27 settembre

Un polinomio e' una funzione definita in $\mathbb{C}$ ed a valori in $\mathbb{C}$ della forma

$$z \longrightarrow p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

dove $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ sono i coefficienti del polinomio. Qui si assume $a_n \neq 0$

a_n e' il coefficiente principale

a_0 e' il termine costante $\qquad n =$ grado di $P(z)$

Esempio $p(z) = z^2 + 1$ ha grado 2.

(o zeri)

Le radici di un polinomio sono i numeri complessi z_0 t.c. $p(z_0) = 0$

Es. Le radici di $p(z) = z^2 + 1$ sono $z = \pm i$. Notare che

$$p(z) = z^2 + 1 = (z - i)(z + i) = z^2 - i^2 = z^2 + 1$$

In generale se $p(z) = az^2 + bz + c$

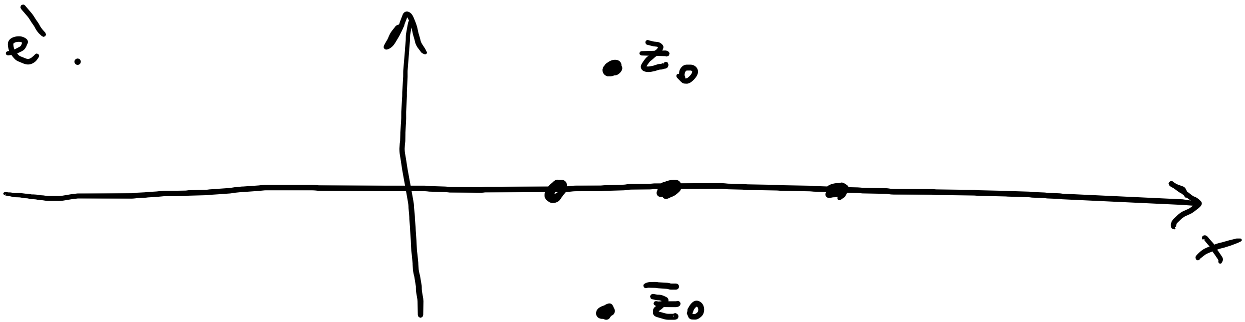
se a, b, c sono reali ed $a \neq 0$

le radici sono $z_\pm = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$p(z) = a\,(z - z_+)(z - z_-)$$

$a_n \neq 0$

<u>Esercizio</u> Sia $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ un polinomio a cofficienti reali (cioè $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$), dimostrare che se z_0 è una radice di $p(z)$ allora anche $\bar{z}_0$ lo è.



$p(z) = z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ ha radici $z = \pm i$

Teor (Fond Alg 1) Sia $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ di grado $n \geq 1$. Esiste $z_1 \in \mathbb{C}$ t.c. $p(z_1) = 0$

Teor (Fond. Algebra 2) Sia $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ un polinomio di grado $n \geq 1$. $\exists$ $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq k \leq n$, dei numeri complessi a due a due distinti $\{z_1, \ldots, z_k\}$ e ~~dei~~ numeri naturali $m_1, \ldots, m_k$ t.c.

$$m_1 + \cdots + m_k = n$$

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k}$$

$\boxed{m_j \text{ è la molteplicità di } z_j}$

$$P(z) = a_n (z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_k)^{m_k} = \qquad P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$$

$$= a_n \underbrace{(z-z_1)\cdots(z-z_1)}_{m_1} \underbrace{(z-z_2)\cdots(z-z_2)}_{m_2} \cdots \underbrace{(z-z_k)\cdots(z-z_k)}_{m_k}$$

$$= a_n \underbrace{z \cdots z}_{m_1} \underbrace{z \cdots z}_{m_2} \cdots \underbrace{z \cdots z}_{m_k} + \cdots$$

$$= a_n z^{m_1} z^{m_2} \cdots z^{m_k} + \cdots$$

$$= a_n z^{\overbrace{m_1 + \cdots + m_k}^{n}} + \text{monomi di grado} < n$$

Sketch che versione1 $\Longrightarrow$ versione 2.

Sia $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ un polinomio $n \geq 1$.

