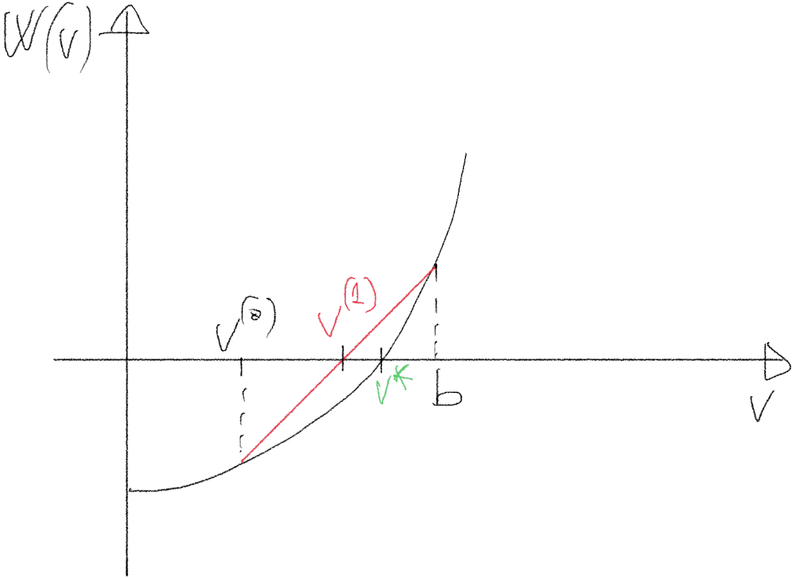
$$y = \frac{W(b) - W(v^{(0)})}{b - v^{(0)}} x + \frac{W(v^{(0)})b - W(b)v^{(0)}}{b - v^{(0)}}$$

che interseca l'asse x nel punto

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= \frac{W(b)v^{(0)} - W(v^{(0)})b}{W(b) - W(v^{(0)})} \\ &= v^{(0)} \frac{|W(b)|}{|W(b)| + |W(v^{(0)})|} + b \frac{|W(v^{(0)})|}{|W(b)| + |W(v^{(0)})|} \end{aligned}$$

una media interna di $v^{(0)}$ e b, e quindi strettamente compresa fra i due, in particolare $v^{(1)} > v^{(0)}$.
Inoltre, essendo W una funzione convessa, il segmento della retta secante compreso tra $v^{(0)}$ e b sta sopra il grafico di W e, essendo W crescente, interseca l'asse delle ascisse prima di quanto lo faccia il grafico di W, cioè $v^{(1)} < v^*$.

METODO DELLE SECANTI



Metodo delle secanti

- Si costruisce poi la secante il grafico di W che passa per i due punti $(v^{(1)}, W(v^{(1)}))$ e $(b, W(b))$, e si denota con $v^{(2)}$ la sua intercetta sull'asse delle ascisse, che risulta $v^{(1)} < v^{(2)} < v^*$, e così via.
- In questo modo si costruisce una successione di punti $v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, \dots$ che approssima per difetto la soluzione cercata v^* e converge ad essa, dove

$$v^{(n)} = \frac{W(b)v^{(n-1)} - W(v^{(n-1)})b}{W(b) - W(v^{(n-1)})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

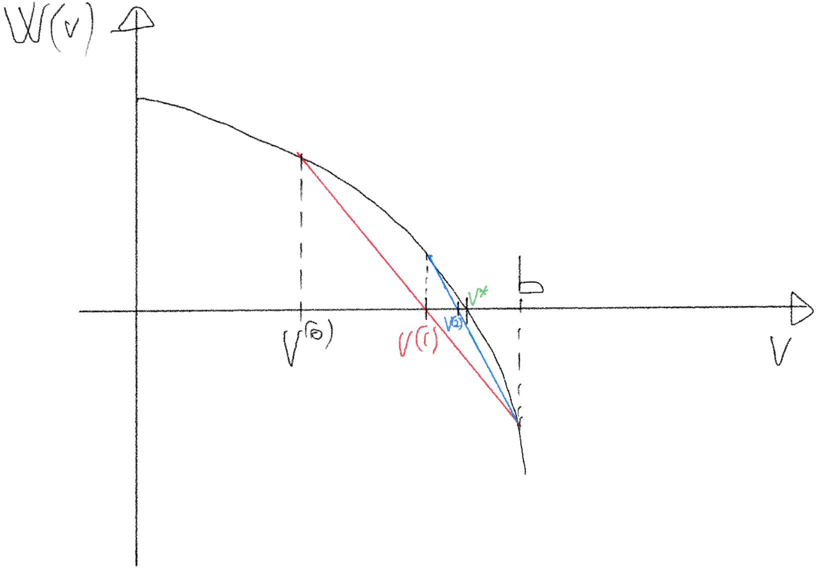
- Infine si impone una ragionevole condizione d'arresto al procedimento, ad es. quando $|W(v^{(n)})|$, oppure la differenza $v^{(n)} - v^{(n-1)}$, risulta "sufficientemente piccola".

METODO DELLE SECANTI

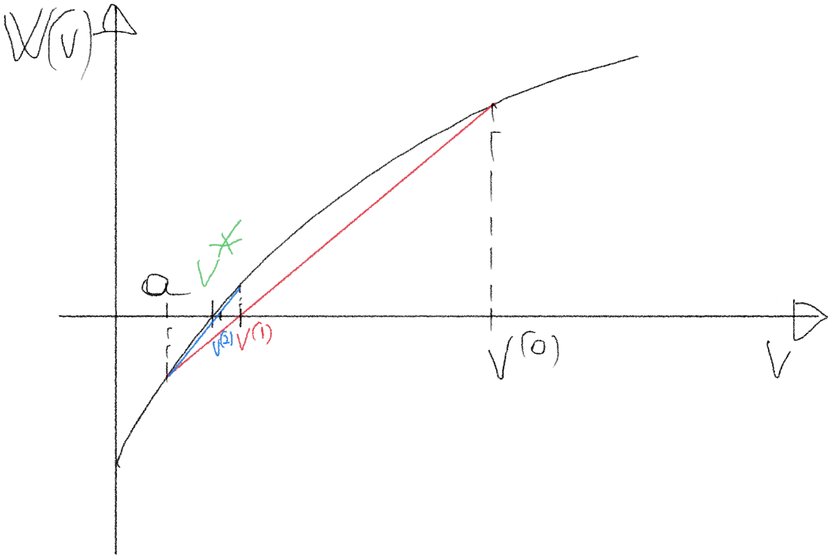
- Se la funzione W è decrescente e concava come, ad esempio, per le operazioni di puro finanziamento in cui $T_1 > 1$ oppure $T_1 = 1$ e $n > 1$, vale lo stesso procedimento, e si costruisce la successione che approssima per difetto v^*, solo che in tal caso $W(v^{(n)}) > 0$, $n = 0, 1, \dots$, e $W(b) < 0$
  $\rightsquigarrow$ In realtà questo caso è perfettamente riconducibile al precedente, pur di cambiare il segno di W
- Se invece la funzione W è crescente e concava (oppure decrescente e convessa), si parte da a tale che $W(a) < 0$ e $v^{(0)}$ tale che $W(v^{(0)}) > 0$ (oppure, rispettivamente, da a tale che $W(a) > 0$ e $v^{(0)}$ tale che $W(v^{(0)}) < 0$) e si costruisce iterativamente la successione di intercette $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots$ della retta secante il grafico di W passante per $(a, W(a))$ e $(v^{(n-1)}, W(v^{(n-1)}))$, che approssima per eccesso v^*:

$$v^{(n)} = \frac{W(v^{(n-1)})a - W(a)v^{(n-1)}}{W(v^{(n-1)}) - W(a)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

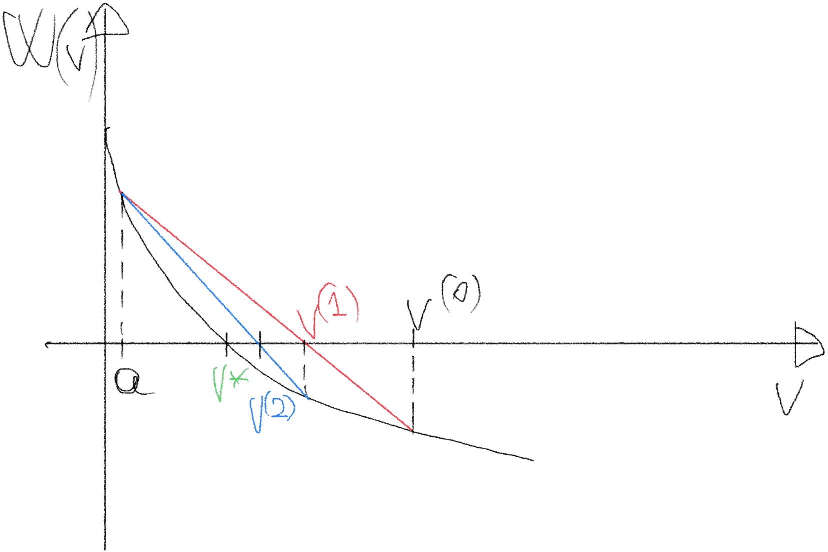
METODO DELLE SECANTI



METODO DELLE SECANTI



METODO DELLE SECANTI



METODO DELLE TANGENTI

- Il Metodo delle tangenti, o Metodo di Newton, si basa su una "filosofia" simile a quello delle secanti; illustriamolo in dettaglio con riferimento al caso di una funzione W strettamente crescente e convessa:
  - ▷ Partiamo da un punto $v^{(0)}$
    ⇝ Se $W(v^{(0)}) = 0$ allora $v^{(0)} = v^*$ e non abbiamo più niente da cercare; se $W(v^{(0)}) > 0 (= W(v^*))$ allora, per la crescenza di W, risulta $v^{(0)} > v^*$; se invece $W(v^{(0)}) < 0$ allora $v^{(0)} < v^*$
    Supponiamo $v^{(0)} > v^*$.
  - ▷ Costruiamo la retta "tangente" al grafico di W nel punto $(v^{(0)}, W(v^{(0)}))$ e indichiamo con $v^{(1)}$ la sua intercetta sull'asse delle ascisse
    ⇝ $v^* < v^{(1)} < v^{(0)}$
    ⇝ ci stiamo avvicinando alla soluzione cercata

METODO DELLE TANGENTI

Infatti l'equazione della retta tangente è

$$y = W(v^{(0)}) + W'(v^{(0)})(x - v^{(0)})$$

con intercetta sull'asse delle ascisse pari a

$$v^{(1)} = v^{(0)} - \frac{W(v^{(0)})}{W'(v^{(0)})}$$

che risulta $< v^{(0)}$ in quanto $W(v^{(0)}) > 0$ e $W'(v^{(0)}) > 0$.
Inoltre, essendo W una funzione convessa, il suo grafico sta sopra la retta tangente e, essendo W crescente, interseca l'asse delle ascisse prima della tangente stessa, cioè $v^* < v^{(1)}$.

▷ Si costruisce poi la retta tangente al grafico di W nel punto $(v^{(1)}, W(v^{(1)}))$ e si denota con $v^{(2)}$ la sua intercetta sull'asse delle ascisse, che risulta $v^* < v^{(2)} < v^{(1)}$, e così via.

METODO DELLE TANGENTI

- ▷ In questo modo si ottiene una successione di punti $v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, \dots$ che approssima per eccesso la soluzione cercata v^* e converge ad essa, dove

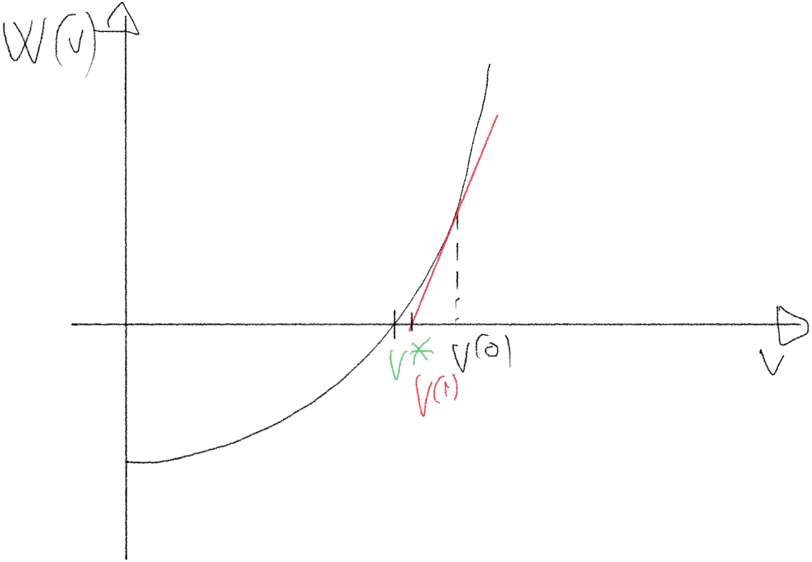
$$v^{(n)} = v^{(n-1)} - \frac{W(v^{(n-1)})}{W'(v^{(n-1)})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- ▷ Infine si impone una ragionevole condizione d'arresto al procedimento, ad es. quando $W(v^{(n)})$, oppure la differenza $v^{(n-1)} - v^{(n)}$, risulta "sufficientemente piccola".

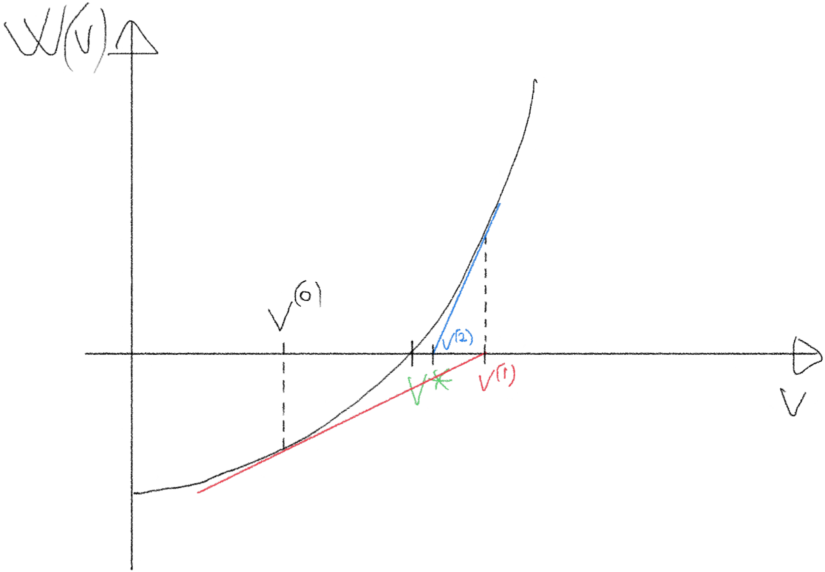
- Si noti che, se fossimo invece partiti da $v^{(0)} < v^*$ (cioè $W(v^{(0)}) < 0$), dopo un'iterazione ci saremmo comunque ricondotti alla situazione precedente.

- Infatti l'intercetta $v^{(1)} = v^{(0)} - \frac{W(v^{(0)})}{W'(v^{(0)})}$ risulterebbe in tal caso non soltanto $> v^{(0)}$ perché $\frac{W(v^{(0)})}{W'(v^{(0)})} < 0$, ma anche $> v^*$ per la convessità di W.

METODO DELLE TANGENTI



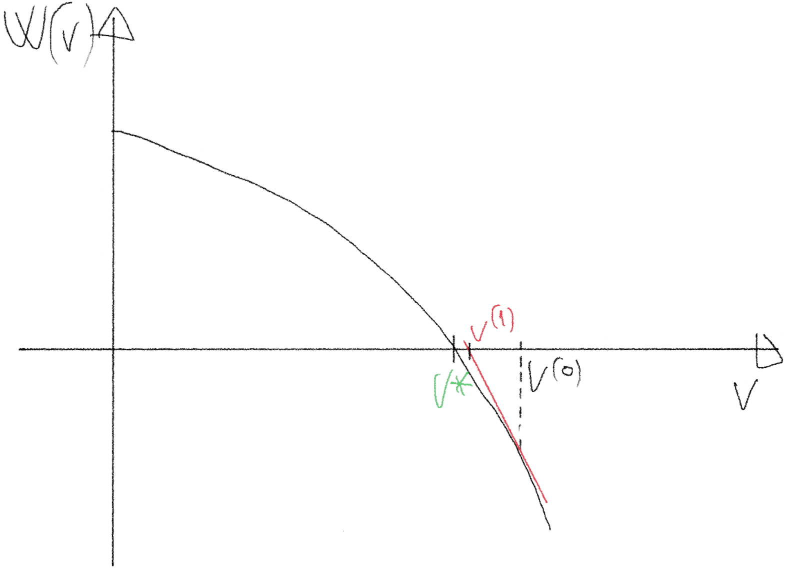
Metodo delle tangenti



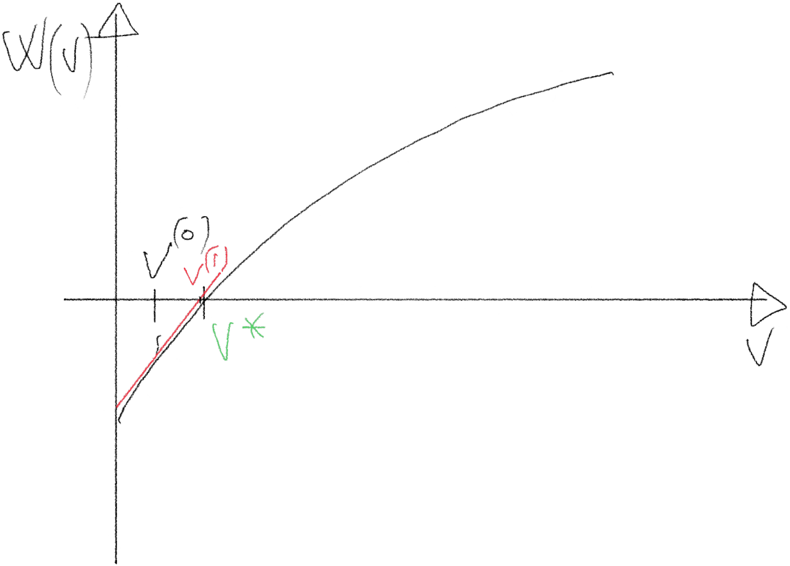
Metodo delle tangenti

- Se la funzione W è decrescente e concava vale lo stesso procedimento, e si costruisce la successione che approssima per eccesso v^*, anche se in realtà questo caso è perfettamente riconducibile al precedente, pur di cambiare il segno di W.
- Se invece la funzione W è crescente e concava (oppure decrescente e convessa), si parte da $v^{(0)} < v^*$ e si costruisce iterativamente la successione di intercette $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots$ della retta tangente al grafico di W nel punto $(v^{(n-1)}, W(v^{(n-1)}))$, che approssima per difetto v^*.

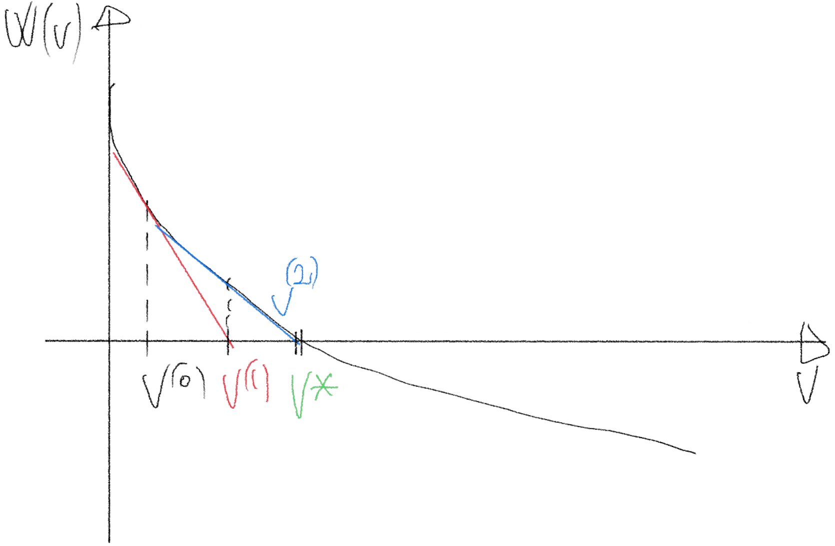
METODO DELLE TANGENTI



METODO DELLE TANGENTI



METODO DELLE TANGENTI



Criteri di scelta tra operazioni finanziarie

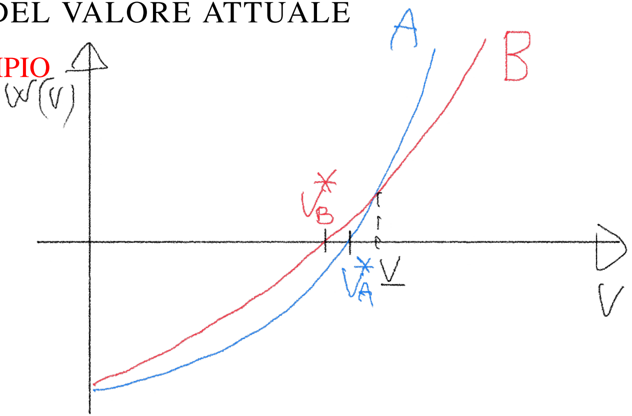
- Supponiamo di dover scegliere un'operazione finanziaria tra diverse alternative, ad es. progetti d'investimento.
- E' chiaro che il confronto ha senso fra operazioni sufficientemente omogenee in quanto a durata, ordine di grandezza degli importi, segno degli importi, etc.
- Ad es., se abbiamo un capitale a disposizione dobbiamo scegliere un'operazione d'investimento, se invece abbiamo bisogno di denaro scegliamo un'operazione di finanziamento, se abbiamo a disposizione 1000 Euro per l'investimento non prendiamo in considerazione operazioni che prevedono un taglio minimo per l'investimento iniziale di 10000 Euro, se vogliamo ritirare i soldi fra un anno non scegliamo un'operazione d'investimento che dura 10 anni, a meno che non mettiamo in conto la possibilità di negoziazione della stessa dopo un anno, che però avrà luogo in base alle condizioni prevalenti sul mercato all'epoca della negoziazione, che al momento della scelta sono aleatorie, etc.

CRITERIO DEL VALORE ATTUALE

- Fissato un tasso di valutazione i e quindi, corrispondentemente, un fattore di sconto $v = \frac{1}{1+i}$, un'operazione finanziaria si definisce vantaggiosa, equa o svantaggiosa al tasso i se, rispettivamente, risulta $W(v) > 0$, $W(v) = 0$, $W(v) < 0$
  $\rightsquigarrow$ la nostra scelta cadrà tra le operazioni non svantaggiose, per cui $W(v) \geq 0$, che saranno le uniche per noi accettabili
- Fra diverse operazioni alternative accettabili si preferisce quella con VAN maggiore.
- Una critica che viene spesso mossa è che si tratta di un criterio "soggettivo" perché richiede la fissazione del tasso i
  $\rightsquigarrow$ se cambia i un'operazione può passare da vantaggiosa a svantaggiosa o viceversa e, inoltre, può cambiare l'ordinamento di preferibilità tra operazioni diverse

CRITERIO DEL VALORE ATTUALE

- ESEMPIO



- ▷ per $v < v_B^*$ ($\rightsquigarrow$ $i > i_B^*$) né A né B sono accettabili
- ▷ per $v_B^* \leq v < v_A^*$ ($\rightsquigarrow$ $i_A^* < i \leq i_B^*$) B è accettabile, A no
- ▷ per $v \geq v_A^*$ ($\rightsquigarrow$ $i \leq i_A^*$) A e B sono entrambe accettabili
- ▷ per $v_A^* \leq v < \underline{v}$ ($\rightsquigarrow$ $\underline{i} < i \leq i_A^*$) è meglio B
- ▷ per $v = \underline{v}$ ($\rightsquigarrow$ $i = \underline{i}$) A e B sono indifferenti
- ▷ per $v > \underline{v}$ ($\rightsquigarrow$ $i < \underline{i}$) è meglio A

Criterio del valore attuale

- D'altra parte le scelte sono per forza soggettive, se escludiamo determinate situazioni in cui un'operazione "domina" l'altra, difficilmente riscontrabili nella pratica.
- Nella pratica, infatti, le operazioni sono aleatorie: se un progetto offre di più è perché è accompagnato da un rischio maggiore.
- Rimanendo comunque nell'ambito delle operazioni finanziarie certe, se ad es. consideriamo le seguenti operazioni con lo stesso scadenzario:

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline T_0 & T_1 & \dots & T_n \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & \dots & y_n \\ \hline T_0 & T_1 & \dots & T_n \end{array}$$

e supponiamo che $x_j \geq y_j \ \ \forall j$ e inoltre $\exists j : x_j > y_j$, allora la prima operazione è preferita, "oggettivamente", da tutti gli operatori con determinate caratteristiche ($\rightsquigarrow$ non saziati).

CRITERIO DEL VALORE ATTUALE

- Tuttavia questa situazione, che genererebbe opportunità di arbitraggio, non esiste sotto le ipotesi di mercati “ideali” che faremo in seguito; nella pratica, se proprio dovesse presentarsi, sarebbe comunque di breve durata perché tutti cercherebbero di sfruttarla a proprio vantaggio per cui, per il gioco della domanda e dell’offerta, tenderebbe a sparire rapidamente.
- Quindi, se escludiamo queste situazioni “limite” in cui un’operazione è sempre meglio dell’altra, per scegliere bisogna per forza introdurre qualche elemento di soggettività, come le preferenze individuali, il tasso di valutazione, etc.
- Comunque, per costruire il VAN, normalmente si utilizzano tassi di valutazione coerenti con quella che è la situazione del mercato; ad es. si potrebbero usare tassi diversi per scontare attivi e passivi e/o per scontare importi dovuti in epoche diverse.
- Infine, un argomento che viene portato a favore di questo criterio è che il VAN di un’operazione finanziaria esiste sempre!

Criterio del tasso interno di rendimento

- Fra due operazioni finanziarie che ammettono entrambe tasso interno di rendimento, si sceglie quella con TIR maggiore se si tratta di un'operazione di investimento, quella con TIR minore se invece si tratta di un'operazione di finanziamento
  $\rightsquigarrow$ nell'esempio grafico di prima si sceglie B in quanto $v_B^* < v_A^*$, e quindi $i_B^* > i_A^*$, e l'operazione è di investimento
- A favore di questo criterio si porta il fatto che è eliminata la soggettività.
- Va comunque tenuto presente che anche qui il confronto ha senso solo se le operazioni sono "simili" in quanto a durate e ordine di grandezza degli importi.
- Il TIR, quando esiste, viene spesso usato come indice sintetico di redditività (ad es. per indicare il rendimento effettivo di obbligazioni e titoli di Stato, tenendo conto del prezzo di acquisto e supponendo che siano tenuti fino alla scadenza).

CRITERIO DEL TASSO INTERNO DI RENDIMENTO

- Una prima critica al criterio è che non tutte le operazioni finanziarie ammettono TIR, e quindi operazioni "simili" potrebbero risultare non confrontabili sulla base di questo criterio.
- Inoltre, se i segni degli importi si alternano, e quindi due operazioni a confronto non sono classificabili né come investimento né come finanziamento, la scelta in base al TIR non è definita (è meglio un TIR più alto oppure più basso?).

TAN E TAEG

- Nelle operazioni di finanziamento, ad es. nelle vendite a rate, vengono spesso pubblicizzati il TAN e il TAEG
  $\rightsquigarrow$ Si tratta proprio di TIR, anche se sarebbe più appropriato chiamarli TIC (Tasso Interno di Costo)
- Più precisamente, la distinzione è la seguente:
  - ▷ Il TAN ($\rightsquigarrow$ Tasso Annuo Nominale) tiene conto esclusivamente dell'importo prestato (C) e delle rate di ammortamento del debito ($R_1, R_2, \ldots, R_n$).
  - ▷ Il TAEG ($\rightsquigarrow$ Tasso Annuo Effettivo Globale) tiene conto anche di tutte le spese accessorie (es., spese di istruttoria per avere il prestito, commissioni per pagare le rate, etc.), e dal 2003 il suo nome ufficiale è diventato ISC ($\rightsquigarrow$ Indicatore Sintetico di Costo)

  $\rightsquigarrow$ il TAEG è maggiore del TAN

ESEMPIO DI TAN E TAEG

- Ad es., a fronte di un prestito di 10000 Euro rimborsabile tramite il pagamento di 10 rate mensili immediate posticipate di 1050 Euro ciascuna, il TAN è il tasso annuo che rende equa l'operazione

10000	-1050	-1050	$\dots$	-1050
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\dots$	$\frac{10}{12}$

- Se però, per avere il prestito, bisogna pagare subito 50 Euro di spese di istruttoria e 2 Euro di commissione per ogni rata, il TAEG è il tasso annuo che rende equa l'operazione

9950	-1052	-1052	$\dots$	-1052
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\dots$	$\frac{10}{12}$

ESEMPIO DI TAN E TAEG

- Con riferimento, ad es., al caso del TAN, bisogna quindi risolvere la seguente equazione:

$$W(v) = 10000 - 1050 \sum_{j=1}^{10} v^{j/12} = 10000 - 1050\, a_{10\rceil v^{-1/12}-1}$$

$$= 10000 - 1050 \frac{1 - v^{10/12}}{v^{-1/12} - 1} = 0$$

dove W è una funzione strettamente decrescente e convessa

$\rightsquigarrow$ Indicando con v^* la sua soluzione, il TAN dell'operazione è pari a $i^* = \frac{1}{v^*} - 1$

ESEMPIO DI TAN E TAEG

- In alternativa, si può risolvere l'equazione

$$\tilde{W}(i) = 10000 - 1050\sum_{j=1}^{10}(1+i)^{-j/12} = 10000 - 1050\, a_{10\rceil (1+i)^{1/12}-1}$$

$$= 10000 - 1050\frac{1-(1+i)^{-10/12}}{(1+i)^{1/12}-1} = 0$$

dove $\tilde{W}$ è una funzione strettamente crescente e concava

$\rightsquigarrow$ Indicando con i^* la sua soluzione, il TAN dell'operazione è proprio i^*

ESEMPIO DI TAN E TAEG

- Risulta però decisamente più semplice misurare il tempo in mesi, anziché in anni, per cui l'equazione da risolvere, nel primo caso, diventa

$$W(v_{12}) = 10000 - 1050 \sum_{j=1}^{10} v_{12}^{j} = 10000 - 1050\, a_{10\rceil v_{12}^{-1}-1}$$

$$= 10000 - 1050 \frac{1 - v_{12}^{10}}{v_{12}^{-1} - 1} = 0$$

dove W è una funzione strettamente decrescente e concava

$\rightsquigarrow$ Indicando con v_{12}^{*} la sua soluzione, si ha quindi $v^{*} = (v_{12}^{*})^{12}$, per cui il TAN dell'operazione è pari a $i^{*} = \frac{1}{v^{*}} - 1$

ESEMPIO DI TAN E TAEG

- Nel secondo caso bisogna invece risolvere l'equazione

$$\begin{aligned}\tilde{W}(i_{12}) &= 10000 - 1050\sum_{j=1}^{10}(1+i_{12})^{-j} = 10000 - 1050\,a_{10\rceil i_{12}}\\ &= 10000 - 1050\frac{1-(1+i_{12})^{-10}}{i_{12}} = 0\end{aligned}$$

  dove $\tilde{W}$ è una funzione strettamente crescente e concava

  $\rightsquigarrow$ Indicando con i_{12}^* la sua soluzione, il TAN dell'operazione è $i^* = (1+i_{12}^*)^{12} - 1$

- Infine, le soluzioni non cambiano se, anziché risolvere l'equazione $W(v) = 0$ o, rispettivamente, $\tilde{W}(i) = 0$, $W(v_{12}) = 0$, $\tilde{W}(i_{12}) = 0$, si risolve la corrispondente equazione $(-W)(v) = 0$, $(-\tilde{W})(i) = 0$, $(-W)(v_{12}) = 0$, $(-\tilde{W})(i_{12}) = 0$, solo che in tal caso si ha a che fare con una funzione crescente e concava o, rispettivamente, decrescente e convessa, crescente e convessa, decrescente e convessa.

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI D'INTERESSE

- Finora abbiamo supposto di operare con una fissata legge finanziaria ($\rightsquigarrow$ fissato regime e fissato tasso) per scontare, o capitalizzare, importi indipendentemente dal loro segno e dall'epoca di esigibilità.
- Anche nel seguito continueremo a non tener conto del segno ($\rightsquigarrow$ stesso tasso per i debiti e per i crediti), però, nella pratica, il tasso di remunerazione di una certa operazione finanziaria ($\rightsquigarrow$ potremmo anche identificarlo col TIR) dipende dalla durata della stessa.
- Per fissare le idee, consideriamo un'operazione elementare di puro scambio, a pronti e, anche se non è rilevante data l'ipotesi di uguaglianza tra tasso debitore e tasso creditore, mettiamoci dal punto di vista del creditore:

$$\begin{array}{cc} -C & M \\ \vdash & \dashv \\ 0 & T \end{array}$$

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

- Supponiamo di fissare un regime, ad es. interesse semplice piuttosto che interesse composto.
- Il tasso (o l'intensità) che viene riconosciuto dipende dalla durata ($\rightsquigarrow$ scadenza) dell'operazione, è cioè una funzione di T.
- Ad es., se lavoriamo nel regime dell'interesse composto:

$$M = C(1 + i_0(T))^T \text{ oppure, con le intensità, } M = Ce^{\delta_0(T)T}$$

$\rightsquigarrow$ l'operazione, a pronti, è fatta in 0 $\rightsquigarrow$ il tasso di remunerazione viene contrattato in 0 $\rightsquigarrow$ ecco perché lo inseriamo come pedice

- Se lavoriamo invece nel regime dell'interesse semplice e, per distinguere, indichiamo con L, anziché i, il tasso ($\rightsquigarrow$ in realtà, come visto a suo tempo, avrebbe la dimensione di un'intensità):

$$M = C[1 + L_0(T)T]$$

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

- DEFINIZIONE:
  La funzione che, ad ogni $T > 0$, associa il tasso $i_0(T)$, o $L_0(T)$, o l'intensità $\delta_0(T)$, si chiama struttura per scadenza dei tassi a pronti all'epoca 0:

$$T \to i_0(T), \qquad T \to L_0(T), \qquad T \to \delta_0(T)$$

  $\rightsquigarrow$ Si tratta di una funzione in una variabile, con grafico una curva nel piano
- Empiricamente, la situazione normale è quella in cui tale funzione è crescente ($\rightsquigarrow$ si giustifica tramite la teoria economica della preferenza per la liquidità), ma si potrebbero verificare anche altre situazioni, ad es. decrescente ($\rightsquigarrow$ si parla di curva invertita), costante ($\rightsquigarrow$ piatta, o flat), con un unico punto di massimo o di minimo ($\rightsquigarrow$ campanulare), con un punto di massimo seguito da un punto di minimo o viceversa ($\rightsquigarrow$ a S o a cucchiaio), ...

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

- OSSERVAZIONE:

  Non esiste un'unica struttura per scadenza, dei tassi o delle intensità, ma questa viene costruita a partire da segmenti "simili" del mercato dei titoli a reddito fisso, ad esempio:

  - ▷ stesso emittente ($\rightsquigarrow$ struttura per scadenza dei tassi governativi, oppure dei tassi interbancari, oppure dei tassi relativi a prestiti a società con lo stesso rating, ...),
  - ▷ durata analoga ($\rightsquigarrow$ breve periodo, ad es. fino a 3/6 mesi; medio periodo, ad es. da 3/6 mesi fino a 2 anni; lungo periodo, ad es. da 2 a 30 anni o più).

TASSI INTERBANCARI

- In ambito interbancario un importante riferimento è costituito, nell'area Euro, dai tassi EURIBOR (acronimo di EURo InterBank Offered Rate), che sono stati introdotti nel 1999 e sono calcolati, in regime di interesse semplice, come media dei tassi in base a cui avvengono le operazioni di prestito, su varie scadenze, tra i principali istituti di credito europei.
- Sono pubblicati giornalmente e prevedono le seguenti scadenze: 1 settimana, 2 settimane, 3 settimane, 1 mese, 2 mesi, ..., 12 mesi; la convenzione utilizzata per il calcolo dei giorni è la 30/360.
- C'è anche un tasso per le transazioni a 1 giorno, chiamato EONIA (Euro OverNight Index Average).
- Analogamente, per i prestiti interbancari denominati in dollari o in sterline il tasso di riferimento è invece il LIBOR (London InterBank Offered Rate).

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

- Ovviamente il collegamento tra tassi e intensità nel regime dell'interesse composto è del tipo:

$$\delta = \ln(1+i), \quad \text{ovvero} \quad i = e^{\delta} - 1$$

  mentre, se si vogliono collegare anche con tassi ottenuti in regime di interesse semplice si assume che producano lo stesso montante (oppure generino lo stesso valore attuale) nello stesso periodo e a partire dallo stesso capitale.

- Concentriamoci ora su titoli di tipo zero-coupon (ad es. BOT o CTZ nell'ambito dei titoli di Stato), e indichiamo con $v_0(T)$ il prezzo a pronti in 0 di uno zero-coupon bond che paga 1 Euro in T $\rightsquigarrow$ se il valore nominale del bond fosse diverso da 1, per ottenerne il prezzo basterebbe moltiplicare $v_0(T)$ per il suo valore nominale

Struttura per scadenza dei tassi a pronti

- Supponiamo di osservare direttamente il tasso (o l'intensità) a pronti in 0 per la scadenza T nel regime dell'interesse semplice oppure in quello dell'interesse composto (omettiamo invece di considerare il caso dello sconto commerciale)
  - ⇝ Il prezzo in 0 del bond sarà dato dal valore attuale in 0 del suo valore nominale, unitario, esigibile in T, cioè dal fattore di attualizzazione con il tasso (o intensità) corrispondente:

$$v_0(T) = (1 + i_0(T))^{-T} = \mathrm{e}^{-\delta_0(T)T} = \frac{1}{1 + L_0(T)T}$$

- Se invece osserviamo direttamente il prezzo, possiamo ricavare il tasso (o l'intensità) corrispondente come TIR della seguente operazione finanziaria (o della sua "opposta"):

$$\begin{array}{cc} -v_0(T) & 1 \\ \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv & \\ 0 & T \end{array}$$

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

- Infatti, nel regime dell'interesse composto, dalla

$$-v_0(T) + 1 \cdot (1 + i_0(T))^{-T} = 0 \;\Rightarrow\; v_0(T) = (1 + i_0(T))^{-T}$$

$\rightsquigarrow$ fattore di attualizzazione al tasso $i_0(T)$

$$\Rightarrow\; i_0(T) = (v_0(T))^{-1/T} - 1$$

- Analogamente, dalla

$$v_0(T) = \mathrm{e}^{-\delta_0(T)T} \;\Rightarrow\; \delta_0(T) = -\frac{1}{T}\ln(v_0(T))$$

oppure

$$v_0(T) = \frac{1}{1 + L_0(T)T} \;\Rightarrow\; L_0(T) = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{v_0(T)} - 1\right]$$

nel caso dell'interesse semplice.

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

- Naturalmente, siccome non si osservano i tassi (o i prezzi) per tutte le scadenze, bisogna stimare, con qualche criterio, la struttura per scadenza dei tassi a pronti, a partire dai dati a disposizione, in modo da costruire l'intera curva dei tassi; tuttavia noi non ci occuperemo di questo aspetto.

- Una volta che si ha a disposizione la struttura per scadenza dei tassi a pronti per un certo segmento di mercato, per valutare un titolo che appartiene allo stesso segmento (cioè gli impegni residui) per coerenza bisogna scontare gli importi dovuti in scadenze diverse con i tassi corrispondenti.

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

- ESEMPIO: Vogliamo valutare in 0 un titolo che promette i seguenti pagamenti:

	R_1	R_2	$\dots$	R_n
0	T_1	T_2	$\cdots$	T_n

$$\rightsquigarrow \quad V(0) = R_1 v_0(T_1) + R_2 v_0(T_2) + \cdots + R_n v_0(T_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} R_j \left(1 + i_0(T_j)\right)^{-T_j} \quad \text{nel regime dell'interesse composto}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{e}^{-\delta_0(T_j)T_j} \quad \text{nel regime dell'interesse composto}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} R_j \frac{1}{1 + L_0(T_j)T_j} \quad \text{nel regime dell'interesse semplice}$$

STRUTTURA PER SCADENZA DEI PREZZI A PRONTI

- Così come abbiamo definito la struttura per scadenza dei tassi a pronti, possiamo definire anche la struttura per scadenza all'epoca 0 dei prezzi a pronti degli zero-coupon bond unitari come quella funzione che ad ogni data $T \geq 0$ associa il prezzo corrispondente: $T \to v_0(T)$.
- Più in generale, la struttura per scadenza dei prezzi, o tassi, a pronti, in una fissata epoca t, è quella funzione che, ad ogni $T > t$ ($T \geq t$, se si tratta del prezzo), associa, rispettivamente, $v_t(T)$, $i_t(T)$, $\delta_t(T)$, $L_t(T)$, con ovvio significato dei simboli

  $\rightsquigarrow$ Riesce, naturalmente:

$$v_t(T) = (1 + i_t(T))^{-(T-t)} = \mathrm{e}^{-\delta_t(T)(T-t)} = \frac{1}{1 + L_t(T)(T-t)}$$

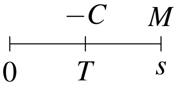
Struttura per scadenza di prezzi e tassi a pronti

- Riepilogando, per ogni fissato t, la struttura per scadenza di prezzi o tassi a pronti in t è una funzione di T ($T \geq t$ per i prezzi oppure $T > t$ per i tassi).

- Se invece si pensa di mantenere bloccato T e muovere t ($t \leq T$ per i prezzi o $t < T$ per i tassi) non abbiamo più a che fare con una funzione bensì con un processo stocastico, perché tutte le quantità definite precedentemente evolvono nel tempo in maniera stocastica (in base alle condizioni del mercato).