Facciamo uno sketch di dimostrazione che la versione 1 $\Longrightarrow$ versione 2.

La versione 1 garantisce che $\exists\, z_1 \in \mathbb{C}$ t.c. $p(z_1) = 0$.

Possiamo considerare la divisione

$P(z) : z - z_1$

$Q(z)$ $R(z)$

Si ottengono un quoziente ed un resto

dove grado $R(z) <$ grado$(z - z_1) = 1$

$\Rightarrow$ grado $\big(R(z)\big) = 0$ $\quad R(z) = c_0$

Si ha $P(z) = Q(z)(z - z_1) + R(z) = Q(z)(z - z_1) + c_0$

$$P(z) = Q(z)(z-z_1) + c_0$$

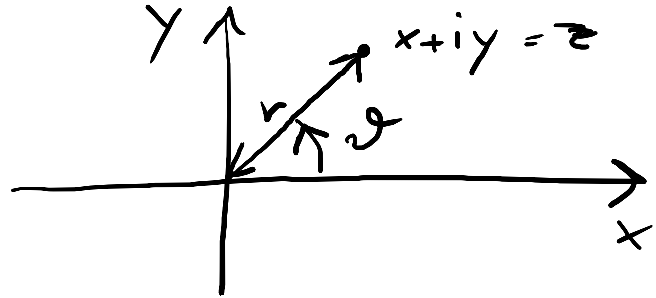
$$\underbrace{P(z_1)}_{0} = Q(z_1)\underbrace{(z_1-z_1)}_{0} + c_0 \implies c_0 = 0$$

cioè concludiam

$$P(z) = Q(z)(z-z_1)$$

dove grado $P = n$ e grado $Q(z) = n-1$

Coordinate polari

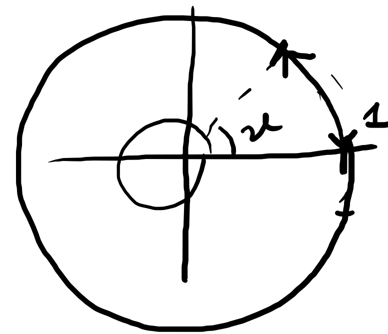


$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z = x+iy = r\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

$$\left|\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = 1$$



$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta}$$

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$z = x + iy$, $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$w = u + iv \quad \rho = \sqrt{u^2+v^2}$

<u>Teor</u> (Formule di De Moivre)

Siano $\quad z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \quad$ e $\quad w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

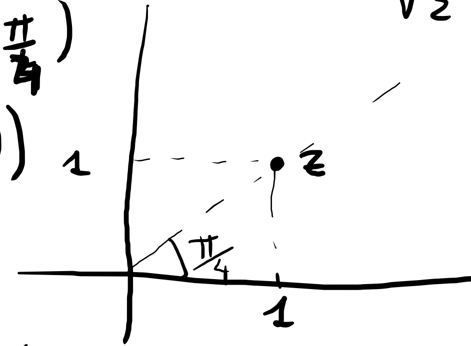
Allora $\quad zw = r\rho\,(\cos(\vartheta+\varphi) + i\sin(\vartheta+\varphi))$

In particolare $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta))$$

E_1 $\qquad z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$$z^{99} = 2^{\frac{99}{2}}\left(\underbrace{\cos\left(99\frac{\pi}{4}\right)}_{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\left(99\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$



$$\sin\left(99\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(100\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(25\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sin\left(24\pi + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \underset{=0}{\sin(\pi)}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \overset{-1}{\cos(\pi)}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(1+i)^{99} = \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} i^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{98} \binom{99}{k} i^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{99} \binom{99}{k} i^k =$$

$k = 2j+1$

$$= \sum_{j=0}^{49} \binom{99}{2j} i^{2j} + \sum_{j=0}^{49} \binom{99}{2j+1} i^{2j+1}$$

$k = 2j$

$$= \sum_{j=0}^{49} \binom{99}{2j} (-1)^j + i \sum_{j=0}^{49} \binom{99}{2j+1} (-1)^j$$

$i^{2j} = (-1)^j$