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI FORWARD

- Consideriamo ora un'operazione elementare di puro scambio, concordata all'epoca 0, però non a pronti ($\rightsquigarrow$ operazione a termine, o forward):



- Anche qui possiamo definire i tassi (o intensità) di remunerazione dell'operazione, nell'intervallo $[T,s]$ (con $s > T$), nei vari regimi, che indichiamo con $i_0(T,s)$, $L_0(T,s)$, $\delta_0(T,s)$ (con ovvio significato dei simboli)
  - $\rightsquigarrow$ Questi tassi sono concordati in 0, non in T, in base alle condizioni prevalenti del mercato, e quindi sono certi, non aleatori, anche se inizieranno ad avere validità in futuro
  - $\rightsquigarrow$ Questi tassi (o intensità) si chiamano tassi a termine, o forward

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI FORWARD

- DEFINIZIONE:
  La funzione che, ad ogni coppia (T,s), con $0 \leq T < s$, associa il tasso $i_0(T,s)$, o $L_0(T,s)$, o l'intensità $\delta_0(T,s)$, si chiama struttura per scadenza dei tassi forward all'epoca 0:

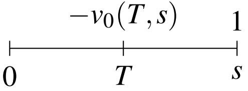
$$(T,s) \to i_0(T,s), \quad (T,s) \to L_0(T,s), \quad (T,s) \to \delta_0(T,s)$$

$\rightsquigarrow$ Si tratta di una funzione in due variabili

$\rightsquigarrow$ Nel caso particolare in cui $T = 0$ ritroviamo la struttura per scadenza dei tassi a pronti

Struttura per scadenza dei prezzi forward

- In particolare, con riferimento all'operazione di acquisto, in T, di uno zero-coupon bond che paga 1 Euro alla scadenza s, al prezzo concordato in 0, indicato con $v_0(T,s)$:



  definiamo struttura per scadenza dei prezzi forward all'epoca 0 la funzione che ad ogni coppia (T,s) (con $0 \leq T \leq s$) associa il prezzo corrispondente: $(T,s) \to v_0(T,s)$.
  $\rightsquigarrow$ $v_0(T,s) \neq v_T(s)$
  $\rightsquigarrow$ $v_0(T,s)$ è certo, cioè noto in 0
  $\rightsquigarrow$ $v_T(s)$ è aleatorio, noto soltanto in T

Collegamento tra tassi e prezzi forward

- Naturalmente continua a sussistere lo stesso tipo di collegamento tra tassi e prezzi forward che si aveva nel caso a pronti, solo che ora va riferito all'intervallo "forward" $[T,s]$:

$$v_0(T,s) = (1+i_0(T,s))^{-(s-T)} = \mathrm{e}^{-\delta_0(T,s)(s-T)} = \frac{1}{1+L_0(T,s)(s-T)}$$

$\rightsquigarrow$ Anche qui $v_0(T,s)$ può essere interpretato come fattore di attualizzazione, concordato in 0, per un'operazione di anticipo, in un'epoca futura T, del capitale unitario disponibile in $s > T$

COLLEGAMENTO TRA TASSI E PREZZI FORWARD

$$\Rightarrow \quad i_0(T,s) = (v_0(T,s))^{-1/(s-T)} - 1, \quad \delta_0(T,s) = -\frac{1}{s-T}\ln(v_0(T,s))$$

$$L_0(T,s) = \frac{1}{s-T}\left[\frac{1}{v_0(T,s)} - 1\right]$$

⇝ Anche qui, se si osservano prima i prezzi che i tassi (forward), i tassi possono essere ottenuti come TIR dell'operazione precedentemente illustrata, dove il VAN viene valutato in T, anziché in 0, però sulla base del prezzo concordato in 0

- Anche qui si può pensare di definire la struttura per scadenza di prezzi e tassi forward in una fissata epoca t anziché in 0:

$$(T,s) \to i_t(T,s),\ (T,s) \to L_t(T,s),\ (T,s) \to \delta_t(T,s),\ (T,s) \to v_t(T,s)$$

⇝ Se si muove t, mantenendo bloccati T ed s, si ottengono dei processi stocastici

COLLEGAMENTO TRA STRUTTURE A PRONTI E FORWARD

- Riassumendo, la struttura per scadenza in t dei tassi (o prezzi) forward è una funzione in 2 variabili T ed s, quella dei tassi (o prezzi) a pronti è funzione di 1 sola variabile s e si può ottenere come caso particolare della precedente ponendo $T = t$
  - $\rightsquigarrow$ Questo potrebbe far pensare che occorrano maggiori informazioni per costruire la struttura a termine, anziché quella a pronti
  - $\rightsquigarrow$ Invece non è così; nota quella a pronti si può ricavare anche quella a termine, pur di accogliere tutta una serie di ipotesi che caratterizzano un mercato "ideale"

IPOTESI SUI MERCATI

- Descriviamo ora tali ipotesi.
- Supponiamo di operare in mercati concorrenziali perfetti, dove
  - ▷ gli agenti sono razionali e non saziati
    ($\rightsquigarrow$ massimizzatori di profitto)
  - ▷ i titoli sono perfettamente divisibili
    ($\rightsquigarrow$ non ci sono tagli minimi, . . .)
  - ▷ gli agenti sono price-takers
    ($\rightsquigarrow$ non hanno alcun potere nel determinare, con il loro comportamento individuale, i prezzi di mercato)
  - ▷ non ci sono tasse o costi di transazione
    ($\rightsquigarrow$ per comprare o vendere titoli non si devono pagare commissioni né tasse sui redditi percepiti)
  - ▷ sono ammesse le vendite allo scoperto, senza limitazioni
    ($\rightsquigarrow$ ci si può indebitare o si può investire allo stesso tasso, che però in generale cambia in base alla durata dell'operazione)

VENDITE ALLO SCOPERTO

- Vendere allo scoperto significa vendere qualcosa che non si possiede.
- Dal punto di vista pratico, per poterlo fare bisogna rivolgersi ad un intermediario finanziario che possiede il bene oggetto di vendita allo scoperto ($\rightsquigarrow$ nel nostro caso un titolo) o lo ha in deposito per conto di un altro cliente, ordinandogli di venderlo sul mercato a pronti, al prezzo corrente di mercato.
- In questo modo si incassa immediatamente il ricavato della vendita (salvo, eventualmente, una piccola parte che viene trattenuta a titolo di garanzia ma che comunque verrà restituita e remunerata, per cui non conta dal punto di vista teorico), e ci si impegna a restituire il titolo in una data futura (o a rimborsarne il valore nominale a scadenza)

  $\rightsquigarrow$ Per poterlo fare bisogna ricomprare il titolo sul mercato, al prezzo corrente di mercato

VENDITE ALLO SCOPERTO

- Inoltre, se è previsto che il titolo paghi degli interessi prima della restituzione/rimborso, colui che l'ha venduto allo scoperto deve pagare tali interessi all'intermediario, che li verserà sul conto del cliente che possiede il titolo.
- In particolare, l'operazione di vendita allo scoperto di uno zero-coupon bond unitario da restituire a scadenza, cioè l'indebitamento a tasso certo, non è altro che l'operazione opposta a quella precedentemente considerata, di acquisto dello stesso titolo:

$$\begin{array}{cc} v_0(T) & -1 \\ \vdash\!\!\text{———}\!\!\dashv & \\ 0 & T \end{array}$$

VENDITE ALLO SCOPERTO

- Se invece l'operazione di vendita allo scoperto si chiude prima della scadenza del titolo (cioè in $t < T$) si tratta di un'operazione aleatoria, in quanto l'acquisto del titolo avviene al prezzo a pronti di mercato, noto solo in futuro (a meno che non si acquisti a termine, ad un prezzo concordato in 0):

$$\begin{array}{cc} v_0(T) & -v_t(T) \\ \vdash\!\!\!\text{------------}\!\!\!\dashv & \\ 0 & t \end{array}$$

- L'indebitamento tramite la vendita di uno zero-coupon bond può avvenire anche sul mercato a termine, anziché a pronti, e in tal caso i flussi generati dall'operazione, supponendo che si concluda alla scadenza del titolo, sono dati da:

$$\begin{array}{ccc} & v_0(T,s) & -1 \\ 0 & T & s \end{array}$$

ASSENZA DI OPPORTUNITÀ DI ARBITRAGGIO

- A tutte le ipotesi precedentemente elencate, che caratterizzano quello che si definisce mercato perfetto, privo di qualunque tipo di frizione (o attrito), che ostacola gli scambi, se ne aggiunge un'altra, fondamentale, che è l'assenza di opportunità di arbitraggio.
- Anche se la definizione di opportunità di arbitraggio è più generale e coinvolge operazioni finanziarie aleatorie, diamola ora con riferimento alle operazioni certe, che sono quelle trattate nel corso.

ASSENZA DI OPPORTUNITÀ DI ARBITRAGGIO

- DEFINIZIONE

  Un'operazione finanziaria certa

$$
\begin{array}{ccccc}
x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\
\hline
0 & T_1 & T_2 & \dots & T_n
\end{array}
$$

  si chiama opportunità di arbitraggio se

$$
\begin{cases}
x_j \geq 0 \ \forall j & \rightsquigarrow \ \text{nessun esborso} \\
\exists\, j : \ x_j > 0 & \rightsquigarrow \ \text{almeno un introito}
\end{cases}
$$

ASSENZA DI OPPORTUNITÀ DI ARBITRAGGIO

OSSERVAZIONI

- L'operazione precedentemente descritta può essere ottenuta come "somma" di operazioni finanziarie conseguenza di transazioni sul mercato, ai prezzi/tassi di mercato
  - $\rightsquigarrow$ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sono i saldi delle varie operazioni che si vanno a sommare
  - $\rightsquigarrow$ I protagonisti della presenza/assenza di opportunità di arbitraggio sono i prezzi, o tassi, di mercato
  - $\rightsquigarrow$ Se esistessero opportunità di arbitraggio il mercato non sarebbe in equilibrio perché tutti gli agenti ($\rightsquigarrow$ razionali e non saziati), in blocco, cercherebbero di sfruttarle domandando i titoli "sottoprezzati", rispetto a un ipotetico prezzo di equilibrio, e offrendo in vendita quelli "sovraprezzati", per cui, per il gioco della domanda e dell'offerta ($\rightsquigarrow$ massiccia, di tutti gli operatori e non del singolo, che è price-taker), i prezzi/tassi di mercato tenderebbero a muoversi

ASSENZA DI OPPORTUNITÀ DI ARBITRAGGIO

- L'operazione

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline 0 & T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{array}$$

sarebbe un'opportunità di arbitraggio anche qualora $x_j \leq 0 \ \forall j$ ed $\exists j : \ x_j < 0$

$\rightsquigarrow$ Infatti, per ricondursi alla situazione precedente, basterebbe fare le operazioni opposte, ovvero comprare a pronti (o a termine) i titoli venduti allo scoperto (o, rispettivamente, a termine) e vendere allo scoperto (o a termine) i titoli acquistati a pronti (o, rispettivamente, a termine)

Assenza di opportunità di arbitraggio

- L'assenza di opportunità di arbitraggio implica:
  - $v_t(T) > 0 \ \forall\, t, T : \ t \leq T$. Infatti, se così non fosse, ovvero se $\exists\, t, T$, con $t \leq T$, tale che $v_t(T) \leq 0$, allora si avrebbe la seguente opportunità di arbitraggio:

$$\begin{array}{cc} -v_t(T)(\geq 0) & 1(>0) \\ t & T \end{array}$$

  - $v_t(T, s) > 0 \ \forall\, t, T, s : \ t \leq T \leq s$. Infatti, se così non fosse, ovvero se $\exists\, t, T, s$, con $t \leq T \leq s$, tale che $v_t(T, s) \leq 0$, allora si avrebbe la seguente opportunità di arbitraggio:

$$\begin{array}{ccc} 0 & -v_t(T,s)(\geq 0) & 1(>0) \\ t & T & s \end{array}$$

ASSENZA DI OPPORTUNITÀ DI ARBITRAGGIO

▷ $v_T(T) = v_t(T, T) = 1 \;\; \forall t, T : \; t \leq T.$

Infatti, se così non fosse, ci sarebbe uno scambio tra due importi diversi alla stessa epoca, per cui, a una delle due parti coinvolte nello scambio, rimarrebbe qualcosa

$\rightsquigarrow$ Cascherebbero inoltre anche i postulati sulla relazione d'indifferenza che abbiamo assunto all'inizio, in base a cui due importi alla stessa epoca risultano indifferenti, e quindi possono venire scambiati, solo se coincidenti

TEOREMA DEI PREZZI IMPLICITI

- Vediamo ora di enunciare il seguente teorema, noto come TEOREMA dei prezzi impliciti:
  Sotto le ipotesi di mercati perfetti, privi di opportunità di arbitraggio, il prezzo forward di uno zero-coupon bond si ottiene a partire dai prezzi a pronti al seguente modo:

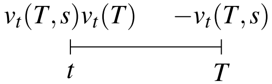
  $$v_t(T,s) = \frac{v_t(s)}{v_t(T)} \quad \forall\, t,T,s:\; t \leq T \leq s$$

  DIMOSTRAZIONE:
  Supponiamo per assurdo che $\exists\, t,T,s$, con $t \leq T \leq s$, tali che

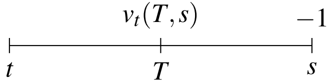
  $$v_t(T,s) \neq \frac{v_t(s)}{v_t(T)}, \;\text{ ovvero }\; v_t(T,s)v_t(T) \neq v_t(s)$$

Teorema dei prezzi impliciti

- Se $v_t(T,s)v_t(T) > v_t(s)$ in t facciamo le seguenti operazioni:
  - ▷ vendiamo allo scoperto $v_t(T,s)$ zero-coupon bond con scadenza T



  - ▷ concordiamo la vendita a termine, in T, di uno zero-coupon bond che scade in s



  - ▷ compriamo a pronti uno zero-coupon bond che scade in s

TEOREMA DEI PREZZI IMPLICITI

⇝ Sommando queste operazioni otteniamo:

$v_t(T,s)v_t(T) - v_t(s)(> 0)$	0	0
t	T	s

cioè un'opportunità di arbitraggio, il che è assurdo perché supponiamo che non ce ne siano.

- Se invece $v_t(T,s)v_t(T) < v_t(s)$ in t facciamo esattamente le operazioni opposte a quelle di prima, pervenendo alla stessa conclusione $\square$

TEOREMA DEI PREZZI IMPLICITI

- INTERPRETAZIONE
  Le ipotesi del Teorema dei prezzi impliciti sono di natura economica; il risultato ottenuto ricorda, per certi versi, la scindibilità retrospettiva in quanto coinvolge i prezzi degli zero-coupon bond, intesi come fattori di attualizzazione (ma anche quella prospettiva, pensando ai loro reciproci):

$$v_t(s) = v_t(T)v_t(T,s), \quad (0 \le)t \le T \le s$$

  Questa relazione coinvolge sia prezzi a pronti che a termine, tutti concordati ($\rightsquigarrow$ e quindi noti) alla stessa epoca t.
- Tuttavia non si tratta della scindibilità vera e propria, che dovrebbe invece coinvolgere solo prezzi a pronti; dovrebbe cioè essere qualcosa del tipo

$$v_t(s) = v_t(T)v_T(s), \quad (0 \le)t \le T \le s$$

  che, ovviamente, non è possibile visto che il prezzo a pronti futuro, $v_T(s)$, è aleatorio.

TASSI IMPLICITI

- Così come i prezzi forward degli zero-coupon bond si possono ricavare da quelli a pronti in base alla relazione

$$v_t(T,s) = \frac{v_t(s)}{v_t(T)}, \quad (0 \leq) t \leq T \leq s$$

sono cioè implicati dalla struttura per scadenza dei prezzi a pronti, lo stesso discorso vale anche per i tassi (o le intensità); basta sostituire i tassi nella relazione che fornisce i prezzi:

  ▷ tassi nel regime dell'interesse composto

$$(1+i_t(T,s))^{-(s-T)} = \frac{(1+i_t(s))^{-(s-t)}}{(1+i_t(T))^{-(T-t)}}$$

$$\Rightarrow i_t(T,s) = \frac{(1+i_t(s))^{(s-t)/(s-T)}}{(1+i_t(T))^{(T-t)/(s-T)}} - 1, \ (0 \leq) t \leq T < s$$

TASSI IMPLICITI

▷ intensità nel regime dell'interesse composto

$$e^{-\delta_t(T,s)(s-T)} = \frac{e^{-\delta_t(s)(s-t)}}{e^{-\delta_t(T)(T-t)}}$$

$$\Rightarrow \ \delta_t(T,s) = \frac{\delta_t(s)(s-t) - \delta_t(T)(T-t)}{s-T}, \quad (0 \leq) t < T < s$$

▷ tasso nel regime dell'interesse semplice

$$\frac{1}{1+L_t(T,s)(s-T)} = \frac{1+L_t(T)(T-t)}{1+L_t(s)(s-t)}$$

$$\Rightarrow \ L_t(T,s) = \frac{1}{s-T}\left[\frac{1+L_t(s)(s-t)}{1+L_t(T)(T-t)} - 1\right], \quad (0 \leq) t \leq T < s$$

STRUTTURE PER SCADENZA ALTERNATIVE

- Nelle lezioni precedenti abbiamo definito varie strutture per scadenza, dei prezzi v, dei tassi i ed L, delle intensità δ, sia a pronti che a termine, ma in realtà basta conoscere una di queste per costruire tutte le altre:
  - ▷ se si conoscono i tassi si possono ottenere i prezzi come fattori di attualizzazione con il tasso (o intensità) corrispondente,
  - ▷ se si conoscono i prezzi si possono ricavare i tassi (o intensità) come TIR dell'operazione di acquisto (a pronti o a termine) di uno zero-coupon bond tenuto fino alla scadenza,
  - ▷ se si conoscono i prezzi (o i tassi) a termine quelli a pronti si ottengono come caso particolare ponendo $T = t$,
  - ▷ se si conoscono i prezzi (o i tassi) a pronti si possono costruire quelli a termine sfruttando le relazioni appena viste basate sul Teorema dei tassi impliciti.
- Oltre a queste, ci sono anche altre strutture alternative, che dipendono dal tipo di insieme di date in cui sono aperti i mercati ($\rightsquigarrow$ scadenzario).

SCADENZARIO DISCRETO

- Ad esempio, se i mercati sono aperti nel discreto, in corrispondenza alle epoche $T_0, T_1, T_2, \ldots$, con $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$, per essere in grado di costruire le strutture precedenti basta conoscere i tassi forward uniperiodali, definiti come $i^f_{T_r}(T_j) \doteq i_{T_r}(T_j, T_{j+1})$, $L^f_{T_r}(T_j) \doteq L_{T_r}(T_j, T_{j+1})$, $\delta^f_{T_r}(T_j) \doteq \delta_{T_r}(T_j, T_{j+1})$, $r, j \in \{0, 1, 2, \ldots\} : r \leq j$.
- Concentriamoci, in particolare, sulle intensità e, per alleggerire la notazione, prendiamo $r = 0$.
- Proviamo che l'intensità forward multiperiodale $\delta_0(T_j, T_k)$, con $k > j$ ($\rightsquigarrow$ e quindi anche quella a pronti, se $j = 0$), si ottiene come media aritmetica ponderata delle intensità forward uniperiodali

$$\delta^f_0(T_h), \text{ con pesi } w_h = \frac{T_{h+1} - T_h}{T_k - T_j} = \frac{T_{h+1} - T_h}{\sum_{g=j}^{k-1} (T_{g+1} - T_g)}, \; h = j, \ldots, k-1$$

SCADENZARIO DISCRETO

- DIMOSTRAZIONE

  Sappiamo che $v_0(T_j, T_K) = \mathrm{e}^{-\delta_0(T_j,T_k)(T_k - T_j)}$

$$\Rightarrow \quad \delta_0(T_j, T_k) = -\frac{1}{T_k - T_j} \ln\left(v_0(T_j, T_k)\right)$$

Ma $v_0(T_j, T_k) = \dfrac{v_0(T_k)}{v_0(T_j)} = \dfrac{v_0(T_k)}{v_0(T_{k-1})} \cdot \dfrac{v_0(T_{k-1})}{v_0(T_{k-2})} \cdots \dfrac{v_0(T_{j+1})}{v_0(T_j)}$

$$= v_0(T_{k-1}, T_k) v_0(T_{k-2}, T_{k-1}) \ldots v_0(T_j, T_{j+1})$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(v_0(T_j, T_k)\right) = \sum_{h=j}^{k-1} \ln\left(v_0(T_h, T_{h+1})\right)$$

SCADENZARIO DISCRETO

$$\Rightarrow \quad \delta_0(T_j, T_k) = -\frac{1}{T_k - T_j} \sum_{h=j}^{k-1} \ln\left(v_0(T_h, T_{h+1})\right)$$

Essendo $v_0(T_h, T_{h+1}) = \mathrm{e}^{-\delta_0(T_h, T_{h+1})(T_{h+1} - T_h)}$

$$\Rightarrow \ \ln\left(v_0(T_h, T_{h+1})\right) = -(T_{h+1} - T_h)\delta_0(T_h, T_{h+1}) = -(T_{h+1} - T_h)\delta_0^f(T_h)$$

$$\Rightarrow \quad \delta_0(T_j, T_k) = \frac{1}{T_k - T_j} \sum_{h=j}^{k-1} (T_{h+1} - T_h)\delta_0^f(T_h) = \sum_{h=j}^{k-1} w_h \delta_0^f(T_h) \quad \square$$

SCADENZARIO CONTINUO

- Se i mercati sono aperti nel continuo, si definisce intensità forward istantanea il seguente limite (se esiste finito):

$$\delta_t^f(T) \doteq \lim_{s \to T^+} \delta_t(T, s)$$

- Sostituendo

$$\delta_t(T, s) = -\frac{1}{s-T} \ln(v_t(T, s)) = -\frac{1}{s-T} \ln\left(\frac{v_t(s)}{v_t(T)}\right)$$
$$= -\frac{\ln(v_t(s)) - \ln(v_t(T))}{s-T}$$

e passando al $\lim_{s \to T^+}$, se esiste finito, si ottiene

$$\delta_t^f(T) = -\frac{\mathrm{d}\ln(v_t(T))}{\mathrm{d}T} = -\frac{\mathrm{d}v_t(T)/\mathrm{d}T}{v_t(T)}$$

SCADENZARIO CONTINUO

- Analogamente a prima, poniamoci all'epoca $t = 0$ e dimostriamo che l'intensità forward non istantanea (e quindi anche quella a pronti nel caso particolare $T = t = 0$) si ottiene come media integrale delle intensità forward istantanee:

$$\delta_0(T,s) = \frac{\int_T^s \delta_0^f(x)\mathrm{d}x}{s-T}$$

- DIMOSTRAZIONE

$$\begin{aligned}\int_T^s \delta_0^f(x)\mathrm{d}x &= -\int_T^s \frac{\mathrm{d}\ln(v_0(x))}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -\left[\ln(v_0(x))\right]_T^s \\ &= -\left[\ln(v_0(s)) - \ln(v_0(T))\right] = -\ln\left(\frac{v_0(s)}{v_0(T)}\right) \\ &= -\ln(v_0(T,s)) = (s-T)\delta_0(T,s) \quad \square\end{aligned}$$

OBBLIGAZIONI

- Abbiamo già parlato, in generale, delle obbligazioni come prestiti divisi attraverso cui lo Stato, o le grosse società, ripartiscono un debito rivolgendosi al pubblico, cioè a una molteplicità di investitori.
- Abbiamo anche detto che l'emissione ($\rightsquigarrow$ collocazione del prestito) avviene nel mercato primario mentre, successivamente, l'obbligazione può essere venduta sul mercato secondario.

CLASSIFICAZIONE DELLE OBBLIGAZIONI

- Le obbligazioni possono essere di vario tipo:
  - Obbligazioni senza cedole ($\rightsquigarrow$ zero-coupon bonds o titoli a cedola nulla, pure discount bonds o buoni di puro sconto, ...). Es. BOT e CTZ, su cui torneremo. Sono senza cedole anche i Buoni Fruttiferi Postali, però sono titoli ad accumulazione, non buoni di puro sconto in cui gli interessi sono invece pagati anticipatamente, e in blocco, al momento dell'acquisto.
  - Obbligazioni con cedole fisse ($\rightsquigarrow$ coupon bonds), in cui gli interessi vengono pagati posticipatamente, a scadenze equidistanziate, e la restituzione del capitale ($\rightsquigarrow$ valore nominale, o facciale, dell'obbligazione) avviene integralmente alla scadenza. Es. BTP, su cui ci torneremo.

CLASSIFICAZIONE DELLE OBBLIGAZIONI

▷ Obbligazioni a tasso variabile (s'intende stocasticamente $\rightsquigarrow$ floating rate bonds, o semplicemente floaters).
Hanno la stessa struttura dei coupon bonds: interessi sul valore nominale pagati posticipatamente e restituzione del capitale in fondo, solo che il tasso d'interesse è variabile (stocasticamente), agganciato a qualche indice di mercato.
Nell'ambito dei titoli di Stato nel passato c'erano, ad es., i CCT (Certificati di Credito del Tesoro), con cedole semestrali, predeterminate (cioè note a inizio semestre e pagate alla fine), della durata di 7 anni, e tasso d'interesse pari a quello dei BOT a 6 mesi + 0.15%.
Ora questi titoli sono stati sostituiti dai CCTeu, con durate dai 3 ai 7 anni, in cui il tasso è pari all'EURIBOR a 6 mesi maggiorato di uno spread.

CLASSIFICAZIONE DELLE OBBLIGAZIONI

Anche le società (ad es. banche) emettono obbligazioni simili; spesso il tasso è collegato all'EURIBOR a 3 mesi, oppure al LIBOR, e il tasso d'interesse riconosciuto è tipicamente pari a quello di riferimento + uno spread.
Ci sono anche i reverse floaters, in cui il collegamento è inverso, cioè il tasso riconosciuto è decrescente (di solito linearmente), anziché crescente, rispetto al tasso di riferimento.
La variabile di riferimento potrebbe essere, anziché un tasso d'interesse, un indice azionario, il prezzo di una merce (ad es. petrolio), un indice dei prezzi, etc.; ad es., fra i titoli di Stato, abbiamo i BTP€i, indicizzati all'inflazione europea, e i BTP Italia, indicizzati a quella italiana.

CLASSIFICAZIONE DELLE OBBLIGAZIONI

- ▷ Obbligazioni in cui il tasso varia, ma in maniera deterministica.
  La struttura è sempre la stessa, con pagamento di cedole periodiche posticipate, e restituzione del capitale a scadenza.
  Ad es. il tasso è pari al 3% nei primi 2 anni, poi aumenta al 3.5%, poi aumenta ancora, ... ($\rightsquigarrow$ step-up), oppure si parte dal 3%, poi il tasso diminuisce al 2.5%, poi diminuisce ancora, ... ($\rightsquigarrow$ step-down).
  Di solito queste obbligazioni sono emesse dalle società, ma anche lo Stato sta attualmente collocando i BTP Futura che, oltre ad un meccanismo di step-up, prevedono il riconoscimento di un premio fedeltà a scadenza, agganciato al tasso di crescita annuo del PIL nominale dell'Italia e riservato a coloro che comprano il titolo al momento dell'emissione e lo detengono fino a scadenza.

- Tutte le informazioni riguardanti i titoli di Stato si trovano sul sito www.dt.tesoro.it.

AMMORTAMENTO PROGRESSIVO

- Le società, talvolta, prevedono un piano di ammortamento progressivo del debito, per cui
  - *a*) emettono obbligazioni in cui non c'è solo il pagamento degli interessi ma anche il rimborso graduale del debito, secondo un piano d'ammortamento prestabilito ($\rightsquigarrow$ sinking-fund bonds, piuttosto rari);
  - *b*) è prevista la possibilità di rimborso anticipato, tramite sorteggio $\rightsquigarrow$ è il caso già analizzato in precedenza;
  - *c*) le obbligazioni sono callable.
    In tal caso l'emittente può decidere, a sua discrezione, di rimborsare anticipatamente le obbligazioni ad un prezzo stabilito nel contratto, tipicamente il valore nominale c o un valore $\bar{c} > c$.
    Nel contratto questa clausola dev'essere esplicitamente dichiarata
    $\rightsquigarrow$ si tratta di un'opzione per l'emittente, cioè di un diritto
    $\rightsquigarrow$ l'obbligazione vale di meno di una di pari caratteristiche ma non callable, perché si presume che l'emittente eserciti l'opzione solo se gli conviene, cioè se il valore di rimborso è inferiore al prezzo corrente di mercato, altrimenti converrebbe comprare direttamente l'obbligazione sul mercato.

QUOTAZIONI

- Il prezzo delle obbligazioni con cedole periodiche può essere diverso dal valore nominale c non soltanto in un'epoca t successiva all'emissione, ma anche al momento del collocamento; l'obbligazione si dice quotata/emessa
  - ▷ sotto la pari se tale prezzo è $< c$,
  - ▷ alla pari se tale prezzo è $= c$,
  - ▷ sopra la pari se tale prezzo è $> c$.
- Se i tassi d'interesse sono strettamente positivi, gli zero-coupon bond sono quotati/emessi sotto la pari, ma al momento attuale di persistenti tassi < 0, almeno sul breve periodo, le quotazioni di BOT e CTZ sono invece sopra la pari.

ZERO-COUPON BONDS

- Come già detto, sono titoli senza cedola, o buoni di puro sconto.
- Ad es. sul mercato italiano ci sono i BOT (Buoni Ordinari del Tesoro), che vengono emessi a metà di ogni mese con scadenze a 3 mesi e a 1 anno, e alla fine di ogni mese con scadenza 6 mesi dopo.
- I CTZ (Certificati del Tesoro Zero-coupon) vengono emessi verso la fine del mese, non tutti i mesi però, e hanno scadenza a 2 anni dall'emissione.
- Il prezzo di emissione si forma attraverso un meccanismo d'asta competitivo.
- Successivamente tali titoli possono essere venduti nel mercato secondario, a un prezzo che dipende dall'incontro tra domanda e offerta.
- Il taglio minimo è di 1000 Euro e il valore nominale ($\rightsquigarrow =$ valore di rimborso) è un multiplo di 1000 Euro.

ZERO-COUPON BONDS

- La quotazione, cioè il prezzo, avviene su base 100
  - $\rightsquigarrow$ Se, ad es., è pari a 99, significa che $\forall$100 Euro di valore nominale bisogna pagare 99
  - $\rightsquigarrow$ Se il valore nominale è 3000€, bisognerà pagare $99 \cdot 3000/100 = 2970$€
- Supponiamo tuttavia, come abbiamo già fatto, di definire tali valori (cioè i prezzi di BOT e CTZ) per unità di valore nominale, e indichiamo con $v_t(T)$ il valore, o prezzo, al tempo t di un titolo di scadenza $T > t$, che rimborserà 1€ in T
  - $\rightsquigarrow$ Stiamo pensando ad un acquisto/vendita a pronti, in t
  - $\rightsquigarrow$ Il prezzo è sia concordato che pagato in t

RENDIMENTO A SCADENZA DEGLI ZERO-COUPON BOND

- Si definisce tasso di rendimento a scadenza (dall'inglese yield-to-maturity) del titolo il TIR della seguente operazione finanziaria (o della sua opposta):

$$\begin{array}{ccc} -v_t(T) & & 1 \\ \vdash & \!\!\!\text{———————}\!\!\! & \dashv \\ t & & T \end{array}$$

  ⇝ Niente di nuovo, è proprio quel tasso (o intensità) che abbiamo definito precedentemente per descrivere la struttura per scadenza, in t fissato, dei tassi a pronti

  ⇝ Si tratta di un yield-to-maturity, cioè si presuppone che il titolo sia tenuto fino alla scadenza e non venduto prima

  ⇝ Tale tasso è noto già in t, all'inizio dell'operazione

Rendimento a scadenza degli Zero-Coupon Bond

- I tassi di rendimento a scadenza vengono regolarmente pubblicati.
- Di solito, come succede ad es. per i BOT, in cui la scadenza non supera l'anno, si utilizza il regime dell'interesse semplice, per cui dalla

$$v_t(T) = \frac{1}{1 + L_t(T)(T-t)} \quad \text{si ottiene} \quad L_t(T) = \frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{v_t(T)} - 1\right]$$

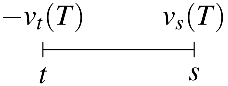
- La convenzione per il calcolo dei giorni è la ACT/360.
- Se invece la scadenza è superiore all'anno, ad es. CTZ o zero-coupon bonds emessi da società, con scadenze anche molto lunghe), si utilizza di solito il regime dell'interesse composto, per cui dalla

$$v_t(T) = (1 + i_t(T))^{-(T-t)} \quad \text{si ottiene} \quad i_t(T) = v_t(T)^{-1/(T-t)} - 1$$

- Per i CTZ la convenzione per il calcolo dei giorni è la ACT/365.

RENDIMENTO DA COMPRAVENDITA

- Se si decide di comprare il titolo in t e di rivenderlo prima della scadenza T, cioè in $s : t < s < T$ (o viceversa, venderlo allo scoperto in t e ricomprarlo per restituirlo in s), allora si fa un'operazione finanziaria aleatoria, il cui rendimento è aleatorio in t (quando si fa l'operazione) e diventerà noto soltanto in s:



- Ciò è dovuto al fatto che il prezzo di vendita $v_s(T)$ dipende dalle condizioni prevalenti del mercato all'epoca s.

TASSAZIONE DEI BOT

- I rendimenti dei titoli di Stato (e anche dei Buoni Fruttiferi Postali) sono tassati al 12.5%, mentre quelli delle società private sono tassati al 26%.
- Descriviamo ora in particolare la tassazione dei BOT; modalità analoghe valgono comunque anche per gli zero-coupon bond emessi dalle imprese.
- Se l'acquisto del BOT avviene al momento dell'emissione, che indichiamo con 0, la tassazione è effettuata anticipatamente già all'atto dell'acquisto, per cui chi compra il BOT (unitario) di scadenza T non paga soltanto $v_0(T)$ ma anche le tasse sugli interessi anticipati, cioè su $1 - v_0(T)$, se > 0, pari dunque a $0.125(1 - v_0(T))$
  - $\rightsquigarrow$ Ovviamente se, come accade in questi ultimi tempi, la quotazione dei titoli è sopra la pari, allora non si pagano tasse, almeno all'emissione

TASSAZIONE DEI BOT

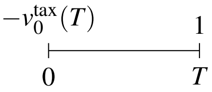
- Se il titolo viene comprato in 0 e tenuto fino alla scadenza T siamo in grado di calcolare, già in 0, il tasso di rendimento netto a scadenza, che indichiamo con $L_0^{\text{netto}}(T)$.
  - ▷ Se $v_0(T) \geq 1$ esso coincide con il tasso di rendimento lordo a scadenza

$$L_0(T) = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{v_0(T)} - 1\right]$$

  - ▷ Se invece il titolo è quotato sotto la pari, cioè $v_0(T) < 1$, definiamo il prezzo d'acquisto al lordo della tassa

$$v_0^{\text{tax}}(T) \doteq v_0(T) + 0.125\,[1 - v_0(T)] = 0.125 + 0.875 v_0(T)$$

⇝ Il tasso di rendimento netto a scadenza è il TIR, nel regime dell'interesse semplice, della seguente operazione finanziaria:



Tassazione dei BOT

Dalla $\;-v_0^{\text{tax}}(T) + \dfrac{1}{1+L_0^{\text{netto}}(T)T} = 0\;$ si ottiene:

$$\Rightarrow\; L_0^{\text{netto}}(T) = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{v_0^{\text{tax}}(T)} - 1\right] = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{0.125+0.875v_0(T)} - 1\right]$$

Sostituendo poi $\;v_0(T) = \dfrac{1}{1+L_0(T)T}\;$ si ha infine:

$$\Rightarrow\; L_0^{\text{netto}}(T) = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{0.125+\frac{0.875}{1+L_0(T)T}} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1+L_0(T)T}{0.125+0.125L_0(T)T+0.875} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{1+L_0(T)T-1-0.125L_0(T)T}{1+0.125L_0(T)T} = \frac{0.875L_0(T)}{1+0.125L_0(T)T}$$

$\rightsquigarrow$ $L_0^{\text{netto}}(T)$ si ottiene attualizzando, da T a 0, l'87.5% del rendimento lordo $L_0(T)$ con un tasso di attualizzazione, in regime di interesse semplice, pari al 12.5% di $L_0(T)$

Tassazione dei BOT

- Se il titolo viene acquistato sul mercato secondario in $t > 0$, è ancora possibile calcolare il tasso di rendimento a scadenza, lordo e netto, indicati rispettivamente con $L_t(T)$ e $L_t^{\text{netto}}(T)$, già all'epoca dell'acquisto, anche se potrebbero esserci ulteriori tasse dovute ad eventuali plusvalenze, come vedremo poi.
- Come prima, distinguiamo due situazioni:
  - ▷ Se $v_0(T) \geq 1$, allora

$$L_t^{\text{netto}}(T) = L_t(T) = \frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{v_t(T)} - 1\right]$$

TASSAZIONE DEI BOT

▷ Se invece $v_0(T) < 1$, la tassa sugli interessi anticipati $1 - v_0(T)$ per l'intervallo $[0, T]$ è stata interamente versata allo Stato all'epoca di emissione, per cui ora non c'è più niente da pagare allo Stato. Tuttavia bisogna rifondere al venditore la tassa che lui ha pagato per il periodo $[t, T]$, di competenza di chi compra ora il titolo. Per convenzione, la tassa pagata in 0 viene ripartita proporzionalmente tra le due parti, in base al periodo di possesso.

⇝ Il prezzo pagato in t è quindi pari a

$$v_t^{\text{tax}}(T) \doteq v_t(T) + 0.125\,[1 - v_0(T)]\,\frac{T-t}{T}$$

⇝ Il tasso di rendimento netto a scadenza è il TIR, nel regime dell'interesse semplice, della seguente operazione finanziaria:

$$\begin{array}{ccc} -v_t^{\text{tax}}(T) & & 1 \\ \vdash & \text{———————} & \dashv \\ t & & T \end{array}$$

per cui

$$L_t^{\text{netto}}(T) = \frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{v_t^{\text{tax}}(T)} - 1\right]$$

Tassazione dei BOT

- Ovviamente, se il titolo viene rivenduto sul mercato secondario in $s < T$, non è noto, al momento dell'acquisto, il tasso di rendimento dell'operazione, lordo o netto che sia.
- In particolare, a prescindere da eventuali plusvalenze, il tasso di rendimento netto dell'operazione di acquisto in $t \geq 0$ del BOT di scadenza T, rivenduto in $s < T$, noto soltanto in s, è il TIR della seguente operazione finanziaria:

$-\left[v_t(T) + 0.125\frac{T-t}{T}D^+\right]$	$v_s(T) + 0.125\frac{T-s}{T}D^+$
t	s

$$\text{dove } D^+ = \max\{1 - v_0(T), 0\} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_0(T) \geq 1 \\ 1 - v_0(T) & \text{se } v_0(T) < 1 \end{cases}$$

TASSAZIONE DEI BOT

- Se il BOT viene acquistato dopo l'emissione e/o venduto prima della scadenza potrebbero esserci ulteriori tasse da pagare, sempre al 12.5%, su eventuali plusvalenze, cioè guadagni in conto capitale.
- Naturalmente potrebbero esserci anche delle minusvalenze, cioè perdite in conto capitale.
- Le minusvalenze possono essere accumulate, per un certo numero di anni, e utilizzate (con alcune limitazioni) per compensare, in tutto o in parte, eventuali plusvalenze che si venissero a creare in seguito, in modo da ridurre/eliminare la tassa da pagare su queste ultime.
- Una plusvalenza, quindi, può essere (parzialmente) compensata da eventuali minusvalenze accumulate nel passato.
- Se però ci sono minusvalenze che non vanno a compensare eventuali plusvalenze, non si ha diritto ad alcun rimborso fiscale.

TASSAZIONE DEI BOT

- Vediamo ora come si calcolano le plusvalenze/minusvalenze.
- Supponiamo di acquistare in $t \geq 0$ un BOT di scadenza T, e di tenerlo fino al tempo $s \leq T$; ricordiamo che, per assenza di opportunità di arbitraggio, $v_T(T) = 1$.
- Definiamo la seguente quantità:

$$v_z^*(T) \doteq v_z(T) - \frac{z}{T} D^+, \quad 0 \leq z \leq T$$

- INTERPRETAZIONE:
  Il prezzo $v_z(T)$, rispetto a $v_0(T)$, incorpora anche gli (eventuali) interessi relativi al periodo $[0, z]$; scorporando questi interessi si ottiene una sorta di "nuda proprietà"
  $\rightsquigarrow$ per convenzione, gli interessi scorporati sono proporzionali a quelli di competenza dell'intero periodo $[0, T]$, pari a D^+, con fattore di proporzionalità dato dal quoziente tra le ampiezze dei due intervalli $[0, z]$ e $[0, T]$

TASSAZIONE DEI BOT

- DEFINIZIONE:
  La quantità

$$v_s^*(T) - v_t^*(T) = v_s(T) - v_t(T) - \frac{s-t}{T} D^+$$

costituisce una plusvalenza se è ≥ 0, mentre il suo opposto costituisce una minusvalenza se essa è ≤ 0.

$\leadsto$ Ovviamente le tasse su eventuali plusvalenze (non compensate) vengono versate allo Stato all'epoca s

$\leadsto$ Nel caso particolare in cui $t = 0$, $s = T$ e $v_0(T) \leq 1$ non ci sono né plusvalenze né minusvalenze in quanto

$$\begin{aligned} v_T^*(T) - v_0^*(T) &= v_T(T) - v_0(T) - \frac{T}{T}(1 - v_0(T)) \\ &= 1 - v_0(T) - 1 + v_0(T) = 0 \end{aligned}$$

Coupon Bonds

- Consideriamo un'obbligazione con cedola fissa ($\rightsquigarrow$ coupon bond) e, per comodità, visto che lavoriamo con leggi omogenee d'importo (che, fra l'altro, è una condizione necessaria per l'assenza di opportunità di arbitraggio), supponiamo che il suo valore nominale (o valore facciale $\rightsquigarrow$ face value), sia unitario.
- Il tasso che viene dichiarato si chiama tasso nominale ed è in effetti un tasso nominale convertibile k volte l'anno, ovvero j_k, con la notazione introdotta all'inizio.
- Se il pagamento cedolare avviene con periodicità annua, cioè $k = 1$, allora la cedola è proprio pari a $j_1 \cdot 1 = j_1$, altrimenti, se $k > 1$, ogni cedola d'interesse è pari a $i_k = j_k/k$.
- Il tasso i_k si chiama anche tasso cedolare, ed è riferito ad un periodo di ampiezza $1/k$ d'anno.

Coupon Bonds

- Ad es. per i BTP (Buoni del Tesoro Poliennali), che hanno scadenze medio-lunghe (fino a 50 anni), la cedola è semestrale ($\rightsquigarrow k = 2$); vengono emessi, a seconda della scadenza, a metà mese o a fine mese, con valore nominale multiplo di 1000 Euro.
- Indichiamo con B_0 il prezzo in 0, epoca di emissione, del titolo (sottintendendo la scadenza T e la periodicità dei pagamenti k) e con i_C la cedola, ovvero il tasso cedolare visto che abbiamo supposto che il valore nominale sia unitario.
- Quindi $B_0 <,=,> 1$ a seconda che il titolo sia emesso sotto la pari, alla pari o sopra la pari.
- Se $B_0 < 1$, $1 - B_0$ si chiama premio, o disaggio, di emissione; se $B_0 > 1$, $B_0 - 1$ si chiama aggio di emissione.

Coupon Bonds

- In $T_1 = \frac{1}{k}, T_2 = \frac{2}{k}, \ldots, T_n = T = \frac{kT}{k}$ viene pagata la cedola i_C e in T viene rimborsato anche il valore nominale 1.
- Se venisse rimborsato un valore diverso dal valore nominale, abbiamo già osservato a suo tempo che, aggiustando il tasso i_C, ci si può ricondurre alla situazione di rimborso alla pari.
- Se infatti viene rimborsato $\tilde{c} \neq 1$, basta considerare come tasso cedolare $i_C/\tilde{c}$ anziché i_C, così il prodotto tra nuovo tasso e valore di rimborso $\tilde{c}$ dà proprio i_C $\rightsquigarrow$ $\frac{i_C}{\tilde{c}}\tilde{c} = i_C$
- Quindi, chi compra il titolo in 0 e lo tiene fino alla scadenza fa la seguente operazione finanziaria:

$-B_0$	i_C	i_C	$\ldots$	$i_C + 1$
0	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\ldots$	T

Coupon Bonds

- Il prezzo del titolo è quotato su base 100, cioè per ogni 100 Euro di valore nominale, e si chiama corso.
- In realtà la quotazione si ha per il cosiddetto corso secco, in cui non è incluso il rateo d'interesse maturato.
- Se l'acquisto del titolo ha luogo in $t > 0$ non coincidente con una data di pagamento cedole, bisogna pagare anche tale rateo, ovvero il corso tel-quel pari a corso secco + rateo.
- Vediamo ora come si calcola il rateo.
- L'interesse per un periodo di ampiezza $1/k$ è pari a i_C; se l'ampiezza è diversa da $1/k$, per convenzione l'interesse viene calcolato proporzionalmente, come nel regime dell'interesse semplice.
- Precisamente, se si compra il titolo in $t : \frac{h}{k} \leq t < \frac{h+1}{k}$ (se $t = \frac{h}{k}$ si assume che la cedola ivi dovuta sia già stata pagata), in $\frac{h+1}{k}$ si percepisce l'interesse i_C , relativo all'intero periodo $[\frac{h}{k}, \frac{h+1}{k}]$, mentre spetterebbe soltanto quello relativo al periodo $[t, \frac{h+1}{k}]$.

COUPON BONDS

- Visto che il corso secco non include gli interessi maturati, oltre ad esso bisogna pagare gli interessi di competenza del periodo $[\frac{h}{k}, t]$, che sono valutati proporzionalmente.
- Il rateo è quindi pari a

$$
\begin{aligned}
A_t &= i_C \frac{t - \frac{h}{k}}{\frac{h+1}{k} - \frac{h}{k}} \\
&= i_C(k \cdot t - h) = \text{tasso cedolare} \times \text{tempo misurato in k-esimi d'anno} \\
&= (k \cdot i_C)\left(t - \frac{h}{k}\right) = \text{tasso nominale} \times \text{tempo misurato in anni}
\end{aligned}
$$

$$\rightsquigarrow \quad B_t^{\text{tel-quel}} = B_t^{\text{secco}} + A_t$$

COUPON BONDS

- ESEMPIO: Quotazioni al 13 novembre 2020.
  Supponiamo di acquistare un BTP per un valore nominale di 3000€ e un altro per 5000€.
  - ▷ Il primo scade il 1 novembre 2023 (è stato emesso il 1 novembre 1993 $\rightsquigarrow$ durata 30 anni).
    Il tasso nominale è 9%, quello cedolare 4.5%.
    La quotazione (corso secco su base 100) è pari a 127.58.
    Le cedole sono pagabili il 1 maggio e il 1 novembre.
  - ▷ Il secondo scade il 1 agosto 2034 (è stato emesso il 1 agosto 2003 $\rightsquigarrow$ durata 31 anni).
    Il tasso nominale è 5% e quello cedolare 2.5%.
    La quotazione è 152.27.
    Le cedole sono pagabili il 1 febbraio e il 1 agosto.
- Vediamo quanto bisogna pagare.
- Per i BTP la convenzione per il calcolo dei giorni è ACT/ACT.

Coupon Bonds

- **I titolo**: La prossima cedola è pagabile il 1 maggio 2021
  Essa è pari a $3000 \cdot 0.045$ (valore nominale $\cdot$ tasso cedolare) $= 135$
  n. giorni dal 1 novembre 2020 al 13 novembre 2020: 12
  n. giorni del semestre 1-11-2020/1-5-2021: 181
  Rateo: $A_t = 135 \cdot \frac{12}{181} = 8.95$
  Il prezzo secco è $3000 \cdot \frac{127.58}{100} = 3827.40$
  Il prezzo tel-quel è $3827.40 + 8.95 = 3836.35$
- **II titolo**: La prossima cedola è pagabile il 1 febbraio 2021
  Essa è pari a $5000 \cdot 0.025$ (valore nominale $\cdot$ tasso cedolare) $= 125$
  n. giorni dal 1 agosto 2020 al 13 novembre 2020: 104
  n. giorni del semestre 1-8-2020/1-2-2021: 184
  Rateo: $A_t = 125 \cdot \frac{104}{184} = 70.65$
  Il prezzo secco è $5000 \cdot \frac{152.27}{100} = 7613.50$
  Il prezzo tel-quel è $7613.50 + 70.65 = 7684.15$

Coupon Bonds

- Se l'acquisto avviene in $t : \frac{h}{k} \leq t < \frac{h+1}{k}$ e il titolo è tenuto fino alla scadenza T, si definisce tasso di rendimento a scadenza ($\rightsquigarrow$ yield to maturity) il TIR della seguente operazione (sempre con riferimento a valore nominale unitario, tanto il TIR non cambia):

$$
\begin{array}{ccccc}
-B_t^{\text{tel-quel}} & i_C & i_C & \ldots & i_C + 1 \\
\hline
t & \frac{h+1}{k} & \frac{h+2}{k} & \ldots & T
\end{array}
$$

- Se invece il titolo viene venduto prima della scadenza, l'operazione è aleatoria in quanto, al momento dell'acquisto, non è noto il prezzo di vendita.
- Per i BTP, che hanno scadenze superiori all'anno, si usa il regime dell'interesse composto, e si fornisce il tasso i, oppure l'intensità δ, interni di rendimento.

Coupon Bonds

- Consideriamo un coupon bond e, per semplicità, supponiamo che le cedole siano annue, per cui tasso cedolare e tasso nominale sono coincidenti.
- La definizione di prezzo alla pari, sopra la pari e sotto la pari in realtà fa riferimento al corso secco per cui, ancora per semplicità, immaginiamo di metterci in una data j di pagamento cedole (subito dopo il pagamento stesso)
  $\rightsquigarrow$ il rateo A_j è nullo
  $\rightsquigarrow$ il corso secco e il corso tel-quel sono coincidenti
- Indichiamo semplicemente con B_j il prezzo del titolo e rappresentiamo l'operazione di acquisto dello stesso, tenuto fino a scadenza, che ora chiamiamo n ($\rightsquigarrow$ numero totale di cedole):

$$\begin{array}{ccccc} -B_j & i_C & i_C & \ldots & i_C+1 \\ \hline j & j+1 & j+2 & \ldots & n \end{array}$$

COUPON BONDS

- Sappiamo che condizione sufficiente per l'esistenza di un TIR strettamente positivo è $(n-j)i_C + 1 > B_j$; quindi B_j potrebbe anche essere > 1 (cioè il titolo quotato sopra la pari), ma non eccessivamente grande, e di solito questo vincolo è rispettato empiricamente, almeno per scadenze non brevissime.
- Abbiamo anche visto, negli ammortamenti a interessi posticipati, che la valutazione degli impegni residui al tasso di remunerazione i fornisce il debito residuo Q_j, anzi che

$$V_j \underset{<}{\overset{>}{=}} Q_j \quad \Leftrightarrow \quad i_* \underset{>}{\overset{<}{=}} i$$

- Nel nostro contesto $V_j = B_j$, $Q_j = 1$, $i = i_C$, $i_* =$TIR, per cui, se consideriamo in particolare la prima implicazione, si ha:

$$B_j \underset{<}{\overset{>}{=}} 1 \quad \Rightarrow \quad \text{TIR} \underset{>}{\overset{<}{=}} i_C$$

Coupon Bonds

- Quindi se un titolo è quotato sotto la pari il suo tasso di rendimento a scadenza è maggiore del tasso cedolare (o nominale, visto che nel nostro caso coincidono), viceversa se quotato sopra la pari.
- Se però le cedole fossero pagabili k volte all'anno, questo confronto non andrebbe fatto tra il tasso di rendimento a scadenza, TIR, che è sempre espresso su base annua, e il tasso nominale $k \cdot i_{\mathrm{C}}$, bensì tra
  - ▷ il tasso cedolare i_{C} e il tasso riferito al k-esimo d'anno equivalente al TIR nel regime dell'interesse composto, $\mathrm{TIR}_k = (1+\mathrm{TIR})^{1/k} - 1$,

  oppure tra
  - ▷ il TIR e il tasso annuo equivalente ad i_{C} nel regime dell'interesse composto, $(1+i_{\mathrm{C}})^k - 1$ ($\neq k \cdot i_{\mathrm{C}}$ se $k > 1$).

Coupon Bonds

- Torniamo, per semplicità, al caso di cedole annue.
- E' ovvio che, a parità di tutto il resto, il TIR aumenta con il tasso cedolare i_C e diminuisce con il prezzo B_j.
- Inoltre sappiamo già che, se il titolo quota alla pari, il TIR non cambia al variare del numero di cedole n; infatti esso è $= i_C \;\; \forall\, n$.
- Si può dimostrare (facendo un po' di conti) che invece
  - ▷ se il titolo è quotato sotto la pari (cioè TIR$> i_C$), allora il TIR diminuisce con n;
  - ▷ viceversa, se quotato sopra la pari (TIR$< i_C$), esso aumenta con n.
- Tutto ciò è piuttosto intuitivo: se sotto la pari, la differenza $1 - B_j$ costituisce un rendimento aggiuntivo rispetto a quello cedolare, che va "spalmato" su tutta la durata residua, per cui ha un impatto più forte se tale durata, $n - j$, è piccola; viceversa, se il titolo è quotato sopra la pari, la differenza $B_j - 1$ va a decurtare il rendimento cedolare, in misura tanto più forte quanto minore è la durata contrattuale.

COUPON BONDS

- Infine, se $n \to +\infty$, il Valore Attuale Netto dell'operazione finanziaria di acquisto del coupon bond, con un tasso di attualizzazione, i_*, strettamente positivo, ha come limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left[-B_j + i_C \, a_{n-j \rceil i_*} + (1+i_*)^{-(n-j)} \right] = -B_j + \frac{i_C}{i_*}$$

Essendo il TIR, per definizione, quel tasso di attualizzazione i_* che annulla il VAN, si ha (asintoticamente):

$$-B_j + \frac{i_C}{\text{TIR}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{i_C}{\text{TIR}} = B_j \;\Rightarrow\; \text{TIR} = \frac{i_C}{B_j}$$

Tassazione dei BTP

- In quanto segue descriviamo le modalità di tassazione dei BTP, che si applicano anche alle obbligazioni societarie di tipo coupon bond, con l'unica differenza che per esse l'aliquota di tassazione è pari al 26% anziché al 12.5%.
- Le cedole vengono tassate al 12.5%, per cui in realtà non si riceve i_C bensì $i_C \cdot 0.875$
  - ⇝ Anche l'eventuale rateo che si deve pagare in caso di acquisto in $t > 0$ dev'essere al netto delle tasse, per cui si paga soltanto

$$A_t^{\text{netto}} = 0.875 A_t$$

- Alla scadenza T chi possiede il titolo
  - ▷ deve pagare un'ulteriore tassa, al 12.5%, sulla differenza $1 - B_0$, se > 0, cioè se il titolo è stato emesso sotto la pari
    - ⇝ La differenza $1 - B_0 (> 0)$ viene quindi considerata un interesse, che si aggiunge a quello cedolare
  - ▷ se invece $B_0 \geq 1$ e il titolo è stato acquistato in 0, la differenza $B_0 - 1$ entra nel computo delle minusvalenze.

Tassazione dei BTP

- Se il titolo viene acquistato in $t > 0$ e tenuto fino a scadenza, il possessore deve comunque pagare per intero allo Stato l'eventuale tassa su $1 - B_0$ (se > 0), anche se non sarebbe di sua competenza quella relativa al periodo $[0, t]$.
- Per questo motivo la tassa sull'intero intervallo $[0, T]$ viene ripartita proporzionalmente tra le due parti, in base al periodo di possesso, e il compratore recupera anticipatamente la parte di tassa non di sua competenza pagando

$$B_t^{\text{secco, tax}} = B_t^{\text{secco}} - 0.125\,\frac{t}{T}\,I^+$$

$$\text{dove } \; I^+ = \max\{1 - B_0, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \; B_0 \geq 1 \\ 1 - B_0 & \text{se } \; B_0 < 1 \end{cases}$$

$\leadsto$ Il prezzo totale che viene pagato, rateo incluso, sarà quindi

$$B_t^{\text{tel-quel, tax}} = B_t^{\text{secco, tax}} + A_t^{\text{netto}}$$

TASSAZIONE DEI BTP

- A prescindere da eventuali plusvalenze/minusvalenze, note solo a posteriori, si può quindi definire già in t il tasso netto di rendimento a scadenza del titolo; si tratta infatti del TIR della seguente operazione finanziaria:

$$\begin{array}{ccccc} -B_t^{\text{tel-quel, netto}} & i_C \cdot 0.875 & i_C \cdot 0.875 & \ldots & i_C \cdot 0.875 + 1 - 0.125 I^+ \\ \hline t & \frac{h+1}{k} & \frac{h+2}{k} & \ldots & T \end{array}$$

  dove $\frac{h}{k} \leq t < \frac{h+1}{k}$, e ovviamente $k = 2$ nel caso dei BTP.

- Se invece il titolo viene venduto prima della scadenza, in $s < T$, non è noto al momento dell'acquisto il prezzo di vendita $B_s^{\text{tel-quel, netto}}$, e quindi nemmeno il tasso di rendimento a scadenza; in tal caso allo Stato verranno pagate soltanto le tasse su eventuali plusvalenze ma non sulla differenza $1 - B_0$.

TASSAZIONE DEI BTP

- Vediamo ora come si calcolano le plusvalenze/minusvalenze.
- Supponiamo di acquistare in $t \geq 0$ un BTP di scadenza T, e di tenerlo fino al tempo $s \leq T$.
- Definiamo la seguente quantità:

$$B_z^* \doteq B_z^{\text{secco}} - \frac{z}{T} I^+, \quad 0 \leq z \leq T$$

- INTERPRETAZIONE:
Dal prezzo B_z^{secco}, che già non include la cedola in corso di maturazione, viene scorporato anche l'eventuale ulteriore interesse $I^+ = \max\{1 - B_0, 0\}$, proporzionalmente all'ampiezza del periodo intercorso dall'emissione del titolo, in modo da ottenere, come nel caso dei BOT, una sorta di "nuda proprietà".

TASSAZIONE DEI BTP

- DEFINIZIONE:
  La quantità

$$B_s^* - B_t^* = B_s^{\text{secco}} - B_t^{\text{secco}} - \frac{s-t}{T} I^+$$

  costituisce una plusvalenza se è ≥ 0, mentre il suo opposto costituisce una minusvalenza se essa è ≤ 0.
  $\rightsquigarrow$ Ovviamente le tasse su eventuali plusvalenze (non compensate) vengono versate allo Stato all'epoca s
- Nel caso particolare in cui $t = 0$ e $s = T$, $B_T^{\text{secco}} = 1$ e $B_0^{\text{secco}} = B_0$:
  - $\triangleright$ se $B_0 \leq 1$ non ci sono né plusvalenze né minusvalenze in quanto $B_T^* - B_0^* = 1 - B_0 - (1 - B_0) = 0$;
  - $\triangleright$ se invece $B_0 > 1$, si ha $B_T^* - B_0^* = 1 - B_0 < 0$, per cui la quantità $B_0 - 1$ rappresenta una minusvalenza.

RISCHIO DI CREDITO

- Finora abbiamo supposto che i pagamenti promessi da un titolo obbligazionario fossero certi.
- In realtà c'è sempre la possibilità che l'emittente non riesca a far fronte, in tutto o in parte, ai propri impegni $\rightsquigarrow$ rischio di credito, o di insolvenza, o di default
- Il rendimento a scadenza, ovviamente, risente di questo rischio, ed è tanto più alto quanto più alto è il rischio, a parità di cedole "promesse"; in particolare, può essere ottenuto come somma di due componenti: prezzo del tempo + premio per il rischio.
- Ovviamente il prezzo del titolo, che nasce dall'incontro tra domanda e offerta, si muove in direzione opposta: tanto più basso è il prezzo quanto più alto è il rischio.

RISCHIO DI CREDITO

- In qualche modo, chi compra un titolo di un emittente soggetto a rischio di credito è compensato dalla promessa di un rendimento a scadenza maggiore rispetto a quello di un titolo "sicuro", perché in caso di insolvenza del debitore potrebbe non incassare (interamente) quanto promesso.
- Si parla di tasso di rendimento a scadenza, cioè di un TIR, e non di tasso nominale (o cedolare): infatti il titolo potrebbe anche avere lo stesso tasso nominale di un altro giudicato "sicuro", perchè magari emesso tanto tempo prima, in cui anch'esso era considerato "sicuro", ma poi le cose sono cambiate e di conseguenza il valore del titolo è sceso.
- Nel passato si riteneva che solo i titoli emessi dalle società fossero soggetti a rischio di credito, non quelli governativi (salvo rare eccezioni), ma ora non è più così.

RISCHIO DI CREDITO

- Misure “qualitative” del rischio di credito sono fornite dalle agenzie di rating (ad es. Standard & Poor’s, Moody’s, Fitch) tramite delle sigle, ad es. AAA, . . . , per poi scendere a D (default), che vengono date anche agli Stati.
- Una misura quantitativa del rischio di credito è fornita invece dallo spread, cioè dal differenziale di rendimento a scadenza tra un titolo soggetto a rischio di credito ed un altro ritenuto sicuro, con caratteristiche analoghe in quanto a scadenza etc. (ad es. il differenziale tra il rendimento dei BTP decennali e i BUND tedeschi decennali, cioè il famoso spread di cui si sente parlare tutti i giorni).

VALORE DI UNA RENDITA

- Supponiamo di trovarci all'epoca 0 e di avere un titolo (ad es. un'obbligazione), oppure un portafoglio di titoli, che alle future date (ordinate) $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ci pagherà gli importi $R_1, R_2, \ldots, R_n$, tutti > 0:

$$\begin{array}{ccccc} & R_1 & R_2 & \ldots & R_n \\ \vdash & \!\!\text{---}\!+\!\text{---}\!\! & \!\!\text{---}\!+\!\text{---}\!\! & \!\!\text{---}\!+\!\text{---}\!\! & \dashv \\ 0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{array}$$

  cioè una rendita (anche se le scadenze non sono necessariamente equidistanziate).

- Vogliamo valutare questa obbligazione (o questo portafoglio di obbligazioni) in 0, che non è necessariamente l'epoca di emissione della stessa (o quella di acquisizione del portafoglio)
  $\rightsquigarrow$ l'obbligazione può essere vecchia, ma quello che è avvenuto in passato non conta più in quanto si guarda solo avanti, prospettivamente, ai crediti futuri

VALORE DI UNA RENDITA

- Abbiamo visto che, per coerenza, ogni rata R_j andrebbe scontata col tasso corrispondente alla scadenza T_j, cioè, mettendoci nell'ambito del regime dell'interesse composto, con $i_0(T_j)$ o $\delta_0(T_j)$.
- Supponiamo che la struttura per scadenza dei tassi a pronti sia piatta, per cui tassi (o intensità) sono costanti, e li chiameremo semplicemente i (o δ).
- OSSERVAZIONE:
  Anche se la struttura non fosse piatta si potrebbe decidere, per semplicità, di scontare gli importi futuri con un tasso pari, ad es., all'yield to maturity di obbligazioni quotate sul mercato aventi scadenza e periodicità dei pagamenti residui, nonché ordine di grandezza delle rate, "simili" a quelli della rendita (obbligazione) che si vuol valutare.

VALORE DI UNA RENDITA

- Dunque, con un abuso di notazione, rappresentiamo tale valore in funzione del tasso di attualizzazione e, per comodità (almeno in un primo momento) anziché il tasso i usiamo l'intensità δ:

$$V(\delta) = \sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}$$

- Calcoliamone derivata I e derivata II:

$$V'(\delta) = \sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}(-T_j) = -\sum_{j=1}^{n} T_j R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j} < 0$$

$$V''(\delta) = -\sum_{j=1}^{n} T_j R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}(-T_j) = \sum_{j=1}^{n} T_j^2 R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j} > 0$$

$\rightsquigarrow$ La funzione V è decrescente e convessa

$\rightsquigarrow$ Se aumenta l'intensità di attualizzazione diminuisce il prezzo (o viceversa), ma diminuisce di più (cioè più bruscamente) per valori bassi di δ

DURATION DI UNA RENDITA

- Ci preoccupiamo di quello che può succedere del valore della nostra obbligazione se cambia improvvisamente il tasso di mercato, cioè δ.
- Sappiamo che $\Delta V \doteq V(\delta+\Delta\delta) - V(\delta)$ ha segno opposto rispetto a $\Delta\delta$.
- Definiamo ora le seguenti quantità:

$$\$D \doteq -V'(\delta) \qquad \text{dollar duration}$$

$$D \doteq \frac{\$D}{V(\delta)} = -\frac{\mathrm{d}\ln V(\delta)}{\mathrm{d}\delta} \qquad \text{duration di Macaulay}$$

DURATION DI UNA RENDITA

- SIGNIFICATO:
  Approssimando linearmente la funzione V in un intorno di δ si ottiene:
  $$V(\delta+\Delta\delta) \simeq V(\delta) + V'(\delta)\Delta\delta$$
  ovvero, portando $V(\delta)$ a I membro:
  $$\Delta V \simeq -\$D \cdot \Delta\delta$$
  ⇝ La variazione di prezzo, in termini monetari, conseguente ad una variazione di tasso, è di segno opposto e si ottiene, approssimativamente (cioè se la variazione di tasso è "sufficientemente piccola"), moltiplicando la stessa per $\$D$

  ⇝ Tanto maggiore è la dollar duration, tanto maggiore sarà la variazione di prezzo (presa in valore assoluto) a parità di variazione di tasso

  ⇝ Il prezzo è tanto più sensibile al tasso quanto maggiore è la sua dollar duration

DURATION DI UNA RENDITA

- Quindi la dollar duration è una misura di sensibilità del prezzo a variazioni di tasso, in termini monetari.
- Similmente, se dividiamo tutto per $V(\delta)$ otteniamo:

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq -D \cdot \Delta\delta$$

$\rightsquigarrow$ Anche la duration è una misura di sensibilità del prezzo a variazioni di tasso, ma stavolta in termini relativi

Convexity di una rendita

- L'approssimazione di ΔV (e di $\Delta V/V$) migliora se, anziché l'approssimante lineare, si usa il polinomio di Taylor di grado 2:

$$V(\delta+\Delta\delta) \simeq V(\delta) + V'(\delta)\Delta\delta + \frac{1}{2}V''(\delta)(\Delta\delta)^2$$

- Definiamo:

$$\$C \doteq V''(\delta) \qquad \text{dollar convexity}$$

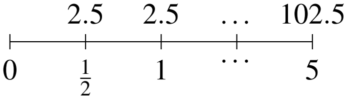
$$C \doteq \frac{\$C}{V(\delta)} = \frac{V''(\delta)}{V(\delta)} \qquad \text{convexity}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V \simeq -\$D \cdot \Delta\delta + \frac{1}{2}\$C \cdot (\Delta\delta)^2 \quad \text{variazione monetaria di prezzo}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} \simeq -D \cdot \Delta\delta + \frac{1}{2}C \cdot (\Delta\delta)^2 \quad \text{variazione relativa di prezzo}$$

ESEMPIO SULL'UTILIZZO DI DURATION E CONVEXITY

- Consideriamo un coupon bond di valore nominale 100 Euro, che paga cedole semestrali al tasso cedolare del 2.5%, con scadenza fra 5 anni:



- Fissiamo $\delta = 8\% \rightsquigarrow V(\delta) \simeq 87.23 \rightsquigarrow D \simeq 4.44 \rightsquigarrow C \simeq 21.23$
- Nella tabella che segue riportiamo le variazioni di valore del coupon bond, sia monetarie che percentuali, dovute a variazioni dell'intensità di valutazione δ, ottenute
  - ▷ facendo il calcolo esatto: ΔV e $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)\%$,
  - ▷ tramite approssimazione lineare ($\rightsquigarrow$ duration): $\mathrm{L}(\Delta V)$ e $\mathrm{L}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)\%$,
  - ▷ tramite polinomio di Taylor di grado 2 ($\rightsquigarrow$ duration e convexity): $\mathrm{T}(\Delta V)$ e $\mathrm{T}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)\%$.

ESEMPIO SULL'UTILIZZO DI DURATION E CONVEXITY

$(\Delta\delta)\%$	ΔV	$\mathrm{L}(\Delta V)$	$\mathrm{T}(\Delta V)$	$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)\%$	$\mathrm{L}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)\%$	$\mathrm{T}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)\%$
−3.0	+12.50	+11.62	+12.45	+14.33	+13.32	+14.28
−2.0	+8.13	+7.75	+8.12	+9.32	+8.88	+9.31
−1.0	+3.97	+3.87	+3.97	+4.55	+4.44	+4.55
−0.8	+3.16	+3.10	+3.16	+3.62	+3.55	+3.62
−0.6	+2.36	+2.32	+2.36	+2.70	+2.66	+2.70
−0.4	+1.56	+1.55	+1.56	+1.79	+1.78	+1.79
−0.2	+0.78	+0.77	+0.78	+0.89	+0.89	+0.89
+0.2	−0.77	−0.77	−0.77	−0.88	−0.89	−0.88
+0.4	−1.53	−1.55	−1.53	−1.76	−1.78	−1.76
+0.6	−2.29	−2.32	−2.29	−2.63	−2.66	−2.63
+0.8	−3.04	−3.10	−3.04	−3.49	−3.55	−3.48
+1.0	−3.78	−3.87	−3.78	−4.34	−4.44	−4.33
+2.0	−7.39	−7.75	−7.38	−8.47	−8.88	−8.46
+3.0	−10.83	−11.62	−10.79	−12.41	−13.32	−12.37

ESEMPIO SULL'UTILIZZO DI DURATION E CONVEXITY

- Osservando i valori esatti (colonne ΔV e $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)\%$) notiamo che una variazione diminutiva dell'intensità δ porta a una variazione di prezzo (in aumento) maggiore della diminuzione di prezzo corrispondente ad una variazione in aumento di δ della stessa quantità $\rightsquigarrow$ questo è dovuto alla convessità della funzione V
- L'approssimazione con il polinomio di Taylor di grado 2 è molto buona, se non addirittura ottima, a parte i casi limite in cui la variazione di δ è davvero molto grande.
- L'approssimazione lineare, che ovviamente non coglie l'aspetto dovuto alla convessità ($\rightsquigarrow$ infatti le variazioni di prezzo sono identiche quando il tasso aumenta o diminuisce nella stessa misura) è buona solo per valori piccoli di $\Delta\delta$.

CONVEXITY DI MACAULAY

- Di solito la dollar convexity e la convexity vengono definite in maniera diversa rispetto a quanto visto; precisamente, indicando queste quantità con $\$\tilde{C}$ e, rispettivamente, $\tilde{C}$, allo scopo di distinguerle dalle nostre, si pone:

$$\$\tilde{C} \doteq \sum_{j=1}^{n} \left(T_j^2 + T_j\right) R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}$$

$$\rightsquigarrow \quad \$\tilde{C} = \sum_{j=1}^{n} T_j^2 R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j} + \sum_{j=1}^{n} T_j R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j} = \$C + \$D$$

$$\tilde{C} \doteq \frac{\$\tilde{C}}{V(\delta)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{C} = \frac{\$C + \$D}{V(\delta)} = \frac{\$C}{V(\delta)} + \frac{\$D}{V(\delta)} = C + D$$

- $\tilde{C}$ si chiama anche convexity di Macaulay.

DURATION MODIFICATA

- Spesso il valore della rendita viene definito in funzione del tasso di valutazione i anziché dell'intensità δ:

$$\tilde{V}(i) = \sum_{j=1}^{n} R_j (1+i)^{-T_j}$$

$$\tilde{V}'(i) = \sum_{j=1}^{n} R_j (-T_j)(1+i)^{-T_j-1} = -\frac{1}{1+i} \sum_{j=1}^{n} T_j R_j (1+i)^{-T_j}$$

- Essendo $e^{\delta} = 1+i \rightsquigarrow \tilde{V}'(i) = -\frac{\$D}{1+i}$
- La quantità $\frac{\$D}{1+i}$ viene anche chiamata dollar duration modificata e indicata col simbolo $\$D_{\mathrm{mod}}$.

DURATION MODIFICATA

- Approssimando linearmente $\Delta\tilde{V}$ si ha quindi:

$$\Delta\tilde{V} \simeq -\$D_{\mathrm{mod}}\Delta i$$

- Infine, dividendo entrambi i membri per $\tilde{V}(i)(=V(\delta))$, si ottiene:

$$\frac{\Delta\tilde{V}}{\tilde{V}} \simeq -D_{\mathrm{mod}}\Delta i$$

dove $D_{\mathrm{mod}} = \frac{\$D_{\mathrm{mod}}}{\tilde{V}(i)} = \frac{D}{1+i}$ è la duration modificata.

CONVEXITY MODIFICATA

- Anche qui si può migliorare l'approssimazione con il polinomio di Taylor di grado 2; calcoliamo allora la derivata seconda di $\tilde{V}$:

$$\begin{aligned}\tilde{V}''(i) &= -\sum_{j=1}^{n} R_j T_j(-T_j-1)(1+i)^{-T_j-2} \\ &= \frac{1}{(1+i)^2}\sum_{j=1}^{n}\left(T_j^2+T_j\right)R_j(1+i)^{-T_j} = \frac{\$\tilde{C}}{(1+i)^2}\end{aligned}$$

- La quantità $\frac{\$\tilde{C}}{(1+i)^2}$ viene anche chiamata dollar convexity modificata e indicata col simbolo $\$C_{\text{mod}}$

$$\rightsquigarrow \quad \Delta\tilde{V} \simeq -\$D_{\text{mod}}\Delta i + \frac{1}{2}\$C_{\text{mod}}(\Delta i)^2$$

- Infine, dividendo entrambi i membri per $\tilde{V}(i)$, si ottiene:

$$\frac{\Delta\tilde{V}}{\tilde{V}} \simeq -D_{\text{mod}}\Delta i + \frac{1}{2}C_{\text{mod}}(\Delta i)^2$$

dove $C_{\text{mod}} = \frac{\$C_{\text{mod}}}{\tilde{V}(i)} = \frac{\$\tilde{C}}{(1+i)^2\tilde{V}(i)} = \frac{C+D}{(1+i)^2}$ è la convexity modificata.

Proprietà della duration

- Torniamo al caso standard della duration di Macaulay data, come abbiamo visto, da

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{V(\delta)} = \sum_{j=1}^{n} T_j \frac{R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{V(\delta)} = \sum_{j=1}^{n} T_j w_j$$

dove

$$w_j = \frac{R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{V(\delta)} = \frac{R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{\sum_{h=1}^{n} R_h \mathrm{e}^{-\delta T_h}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

sono dei pesi, tutti > 0 e di somma 1, per cui la duration è una media delle scadenze T_j pesata con i rapporti tra valore attuale della rata dovuta in T_j e valore attuale dell'intera rendita.

- Pertanto D si chiama anche durata media finanziaria e, come media, gode di alcune importanti proprietà.

PROPRIETÀ DELLA DURATION

1) $T_1 \leq D \leq T_n$

$\rightsquigarrow$ Trattandosi di una media interna, la duration è compresa tra la minima e la massima scadenza

2) La duration di uno zero-coupon bond di scadenza T è pari a T

$\rightsquigarrow$ Si tratta della media di un solo numero

3) Se si moltiplicano tutte le rate R_j per la stessa costante $K > 0$ la duration non cambia; infatti i pesi delle scadenze T_j rimangono gli stessi, e se non cambiano i pesi non cambia neanche la media:

$$\frac{(KR_j)\mathrm{e}^{-\delta T_j}}{\sum_{h=1}^{n}(KR_h)\mathrm{e}^{-\delta T_h}} = \frac{KR_j\mathrm{e}^{-\delta T_j}}{K\sum_{h=1}^{n}R_h\mathrm{e}^{-\delta T_h}} = \frac{R_j\mathrm{e}^{-\delta T_j}}{\sum_{h=1}^{n}R_h\mathrm{e}^{-\delta T_h}} = w_j$$

Proprietà della duration

4) Se si spostano in avanti tutte le date T_j di una stessa quantità $\tau > 0$ allora anche la duration aumenta di τ; infatti i pesi delle nuove scadenze $T_j + \tau$ rimangono gli stessi di prima:

$$\frac{R_j e^{-\delta(T_j+\tau)}}{\sum_{h=1}^n R_h e^{-\delta(T_h+\tau)}} = \frac{e^{-\delta\tau} R_j e^{-\delta T_j}}{e^{-\delta\tau}\sum_{h=1}^n R_h e^{-\delta T_h}} = \frac{R_j e^{-\delta T_j}}{\sum_{h=1}^n R_h e^{-\delta T_h}} = w_j$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{j=1}^n (T_j+\tau)w_j = \sum_{j=1}^n T_j w_j + \tau \sum_{j=1}^n w_j = D + \tau$$

Lo stesso discorso vale se si spostano indietro tutte le date della stessa quantità $\tau > 0$ (purché $T_1 - \tau > 0$), e cioè anche la duration si accorcia di τ.

Proprietà della duration

5) Duration di un portafoglio:
Consideriamo due rendite (o obbligazioni) e "allunghiamole" sullo scadenzario comune, come abbiamo fatto all'inizio, prima di definire la somma tra operazioni finanziarie
   - $\rightsquigarrow$ Visto che abbiamo preso l'unione delle date di pagamento delle due rendite, ammettiamo che qualche rata possa essere nulla
   - $\rightsquigarrow$ Non cambia niente nelle definizioni precedenti, di duration e convexity, perché è come se quelle rate non ci fossero e le relative scadenze hanno peso 0

   La prima rendita abbia valore V^A, la seconda V^B, e indichiamo con D^A, D^B le rispettive duration e R_j^A, R_j^B, $j = 1, 2, \dots, n$, le rispettive rate.

PROPRIETÀ DELLA DURATION

"Sommiamo" le due rendite ottenendo un portafoglio di valore $V^A + V^B$ e duration D^{A+B}:

$$\rightsquigarrow \quad D^{A+B} = \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j (R_j^A + R_j^B) \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{V^A + V^B}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j R_j^A \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{V^A} \cdot \frac{V^A}{V^A + V^B} + \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j R_j^B \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{V^B} \cdot \frac{V^B}{V^A + V^B}$$

$$= D^A \cdot \frac{V^A}{V^A + V^B} + D^B \cdot \frac{V^B}{V^A + V^B}$$

- $\rightsquigarrow$ La duration di un portafoglio è una media pesata delle duration delle singole componenti, con pesi il loro valore percentuale sul totale del portafoglio
- $\rightsquigarrow$ In particolare, se $V^A = V^B$, allora $D^{A+B} = \frac{D^A + D^B}{2}$

PROPRIETÀ DELLA DURATION

Similmente, e questo è molto importante per le applicazioni che vedremo in seguito, se si compra una quantità $x > 0$ della prima rendita (cioè si moltiplicano tutte le rate per x), sappiamo che la sua duration non cambia ma cambia il suo valore attuale, che risulta moltiplicato per x; idem se si compra una quantità $y > 0$ della seconda rendita

⇝ La duration complessiva del portafoglio di rate $xR_j^A + yR_j^B$, $j = 1, 2, \dots, n$, sarà (con ovvio significato dei simboli):

$$\begin{aligned} D^{xA+yB} &= D^{xA} \cdot \frac{xV^A}{xV^A + yV^B} + D^{yB} \cdot \frac{yV^B}{xV^A + yV^B} \\ &= D^A \cdot \frac{xV^A}{xV^A + yV^B} + D^B \cdot \frac{yV^B}{xV^A + yV^B} \end{aligned}$$

⇝ Anche qui la duration del portafoglio è una media pesata delle duration delle singole componenti con pesi le percentuali in esse investite

PROPRIETÀ DELLA DURATION

ESEMPIO:
Supponiamo di avere a disposizione 10000 Euro per l'investimento. Ci vengono proposti due titoli, perfettamente divisibili: il primo costa 100 Euro ($= V^A$), il secondo 400 Euro ($= V^B$) e le loro duration sono, rispettivamente, $D^A = 5$ e $D^B = 12$. Vogliamo costruire un portafoglio costituito dai due titoli con duration pari a 7

$\rightsquigarrow$ Questo esercizio è importante ai fini di quello che vedremo in seguito

Decidiamo allora di acquistare una quantità x del primo titolo ed una quantità y del secondo, in modo che

$$\begin{cases} x \cdot 100 + y \cdot 400 = 10000 & (\rightsquigarrow \text{vincolo di bilancio}) \\ 5 \cdot \frac{x \cdot 100}{10000} + 12 \cdot \frac{y \cdot 400}{10000} = 7 & (\rightsquigarrow \text{vincolo di duration}) \end{cases}$$

Proprietà della duration

Risolvendo il sistema otteniamo:

$$\rightsquigarrow \quad \begin{cases} x+4y=100 \\ 5x+48y=700 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x=100-4y \\ 500-20y+48y=700 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad 28y=200 \quad \rightsquigarrow \quad y=\frac{50}{7}\simeq 7.1429$$

$$\rightsquigarrow \quad x=100-4y=\frac{500}{7}\simeq 71.4286$$

$\rightsquigarrow$ Quindi investiamo $x\cdot 100\simeq 7142.86$ Euro ($\simeq 71.43\%$ del nostro capitale) nel primo titolo e $y\cdot 400\simeq 2857.14$ Euro ($\simeq 28.57\%$) nel secondo

PROPRIETÀ DELLA DURATION

In alternativa, se invece avessimo chiamato x l'importo da investire nel primo titolo e y quello da investire nel secondo, il sistema da risolvere sarebbe stato il seguente:

$$\begin{cases} x+y=10000 & (\rightsquigarrow \text{vincolo di bilancio}) \\ 5\cdot\frac{x}{10000}+12\cdot\frac{y}{10000}=7 & (\rightsquigarrow \text{vincolo di duration}) \end{cases}$$

e le quantità dei due titoli da acquistare sarebbero $\frac{x}{100}$ e $\frac{y}{400}$.
Infine, se avessimo chiamato x la quota del nostro capitale investita nel primo titolo e y quella investita nel secondo, avremmo dovuto risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y=1 & (\rightsquigarrow \text{vincolo di bilancio}) \\ 5x+12y=7 & (\rightsquigarrow \text{vincolo di duration}) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Gli importi investiti nei due titoli sarebbero pari a $x\cdot 10000$€ e rispettivamente $y\cdot 10000$€, e le quantità di titoli da acquistare a $\frac{x\cdot 10000}{100}$ e $\frac{y\cdot 10000}{400}$

ESEMPI DI CALCOLO DELLA DURATION

1) Consideriamo una rendita a rata costante $R > 0$ esigibile alle epoche equidistanziate $T_j = j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{array}{ccccc} & R & R & \dots & R \\ \vdash & + & + & + & \dashv \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \end{array}$$

Poiché la duration è indipendente dall'ordine di grandezza degli importi, possiamo considerare il caso $R = 1$ (a cui ci si potrebbe comunque ricondurre moltiplicando tutte le rate per la stessa costante > 0 pari al loro reciproco)

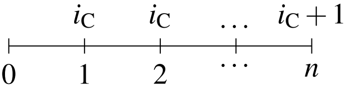
$$\rightsquigarrow \quad D = \frac{\sum_{j=1}^{n} j e^{-\delta j}}{\sum_{h=1}^{n} e^{-\delta h}} = \frac{(Ia)_{n\rceil i}}{a_{n\rceil i}} = \frac{1+i}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}, \quad \text{con } i = e^{\delta} - 1$$

Se la rendita è perpetua la sua duration si può ottenere tramite passaggio al limite della precedente:

$$D = \lim_{n \to +\infty} \frac{(Ia)_{n\rceil i}}{a_{n\rceil i}} = \frac{(Ia)_{\infty\rceil i}}{a_{\infty\rceil i}} = \frac{\frac{1}{id}}{\frac{1}{i}} = \frac{1}{d} = \frac{1}{iv} = \frac{1+i}{i}$$

ESEMPI DI CALCOLO DELLA DURATION

2) Consideriamo un coupon bond che paga cedole pari a i_C in $1,2,\ldots,n$ e restituisce 1 in n:



Possiamo scomporre questo titolo in un portafoglio contenente la rendita cedolare a rata costante i_C di duration $D^A = \frac{(Ia)_{n\rceil i}}{a_{n\rceil i}}$ e valore $V^A = i_C a_{n\rceil i}$, ed uno zero-coupon bond unitario di duration D^B pari alla sua scadenza n e valore $V^B = v^n$:

$$\rightsquigarrow \quad D^{A+B} = D^A \cdot \frac{V^A}{V^A + V^B} + D^B \cdot \frac{V^B}{V^A + V^B}$$

$$= \frac{(Ia)_{n\rceil i}}{a_{n\rceil i}} \cdot \frac{i_C a_{n\rceil i}}{i_C a_{n\rceil i} + v^n} + n \cdot \frac{v^n}{i_C a_{n\rceil i} + v^n}$$

Se $n \to +\infty$ è come se non ci fosse mai restituzione del capitale $\rightsquigarrow$ la duration è quella della rendita cedolare perpetua, $D = \frac{1+i}{i}$

PROPRIETÀ DI STATICA COMPARATA DELLA DURATION

- La duration e la convexity di un titolo qualunque sono funzioni dell'intensità di attualizzazione δ (o del tasso i); in particolare, se le vediamo come funzioni di δ, con qualche elementare passaggio si perviene a $D'(\delta) = (D(\delta))^2 - C(\delta)$.
- Proveremo subito, quando vedremo le proprietà della convexity, che $D'(\delta) \leq 0$, e inoltre che $D'(\delta) = 0$ se e solo se il titolo in questione è uno zero-coupon bond
  - $\rightsquigarrow$ A meno che non si tratti di uno zero-coupon bond, in cui la duration è costante e pari alla scadenza, la duration di un titolo (o portafoglio) che produce pagamenti in almeno due epoche future è strettamente decrescente con l'intensità δ
  - $\rightsquigarrow$ Se l'intensità δ aumenta, calano di più i valori attuali delle rate più lontane, e quindi diminuisce il peso relativo delle scadenze più lunghe, a vantaggio di quelle a breve

PROPRIETÀ DI STATICA COMPARATA DELLA DURATION

- Per quanto riguarda, ad es., un coupon bond, facendo un po' di conti si può provare che

  ▷ la sua duration è funzione decrescente del tasso cedolare i_C
  $\rightsquigarrow$ tanto maggiore è i_C, tanto maggiore è il peso della duration della rendita cedolare, a discapito del peso della scadenza più lontana in cui viene rimborsato il valore nominale del titolo

  ▷ Se il titolo è quotato alla pari o sopra la pari ($\rightsquigarrow V(\delta) \geq 1$), allora la duration è crescente con il numero di rate n; se invece il titolo è quotato sotto la pari ($\rightsquigarrow V(\delta) < 1$), la duration ha un punto di massimo ($\rightsquigarrow$ inizialmente cresce, poi decresce).

PROPRIETÀ DELLA CONVEXITY

- Ricordando che

$$C = \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j^2 R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{\sum_{h=1}^{n} R_h \mathrm{e}^{-\delta T_h}} = \sum_{j=1}^{n} T_j^2 \frac{R_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{\sum_{h=1}^{n} R_h \mathrm{e}^{-\delta T_h}} = \sum_{j=1}^{n} T_j^2 w_j$$

si ha che la convexity è una media pesata dei quadrati delle scadenze (con gli stessi pesi della duration); pertanto:

1) $T_1^2 \leq C \leq T_n^2$

2) La convexity di uno zero-coupon bond di scadenza T è pari a T^2

3) Se si moltiplicano tutte le rate R_j per la stessa costante $K > 0$ la convexity non cambia perché i pesi rimangono gli stessi.

4) Se si spostano in avanti o all'indietro tutte le date T_j di una stessa quantità $\tau > 0$ (purché $T_1 - \tau > 0$), sappiamo già che i pesi non cambiano; pertanto la nuova convexity diventa

$$\sum_{j=1}^{n} (T_j \pm \tau)^2 w_j = \sum_{j=1}^{n} T_j^2 w_j \pm 2\tau \sum_{j=1}^{n} T_j w_j + \tau^2 \sum_{j=1}^{n} w_j = C \pm 2\tau D + \tau^2$$

PROPRIETÀ DELLA CONVEXITY

5) Calcoliamo la dispersione delle scadenze attorno alla duration, con gli stessi pesi w_j:

$$Q \doteq \sum_{j=1}^{n}(T_j - D)^2 w_j = \sum_{j=1}^{n} T_j^2 w_j - 2D\sum_{j=1}^{n} T_j w_j + D^2 \sum_{j=1}^{n} w_j$$
$$= C - 2D^2 + D^2 = C - D^2 \geq 0 \rightsquigarrow \quad C \geq D^2$$

$\rightsquigarrow$ Si tratta della varianza di una variabile aleatoria discreta con possibili determinazioni T_j e relative probabilità w_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, di cui C è il momento secondo e D la speranza matematica

In particolare, se ci sono almeno due scadenze diverse, $Q > 0 \rightsquigarrow C > D^2$ (questo risultato ci sarà utile quando tratteremo l'immunizzazione finanziaria), mentre per uno zero-coupon bond si ha $C = D^2$.

PROPRIETÀ DELLA CONVEXITY

6) Convexity di un portafoglio:
Anche qui si ha che (con ovvio significato dei simboli)

$$C^{A+B} = C^A \cdot \frac{V^A}{V^A + V^B} + C^B \cdot \frac{V^B}{V^A + V^B}$$

e che, se si moltiplicano tutte le rate della prima rendita per $x > 0$ e quelle della seconda per $y > 0$, e si sommano

$$C^{xA+yB} = C^A \cdot \frac{xV^A}{xV^A + yV^B} + C^B \cdot \frac{yV^B}{xV^A + yV^B}$$

La dimostrazione è del tutto analoga a quella che abbiamo fatto per la duration.

Immunizzazione finanziaria

- Consideriamo una compagnia che opera nel ramo dell'intermediazione finanziaria (ad es. una banca, o una società finanziaria) o, comunque, un'impresa che, per intraprendere un progetto produttivo da cui si aspetta di avere, in futuro, delle entrate (certe), ha dovuto fare dei debiti che comporteranno delle uscite (anch'esse certe).
- Indichiamo con $\underline{A}/\underline{T}$ le attività della compagnia ($\rightsquigarrow$ assets) e con $\underline{L}/\underline{T}$ le passività ($\rightsquigarrow$ liabilities):

$$\begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \vdash & \text{---}+\text{---} & \text{---}+\text{---} & \text{---}+\text{---} & \dashv \\ 0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & L_1 & L_2 & \dots & L_n \\ \vdash & \text{---}+\text{---} & \text{---}+\text{---} & \text{---}+\text{---} & \dashv \\ 0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{array}$$

- Siccome abbiamo preso uno scadenzario comune per attivi e passivi, supponiamo che $A_j \geq 0$ e $L_j \geq 0 \; \forall \, j$
  $\rightsquigarrow$ Quindi ammettiamo che qualche A_j o L_j possa anche essere nullo, ma non tutti

IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

- Il valore in 0 del portafoglio di attivi e passivi della compagnia, visto come funzione dell'intensità di valutazione δ (che chiameremo anche impropriamente tasso), è dato da

$$V(\delta) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}, \quad \text{dove } \; x_j = A_j - L_j$$

ovvero

$$V(\delta) = V^A(\delta) - V^L(\delta) \doteq \sum_{j=1}^{n} A_j \mathrm{e}^{-\delta T_j} - \sum_{j=1}^{n} L_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}$$

- Come abbiamo già osservato, la valutazione avviene in base al tasso di mercato prevalente in quel momento (ad es. struttura piatta, oppure TIR di "rendite" analoghe).
- Ci chiediamo che cosa succede se questo tasso cambia improvvisamente; ad es. se δ aumenta sappiamo già che diminuiscono sia V^A che V^L (e viceversa se δ diminuisce), ma qual è l'effetto complessivo sul portafoglio?

IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

- Idealmente ci piacerebbe che il suo valore non diminuisse mai, e in tal caso si direbbe che il nostro portafoglio è immunizzato contro il rischio di tasso.
- Cerchiamo allora di vedere se riusciamo a dare delle condizioni sufficienti affinché ciò avvenga.
- Di solito si suppone che la compagnia abbia una certa rigidità sulle sue passività L_j, che si prendono come dati, mentre si assume che ci sia un certo margine di manovra sulle attività.
- Ad es. una banca si finanzia, cioè prende a prestito denaro, dai suoi clienti, mediante l'emissione di obbligazioni, e decide poi come investire questi fondi; lo stesso accade per una compagnia di assicurazioni sulla vita, che incassa i premi e li investe poi in titoli finanziari, per cui deve decidere come investirli.
- Quindi supponiamo che $\underline{L}$ e $\underline{T}$ siano dati, e vogliamo scegliere $\underline{A}$.

Immunizzazione finanziaria

- Un modo per essere perfettamente immunizzati sarebbe quello di scegliere titoli che pagano esattamente $A_j = L_j$ in $T_j \; \forall \, j$; in questo caso si parla di perfect matching
  $\leadsto$ Non c'è alcun rischio di tasso e il valore del portafoglio è identicamente $= 0$
- Questa situazione, tuttavia, è abbastanza difficile da realizzare perché, nella pratica, non sempre si trovano titoli che pagano esattamente quanto si vuole e quando si vuole.
- Quello che si riscontra normalmente è invece un disallineamento tra attivi e passivi, cioè $A_j \neq L_j$ almeno per qualche j
  $\leadsto$ Si parla allora di asset/liability mismatching

IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

- OSSERVAZIONE PRELIMINARE:
  - ▷ Quanto stiamo ora per vedere è espresso, coerentemente a quanto fatto finora, in funzione dell'intensità δ.
  - ▷ Spesso, però, le quantità coinvolte vengono invece espresse in funzione del tasso i, sempre in regime di interesse composto.
  - ▷ Quindi viene, in particolare, utilizzata la funzione che abbiamo indicato con il simbolo $\tilde{V}(i)$ per rappresentare il valore del portafoglio (e, rispettivamente, $\tilde{V}^A(i)$ e $\tilde{V}^L(i)$ per i valori di attività e passività), mentre la convexity e la dollar convexity vengono definite come $\$\tilde{C} = (1+i)^2\tilde{V}''(i)$ e $\tilde{C} = \$\tilde{C}/\tilde{V}(i)$ (anziché $\$C = V''(\delta)$ e $C = \$C/V(\delta)$).

IMMUNIZZAZIONE LOCALE: CONDIZIONI SUFFICIENTI

- Vediamo ora alcune condizioni sufficienti per l'immunizzazione locale (vale a dire in un opportuno intorno di δ).
- Vogliamo cioè che δ sia un punto di minimo locale (o relativo) per la funzione V, ovvero che $\exists U_\delta$ (intorno di δ): $\forall\ \delta' \in U_\delta$ ($\bigcap$ dominio di V) risulti $V(\delta') \geq V(\delta)$.
- Ponendo $\Delta\delta = \delta' - \delta$, cerchiamo quindi condizioni per cui, se $\Delta\delta$ è "sufficientemente piccolo" (in valore assoluto), tale che $\delta' = \delta + \Delta\delta \in U_\delta$, allora, anche se il tasso cambia, non ci rimettiamo in termini di valore del nostro portafoglio.

IMMUNIZZAZIONE LOCALE: CONDIZIONI SUFFICIENTI

- Sappiamo che una condizione sufficiente è

$$\begin{cases} V'(\delta) = 0 \\ V''(\delta) > 0 \end{cases}$$

- Ricordando che

$$V'(\delta) = (V^A)'(\delta) - (V^L)'(\delta) = -\$D^A + \$D^L = -D^A V^A + D^L V^L$$
$$V''(\delta) = (V^A)''(\delta) - (V^L)''(\delta) = \$C^A - \$C^L = C^A V^A - C^L V^L$$

(dove abbiamo omesso di indicare esplicitamente la dipendenza di V^A e V^L da δ, come già fatto per le duration e convexity) otteniamo il seguente risultato:

- Teorema di Redington:
Condizione sufficiente per l'immunizzazione locale è

$$\begin{cases} D^A V^A = D^L V^L & (\text{cioè } \ V' = 0) \\ C^A V^A > C^L V^L & (\text{cioè } \ V'' > 0) \end{cases}$$

IMMUNIZZAZIONE LOCALE: CONDIZIONI SUFFICIENTI

- Spesso si pensa di partire da un portafoglio in cui le attività sono esattamente finanziate dalle passività, ovvero di essere in equilibrio di bilancio $\rightsquigarrow V^A = V^L \rightsquigarrow V = 0$
  In questo caso si ha allora il seguente
- Corollario del Teorema di Redington:
  Se $V^A = V^L$ condizione sufficiente per l'immunizzazione locale è

$$\begin{cases} D^A = D^L \\ C^A > C^L \end{cases}$$

IMMUNIZZAZIONE LOCALE: CONDIZIONI SUFFICIENTI

- COMMENTO:
  - ▷ Se dunque si pensa ai passivi (con la loro duration D^L e convexity C^L) come dati, bisogna cercare degli attivi con la stessa duration dei passivi e convexity maggiore.
  - ▷ Abbiamo visto che sia duration che convexity di un portafoglio di 2 titoli sono medie pesate delle duration e convexity dei 2 titoli di partenza, e lo stesso risultato vale in generale nel caso di k titoli.
  - ▷ Quindi, se sul mercato si trovano 2 titoli, il primo con duration $< D^L$ e il secondo con duration $> D^L$, si possono cercare le quantità dei 2 titoli che servono per far sì che il portafoglio sia in equilibrio di bilancio e abbia duration esattamente pari a D^L.
  - ▷ Abbiamo già fatto questo tipo di esercizio: si tratta di risolvere un sistema lineare con 2 equazioni e 2 incognite, e il sistema risulta determinato ($\rightsquigarrow$ unica soluzione).
  - ▷ Trovata la soluzione, si tratta di verificare se è anche soddisfatto il vincolo sulla convexity.

IMMUNIZZAZIONE LOCALE: CONDIZIONI SUFFICIENTI

- Questo, in generale, potrebbe non essere verificato, per cui bisogna impiegare più di 2 titoli.
- Ad es., se sul mercato ci sono $k > 2$ titoli, di cui uno (almeno) con duration $< D^L$ ed uno con duration $> D^L$, si può risolvere un sistema simile a quello di prima, teso a soddisfare sia il vincolo di bilancio che il vincolo di duration, utilizzando i k titoli
  - $\rightsquigarrow$ Si tratta di un sistema lineare con 2 equazioni e k incognite, che risulta indeterminato con ∞^{k-2} soluzioni
- Si possono scegliere 2 variabili corrispondenti a colonne della matrice dei coefficienti linearmente indipendenti ed esprimere i loro valori in funzione di quelli delle rimanenti $k-2$ variabili cercando di fissare, se possibile, questi ultimi in modo tale che la convexity del portafoglio di attivi superi C^L.

IMMUNIZZAZIONE LOCALE: CONDIZIONI SUFFICIENTI

- Poniamoci ora nel caso particolare, molto frequente nella pratica, in cui è presente un unico passivo di importo L esigibile al tempo T, cioè $\exists\,!\, j : \ L_j > 0$, diciamo $j*$, mentre $L_h = 0 \ \forall\, h \neq j*$; per comodità abbiamo quindi posto $L \doteq L_{j*}$ e $T \doteq T_{j*}$.
- Per le proprietà di duration e convexity (di uno zero-coupon bond) sappiamo che $D^L = T$ e $C^L = T^2$.
- Sappiamo inoltre che ogni portafoglio con flussi strettamente positivi in almeno due scadenze diverse ha $C > D^2$
  - $\rightsquigarrow$ Se scegliamo il portafoglio di attivi con almeno due flussi > 0 in modo tale da soddisfare il vincolo di bilancio e quello di duration, cioè $V^A = V^L$ e $D^A = D^L$, allora la condizione sulla convexity è automaticamente soddisfatta in quanto

$$C^A > (D^A)^2 = T^2 = C^L \ \rightsquigarrow \ C^A > C^L$$

Immunizzazione locale: condizioni sufficienti

- D'altra parte, se ci fosse un unico attivo di importo A esigibile in T', l'uguaglianza tra le duration di attivi e passivi implicherebbe $T = T'$, e il vincolo di bilancio $V^A = V^L$ diventerebbe allora

$$Ae^{-\delta T} = Le^{-\delta T} \rightsquigarrow A = L$$

$\rightsquigarrow$ Ci troveremmo quindi nella situazione di perfect matching in cui siamo per forza immunizzati.

Vale pertanto il seguente

- Corollario (del Corollario) del Teorema di Redington:
  Se è presente un solo passivo di importo L esigibile in T ed è soddisfatto il vincolo di bilancio $V^A = V^L$, allora condizione sufficiente per l'immunizzazione locale è l'uguaglianza tra le duration $D^A = D^L (= T)$.

IMMUNIZZAZIONE GLOBALE

- In realtà, se ci troviamo in queste condizioni, vale un teorema più forte, che ci garantisce che
  1) non solo la condizione è sufficiente, ma anche necessaria;
  2) il punto di minimo non è solo locale, ma anche globale (o assoluto)

     $\rightsquigarrow$ Siamo immunizzati contro qualunque spostamento $\Delta\delta$ di δ, anche "grande" (non solo in un intorno di δ)
- Teorema di Fisher-Weil:
  Se è presente un solo passivo di importo L esigibile in T ed è soddisfatto il vincolo di bilancio $V^A = V^L$, allora condizione necessaria e sufficiente per l'immunizzazione globale è l'uguaglianza tra le duration $D^A = D^L (= T)$.

IMMUNIZZAZIONE GLOBALE

- Dimostrazione della condizione necessaria:
  - ▷ Se δ è un punto di minimo globale per la funzione V allora è anche un punto di minimo locale;
  - ▷ trattandosi di un punto interno di derivabilità, la sua derivata dev'essere nulla: $V'(\delta) = 0 \rightsquigarrow D^A V^A = D^L V^L$, ed essendo $V^A = V^L (> 0) \rightsquigarrow D^A = D^L$ $\square$
- Abbiamo quindi applicato il Teorema che fornisce condizioni necessarie per punti interni di massimo o minimo locale di funzioni ivi derivabili.
- Si noti che δ è un punto interno in quanto, se accogliamo il postulato di rendimento del denaro, V è definita nell'insieme dei numeri reali strettamente positivi, che è un intervallo aperto, quindi dotato solo di punti interni.
- Qualora non accogliessimo questo postulato, pensiamo a V come una funzione definita nell'insieme dei numeri reali, che anche è un intervallo aperto.

IMMUNIZZAZIONE GLOBALE

- Dimostrazione della condizione sufficiente:
  - ▷ Sgombriamo subito il campo dal caso (banale) in cui anche l'attivo è unico, in quanto già sappiamo che per essere soddisfatti sia il vincolo di bilancio che quello di duration dobbiamo avere un perfect matching tra attivi e passivi, il che significa che la funzione V è la costante nulla, e dunque tutti i suoi punti, incluso δ, sono punti di minimo globale.
  - ▷ Consideriamo la funzione

$$\psi(x) = \frac{V^A(x)}{V^L(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j e^{-xT_j}}{L e^{-xT}} = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n} A_j e^{x(T-T_j)}$$

  - ▷ Si ha:

$$\psi'(x) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n} A_j e^{x(T-T_j)}(T-T_j)$$

$$\psi''(x) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n} A_j e^{x(T-T_j)}(T-T_j)^2$$

IMMUNIZZAZIONE GLOBALE

- Osserviamo che $\psi''(x) > 0 \ \forall\, x$ appartenente al dominio di ψ (che, ricordiamo, è un intervallo aperto), in quanto $\exists\, j : \ T_j \neq T$ e $A_j > 0$ (infatti, se non fosse così, ricadremmo nel caso di un unico attivo esigibile in T)
  - $\rightsquigarrow$ la funzione ψ è strettamente convessa, in senso locale, in ogni punto del suo dominio e, trattandosi di un intervallo, lo è anche globalmente
  - $\rightsquigarrow$ le condizioni necessarie per punti di minimo (in questo caso globale) sono anche sufficienti
- Sappiamo che

$$\psi(\delta) = \frac{V^A(\delta)}{V^L(\delta)} = 1$$

per il vincolo di bilancio.

IMMUNIZZAZIONE GLOBALE

▷ Inoltre

$$\psi'(\delta) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n} A_j e^{\delta(T-T_j)} T - \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n} A_j e^{\delta(T-T_j)} T_j$$

$$= T\frac{\sum_{j=1}^{n} A_j e^{-\delta T_j}}{L e^{-\delta T}} - \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j e^{-\delta T_j} T_j}{L e^{-\delta T}}$$

$$= T\psi(\delta) - \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j e^{-\delta T_j} T_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j e^{-\delta T_j}} = T - D^A = D^L - D^A = 0$$

per il vincolo di bilancio e l'ipotesi di uguaglianza delle duration

$\rightsquigarrow$ δ è un punto di minimo assoluto proprio per ψ

$\rightsquigarrow$ $\forall x \neq \delta: \ \psi(x) > \psi(\delta)\,(=1)$ $\rightsquigarrow$ $\dfrac{V^A(x)}{V^L(x)} > 1$ $\rightsquigarrow$ $V^A(x) > V^L(x)$

$\rightsquigarrow$ $V^A(x) - V^L(x) > 0\ (= V^A(\delta) - V^L(\delta))$ $\rightsquigarrow$ $V(x) > V(\delta)$ $\square$

DINAMICA DELL'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

- Supponiamo di avere un portafoglio immunizzato all'epoca 0, localmente o globalmente, in quanto soddisfa le ipotesi dei teoremi precedenti (Redington, piuttosto che Fisher e Weil).
- Ricordiamo che convexity e duration sono funzioni dell'intensità di valutazione δ (o del tasso i) prevalente sul mercato all'epoca di valutazione, e dell'epoca stessa, per cui, se necessario, indichiamo esplicitamente tale dipendenza, e facciamo la stessa cosa anche per il valore del portafoglio.
- Il tempo passa, e arriviamo all'epoca $\tau < T_1$ (e > 0), per cui tutte le date future si "avvicinano" di τ
  - $\rightsquigarrow$ Ai fini del calcolo di duration e convexity, in cui conta solo la distanza delle date future dall'epoca di valutazione, è come se tutte le date fossero spostate indietro di τ

DINAMICA DELL'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

- Se l'intensità non cambia, ovvero (con ovvio significato dei simboli) $\delta_\tau = \delta_0 \doteq \delta$, sappiamo, per le proprietà di duration e convexity, che

$$D_\tau^H = D_0^H - \tau, \quad C_\tau^H = C_0^H - 2\tau D_0^H + \tau^2, \quad H = A, L$$

  Inoltre, per la scindibilità della legge esponenziale, abbiamo anche

$$V_\tau^H = V_0^H \mathrm{e}^{\delta\tau}, \quad H = A, L$$

  $\rightsquigarrow$ Ovviamente è fondamentale che $\tau < T_1$ in modo che in τ rimangano esattamente le stesse scadenze future che c'erano in 0, sennò cambierebbe tutto

Dinamica dell'immunizzazione finanziaria

⇝ Se in 0 è soddisfatto il vincolo di bilancio, lo è anche in τ:

$$V_0^A = V_0^L \;\Rightarrow\; V_0^A e^{\delta\tau} = V_0^L e^{\delta\tau} \;\Rightarrow\; V_\tau^A = V_\tau^L$$

⇝ Se in 0 è soddisfatto il vincolo di duration, lo è anche in τ:

$$D_0^A = D_0^L \;\Rightarrow\; D_0^A - \tau = D_0^L - \tau \;\Rightarrow\; D_\tau^A = D_\tau^L$$

⇝ Se in 0 sono soddisfatti i vincoli di duration e di convexity, lo sono anche in τ:

- ▷ Come appena visto $D_0^A = D_0^L \;\Rightarrow\; D_\tau^A = D_\tau^L$
- ▷ Inoltre $C_0^A > C_0^L \;\Rightarrow\; C_0^A - 2\tau D_0^A + \tau^2 > C_0^L - 2\tau D_0^A + \tau^2$

$$= C_0^L - 2\tau D_0^L + \tau^2$$

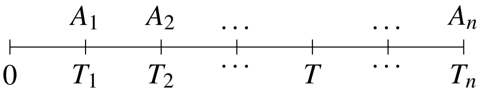
$$\Rightarrow\; C_\tau^A > C_\tau^L$$

Dinamica dell'immunizzazione finanziaria

- In conclusione, se il tasso non cambia non occorre ricalibrare il portafoglio degli attivi per restare immunizzati; basta farlo quando il tasso cambia.
- Nella pratica, al passar del tempo cambia anche il tasso, per cui non è detto che permangano le condizioni sufficienti per l'immunizzazione finanziaria $\leadsto$ il portafoglio va ricalibrato, perlomeno quando il cambiamento di tasso è "grande"
- Se le variazioni di tasso, invece, sono molto contenute si può lasciar stare, anche perché, nella pratica, le ricalibrature costano
  $\leadsto$ c'è un trade-off tra frequenza di ricalibratura, che teoricamente andrebbe fatta istante per istante per garantire l'immunizzazione, e costi di transazione da sostenere per la stessa

DURATION COME TEMPO OTTIMO DI SMOBILIZZO

- Supponiamo di essere in 0 e di avere un certo orizzonte temporale, diciamo T, in cui abbiamo bisogno di ritirare in blocco tutti i nostri investimenti, che generano la seguente "rendita":



  dove, come rappresentato in figura, $0 \leq T \leq T_n$.

- Quindi, idealmente, tutte le (eventuali) rate precedenti T vengono reinvestite fino a T, alle condizioni prevalenti del mercato, mentre quelle successive vengono vendute (cioè disinvestite), in T, sempre alle condizioni prevalenti del mercato.

DURATION COME TEMPO OTTIMO DI SMOBILIZZO

- Se valutiamo in 0, con l'intensità corrente δ (come se dovesse rimanere invariata), quello che avremo a disposizione in T, otteniamo l'analogo a ciò che avevamo definito saldo di un'operazione finanziaria, solo che allora erano coinvolti tutti i flussi generati dall'operazione, anche di segno negativo, mentre ora abbiamo una rendita in cui i flussi sono tutti in entrata.
- Comunque, estendendo la definizione anche a questo caso, e mettendo esplicitamente in evidenza la dipendenza dal tasso di valutazione, oltre che dall'istante T, otteniamo:

$$W_T^A(\delta) = \sum_{j=1}^{n} A_j \mathrm{e}^{\delta(T-T_j)} = \sum_{j:T_j \leq T} A_j \mathrm{e}^{\delta(T-T_j)} + \sum_{j:T_j > T} A_j \mathrm{e}^{-\delta(T_j-T)}$$

- Naturalmente invece il tasso cambia, al passare del tempo, per cui quello che ci ritroveremo in T è in realtà aleatorio.

DURATION COME TEMPO OTTIMO DI SMOBILIZZO

- Tuttavia, per semplicità, supponiamo che il tasso possa cambiare soltanto una volta, per poi rimanere invariato, e precisamente:
  - (i) Se $T \geq T_1$, supponiamo che il tasso possa cambiare solo prima di T_1, per cui tutte le transazioni si faranno col nuovo tasso, mentre il vecchio sarà irrilevante;
  - (ii) Se invece $T \leq T_1$ e il tasso cambia prima di T, anche in questo caso tutte le transazioni si faranno col nuovo tasso, mentre il vecchio sarà irrilevante;
  - (iii) Se infine il tasso cambia dopo T, allora tutte le transazioni si faranno col vecchio tasso, mentre il nuovo sarà irrilevante, e quindi non si corre alcun rischio.
- Con riferimento, in particolare, alle situazioni a rischio:
  - ▷ Se il tasso aumenta/diminuisce, allora aumenta/diminuisce anche il I addendo della somma in cui è stato scomposto W_T^A $\rightsquigarrow$ rischio di reimpiego
  - ▷ Se il tasso aumenta/diminuisce, allora diminuisce/aumenta il II addendo $\rightsquigarrow$ rischio di prezzo

DURATION COME TEMPO OTTIMO DI SMOBILIZZO

- Quindi i due termini parzialmente si compensano.
- Ci chiediamo allora se e quando si compensano esattamente o, addirittura, riusciamo a trarre beneficio da una variazione di tasso, cioè quando siamo immunizzati contro tali variazioni in quanto $W_T(\delta') \geq W_T(\delta)$, essendo δ' il nuovo tasso.
- Per quanto visto finora il valore in 0 del portafoglio di attivi, $V^A(\delta)$, altro non è che $W_0^A(\delta)$ ($\rightsquigarrow T = 0$), e la duration è anche stata definita con riferimento all'epoca 0, cioè

$$V^A(\delta) = \sum_{j=1}^{n} A_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}, \qquad D^A(\delta) = \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j A_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}}{V^A(\delta)}$$

DURATION COME TEMPO OTTIMO DI SMOBILIZZO

- Calcoliamo ora

$$
\begin{aligned}
(W_T^A(\delta))' &= \sum_{j=1}^{n} A_j \mathrm{e}^{\delta(T-T_j)}(T-T_j) \\
&= \mathrm{e}^{\delta T}\left(T\sum_{j=1}^{n} A_j \mathrm{e}^{-\delta T_j} - \sum_{j=1}^{n} T_j A_j \mathrm{e}^{-\delta T_j}\right) \\
&= \mathrm{e}^{\delta T}\left[T V^A(\delta) - D^A(\delta) V^A(\delta)\right] \\
&= \mathrm{e}^{\delta T} V^A(\delta)\left[T - D^A(\delta)\right] = W_T^A(\delta)\left[T - D^A(\delta)\right] \\
(W_T^A(\delta))'' &= \sum_{j=1}^{n} A_j \mathrm{e}^{\delta(T-T_j)}(T-T_j)^2
\end{aligned}
$$

- Se esiste almeno una data $T_j \neq T$, allora $(W_T^A(\delta))'' > 0 \;\; \forall\, \delta$
  $\rightsquigarrow$ W_T^A è (strettamente) convessa, in senso globale visto che la supponiamo definita su un intervallo

DURATION COME TEMPO OTTIMO DI SMOBILIZZO

- Quindi, se $T = D^A(\delta) \rightsquigarrow (W_T^A(\delta))' = 0$

  $\rightsquigarrow$ δ è punto di minimo assoluto proprio per W_T^A

  $\rightsquigarrow$ $W_T^A(\delta') > W_T^A(\delta) \ \forall \, \delta' \neq \delta$

  $\rightsquigarrow$ Se scegliamo T, la data di smobilizzo dei nostri attivi, pari alla loro duration D^A, siamo globalmente immunizzati contro il rischio di tasso

  $\rightsquigarrow$ La duration può essere vista come il tempo ottimo di smobilizzo degli attivi

- In particolare, se T coincide con la data di esigibilità di un unico passivo di importo L e siamo in equilibrio di bilancio all'epoca 0, vale a dire $V^A(\delta) = V^L(\delta) = L\mathrm{e}^{-\delta T}$ ($\rightsquigarrow W_T^A(\delta) = L$), allora ricadiamo nell'ambito del Teorema di Fisher-Weil e, scegliendo $D^A = D^L = T$, anche se il tasso cambia risulta $W_T^A \geq L$.

GENERALIZZAZIONI

- Torniamo ora al caso di un portafoglio (o rendita) che vogliamo valutare in 0 e che prevede di ricevere in T_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, gli importi R_j, tutti > 0 (o, al limite, ≥ 0, tanto non cambia niente se qualche R_j è $= 0$, basta che non lo siano tutti):

$$\begin{array}{ccccc} & R_1 & R_2 & \ldots & R_n \\ \vdash & \!\!\!-\!\!\!+\!\!\!- & \!\!\!-\!\!\!+\!\!\!- & \!\!\!-\!\!\!+\!\!\!- & \!\!\!-\!\!\!\dashv \\ 0 & T_1 & T_2 & \ldots & T_n \end{array}$$

- A differenza di prima, però, non supponiamo più che la struttura per scadenza dei tassi a pronti sia piatta, per cui il valore in 0 del portafoglio è funzione di n variabili, ovvero degli n tassi (o intensità) $\delta_0(T_1), \delta_0(T_2), \ldots, \delta_0(T_n)$ che, per semplicità, chiamiamo $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$:

$$V(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = \sum_{j=1}^{n} R_j e^{-\delta_j T_j}$$

SHIFT PARALLELI

- Anche qui siamo preoccupati di vedere cosa succede del valore del nostro portafoglio se i tassi cambiano improvvisamente.
- Supponiamo che la curva dei tassi possa subire soltanto degli “shift paralleli”, ovvero dei movimenti ($\leadsto$ traslazioni, o shift) verso l’alto o verso il basso di tutti i tassi nella stessa misura
  - $\leadsto$ Questa ipotesi è piuttosto forte anche se spesso, almeno nel breve periodo, rappresenta una situazione empiricamente molto frequente
- Poniamo allora

$$\varphi(\Delta\delta) \doteq V(\delta_1 + \Delta\delta, \delta_2 + \Delta\delta, \ldots, \delta_n + \Delta\delta) = \sum_{j=1}^{n} R_j e^{-(\delta_j + \Delta\delta)T_j}$$

  così ci riconduciamo al caso di una funzione in una variabile.
- Chiaramente $\varphi(0) = V(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$.
- Vogliamo allora vedere come reagisce il valore del nostro portafoglio a tali shift.

DURATION DI FISHER-WEIL

- A tale scopo calcoliamo le derivate della funzione φ:

$$\varphi'(\Delta\delta) = \sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{e}^{-(\delta_j+\Delta\delta)T_j}(-T_j) < 0$$

$$\varphi''(\Delta\delta) = \sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{e}^{-(\delta_j+\Delta\delta)T_j}(-T_j)(-T_j) > 0$$

- In particolare:

$$\varphi'(0) = -\sum_{j=1}^{n} T_j R_j \mathrm{e}^{-\delta_j T_j}, \qquad \varphi''(0) = \sum_{j=1}^{n} T_j^2 R_j \mathrm{e}^{-\delta_j T_j}$$

- Diamo ora le seguenti definizioni:

$$\$D^{\mathrm{FV}} \doteq -\varphi'(0) \qquad \text{dollar duration}$$

$$D^{\mathrm{FV}} \doteq \frac{\$D^{\mathrm{FV}}}{\varphi(0)} = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} \qquad \text{duration di Fisher-Weil}$$

Duration di Fisher-Weil

- Anche qui possiamo ripetere i discorsi fatti in precedenza ed interpretare la duration come misura di sensibilità del prezzo ($\rightsquigarrow$ valore del portafoglio) a shift paralleli della struttura per scadenza:

$$\Delta V = \Delta\varphi \simeq -\$D^{\mathrm{FV}} \cdot \Delta\delta, \qquad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\varphi}{\varphi} \simeq -D^{\mathrm{FV}} \cdot \Delta\delta$$

  oppure esprimerla come media delle durate ($\rightsquigarrow$ durata media finanziaria):

$$D^{\mathrm{FV}} = \sum_{j=1}^{n} T_j w_j, \quad \text{dove } \; w_j = \frac{R_j \mathrm{e}^{-\delta_j T_j}}{\sum_{h=1}^{n} R_h \mathrm{e}^{-\delta_h T_h}}$$

  per cui ritroviamo le proprietà 1), 2), 3), 5) viste in precedenza (ma non la 4)).

CONVEXITY

- Analogamente si può definire

$$\$C^{\mathrm{FV}} \doteq \varphi''(0) \qquad \text{dollar convexity}$$

$$C^{\mathrm{FV}} \doteq \frac{\$C^{\mathrm{FV}}}{\varphi(0)} = \frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)} \qquad \text{convexity}$$

  e usare l'approssimazione di φ in un intorno di 0 tramite polinomio di Taylor di II grado.

- Anche per la convexity valgono quasi tutte le proprietà viste in precedenza in quanto

$$C^{\mathrm{FV}} = \sum_{j=1}^{n} T_j^2 w_j$$

DURATION E CONVEXITY DI FISHER-WEIL

- A dire il vero, tutte queste definizioni sono solitamente date supponendo di aver a che fare con funzioni di $i_j = e^{\delta_j} - 1$ anziché di δ_j, ovvero

$$\tilde{V}(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \sum_{j=1}^{n} R_j (1 + i_j)^{-T_j}$$

$$\tilde{\varphi}(\Delta i) \doteq V(i_1 + \Delta i, i_2 + \Delta i, \ldots, i_n + \Delta i)$$

  per cui cambia la definizione di convexity, ma non quella di duration.

- Comunque, definendo tutto in funzione delle intensità δ, anziché dei tassi i, si ottengono delle formule più semplici, ma i risultati sono sostanzialmente gli stessi.

Immunizzazione finanziaria

- Vediamo di estendere i risultati sull'immunizzazione locale, in particolare il Teorema di Redington e i suoi corollari, e il Teorema di Fisher-Weil sull'immunizzazione globale.
- Anche qui rappresentiamo il valore in 0 del portafoglio di attivi e passivi come

$$V^A(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) - V^L(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \varphi^A(0) - \varphi^L(0)$$

e, in generale, dopo uno shift parallelo di ampiezza $\Delta\delta$ della curva dei tassi, tale valore sarà

$$\varphi^A(\Delta\delta) - \varphi^L(\Delta\delta) = \sum_{j=1}^{n} A_j \mathrm{e}^{-(\delta_j+\Delta\delta)T_j} - \sum_{j=1}^{n} L_j \mathrm{e}^{-(\delta_j+\Delta\delta)T_j}$$

IMMUNIZZAZIONE LOCALE

- Quindi il portafoglio è immunizzato localmente se per "piccoli" valori di $\Delta\delta$ (in valore assoluto), cioè "piccoli" spostamenti della curva dei tassi,

$$\varphi^A(\Delta\delta) - \varphi^L(\Delta\delta) \geq \varphi^A(0) - \varphi^L(0)$$

ossia 0 è punto di minimo locale della funzione φ così definita:

$$\varphi(\Delta\delta) \doteq \varphi^A(\Delta\delta) - \varphi^L(\Delta\delta) = \sum_{j=1}^{n} (A_j - L_j)\mathrm{e}^{-(\delta_j+\Delta\delta)T_j}$$

IMMUNIZZAZIONE LOCALE: CONDIZIONI SUFFICIENTI

- Condizione sufficiente affinché ciò avvenga è che $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) > 0$, cioè

$$\begin{cases} -D_A^{\mathrm{FV}}\varphi^A(0) + D_L^{\mathrm{FV}}\varphi^L(0) = 0 \\ C_A^{\mathrm{FV}}\varphi^A(0) - C_L^{\mathrm{FV}}\varphi^L(0) > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D_A^{\mathrm{FV}}\varphi^A(0) = D_L^{\mathrm{FV}}\varphi^L(0) \\ C_A^{\mathrm{FV}}\varphi^A(0) > C_L^{\mathrm{FV}}\varphi^L(0) \end{cases}$$

- In particolare, se $\varphi^A(0) = \varphi^L(0) (> 0)$, cioè se il valore netto del portafoglio è nullo ($\rightsquigarrow$ equilibrio di bilancio), allora basta che

$$\begin{cases} D_A^{\mathrm{FV}} = D_L^{\mathrm{FV}} \\ C_A^{\mathrm{FV}} > C_L^{\mathrm{FV}} \end{cases}$$

IMMUNIZZAZIONE LOCALE: CONDIZIONI SUFFICIENTI

- Se poi il passivo è costituito da un'unica uscita L all'epoca T, allora la sua duration $D_L^{\mathrm{FV}} = T$ e convexity $C_L^{\mathrm{FV}} = T^2$ ($\rightsquigarrow$ medie di un unico valore).
- Inoltre resta sempre vero il fatto che, se abbiamo almeno due flussi per l'attivo, allora la sua convexity C_A^{FV} ($\rightsquigarrow$ media dei quadrati delle scadenze) risulta $> \left(D_A^{\mathrm{FV}}\right)^2$ ($\rightsquigarrow$ quadrato della media), per cui in questo caso la condizione sufficiente si riduce a $D_A^{\mathrm{FV}} = D_L^{\mathrm{FV}} = T$ in quanto la condizione sulla convexity è automaticamente verificata.
- Infine è banale il caso di perfect matching in cui anche l'attivo è unico.

IMMUNIZZAZIONE GLOBALE

- Relativamente al Teorema di Fisher-Weil, nel caso in cui
  - ▷ ci troviamo in equilibrio di bilancio
  - ▷ ci sono almeno due attivi
  - ▷ c'è un unico passivo di importo L esigibile in $T = T_{j*}$

0 è punto di minimo assoluto proprio per $\varphi \quad \Leftrightarrow \quad D_A^{\mathrm{FV}} = D_L^{\mathrm{FV}} (= T)$

- Dimostrazione:
  - ▷ Per quanto riguarda la condizione necessaria, la dimostrazione è pressoché identica a quanto visto nel caso di struttura piatta:

    0 è punto di minimo assoluto per φ

    $\rightsquigarrow$ 0 è punto di minimo relativo (interno) per φ

    $\rightsquigarrow$ $\varphi'(0) = 0$

    $\rightsquigarrow$ $D_A^{\mathrm{FV}} = D_L^{\mathrm{FV}}$ (visto che è soddisfatto il vincolo di bilancio) $\square$

IMMUNIZZAZIONE GLOBALE

▷ Per quanto riguarda la condizione sufficiente, anche qui la dimostrazione è quasi la stessa, previo qualche piccolo aggiustamento: Sia

$$\psi(x) = \frac{\varphi^A(x)}{\varphi^L(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n A_j e^{-(\delta_j+x)T_j}}{L e^{-(\delta_{j*}+x)T}} = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^n A_j e^{(\delta_{j*}+x)T-(\delta_j+x)T_j}$$

Osserviamo che ψ è definita su un intervallo:

- ⋆ $(-\min \delta_j, +\infty)$ se accogliamo il Postulato di rendimento del denaro $\rightsquigarrow$ $\delta_j + x > 0 \ \forall j$
- ⋆ $\mathbb{R}$ altrimenti.

Inoltre:

$$\psi'(x) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^n A_j e^{(\delta_{j*}+x)T-(\delta_j+x)T_j}(T-T_j)$$

$$\psi''(x) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^n A_j e^{(\delta_{j*}+x)T-(\delta_j+x)T_j}(T-T_j)^2$$

IMMUNIZZAZIONE GLOBALE

Poiché ci sono almeno due attivi, $\psi''(x) > 0 \;\; \forall\, x$

$\rightsquigarrow$ ψ è convessa (strettamente) su un intervallo

$\rightsquigarrow$ ci può essere al massimo un punto di minimo (globale)

Siccome

$$\begin{aligned}\psi'(0) &= \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n} A_j \mathrm{e}^{\delta_{j*}T - \delta_j T_j}(T - T_j)\\ &= T\frac{\sum_{j=1}^{n} A_j \mathrm{e}^{-\delta_j T_j}}{L\mathrm{e}^{-\delta_{j*}T}} - \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j A_j \mathrm{e}^{-\delta_j T_j}}{L\mathrm{e}^{-\delta_{j*}T}}\\ &= T - D_A^{\mathrm{FV}} = 0\end{aligned}$$

(per il vincolo di bilancio e l'ipotesi $D_A^{\mathrm{FV}} = D_L^{\mathrm{FV}} = T$)

$\rightsquigarrow$ 0 è punto di minimo globale per ψ, ed essendo

$$\psi(0) = \frac{\varphi^A(0)}{\varphi^L(0)} = 1 \;\rightsquigarrow\; \psi(x) = \frac{\varphi^A(x)}{\varphi^L(x)} > 1 \;\; \forall\, x \neq 0$$

$$\rightsquigarrow\; \varphi^A(x) > \varphi^L(x) \;\rightsquigarrow\; \varphi^A(x) - \varphi^L(x) > 0$$

$\square$

IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

- Chiaramente tutto questo è molto teorico, perché gli spostamenti della curva dei tassi possono essere di qualunque tipo, non soltanto ”paralleli”.
- Tuttavia le tecniche di immunizzazione finanziaria che abbiamo descritto ($\rightsquigarrow$ immunizzazione deterministica) sono spesso utilizzate nella pratica dai gestori di fondi d'investimento.
- Più sofisticate, e basate su ipotesi più realistiche (almeno apparentemente, visto che comunque si fa ricorso a modelli) sono invece le tecniche di immunizzazione semideterministica, o addirittura stocastica, per approfondire le quali si rimanda al testo di De Felice e Moriconi (1991).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- L. Daboni, C. de Ferra (1977), *Elementi di matematica finanziaria*, LINT.
- G. Scandolo (2013), *Matematica finanziaria*, AMON.
- G. Castellani, M. de Felice, F. Moriconi (2005), *Manuale di finanza: 1. Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni*, Il Mulino.
- M. de Felice, F. Moriconi (1991), *La teoria dell'immunizzazione finanziaria*, Il Mulino.