

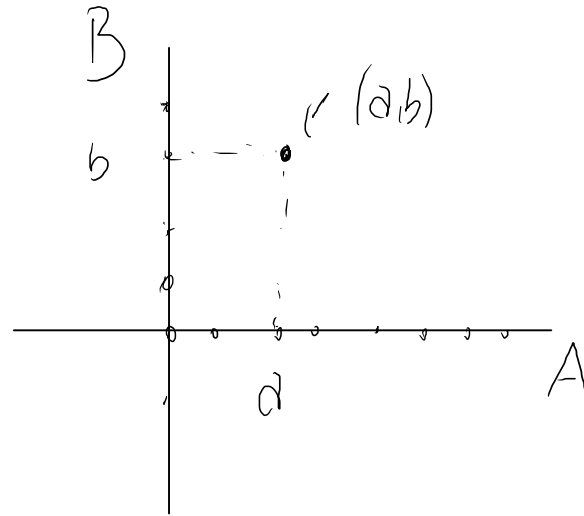
Prodotto cartesiano

A, B

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

In generale $(a, b) \neq (b, a)$

$$A = B \quad A \times A = A^2$$



Relazioni binarie

sottoinsieme di $A \times B$

$$R \subseteq A \times B$$

$$a R b$$

$$(a, b) \in R$$

$$\approx$$

$$<$$

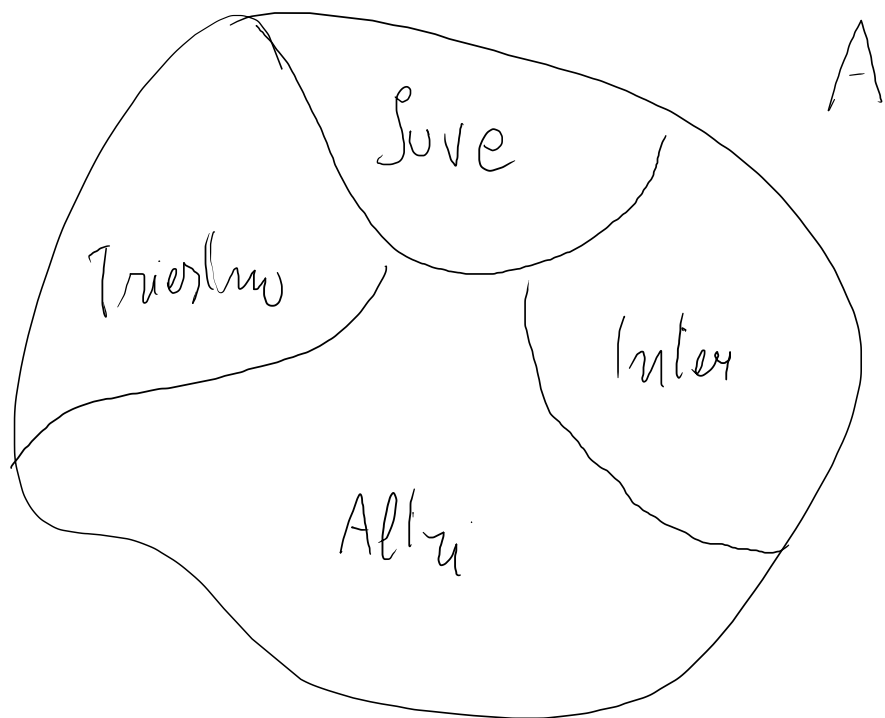
$$\emptyset \quad A \times B$$

Relazioni di equivalenza $A=B$ R relazione di eq. se

- pr. riflessiva $aRa \quad \forall a \in A$
- pr. simmetrica $aRb \Rightarrow bRa \quad \forall a, b \in A$
- pr. transitiva $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc \quad \forall a, b, c \in A$

Es: uguaglianza
parallelismo
equipotenza

Un sottoinsieme di A costituito da tutti e soli gli elementi in relazione tra loro si dice una classe di equivalenza



$$\frac{A}{R} = \left\{ \text{classi di equivalenza} \right\}$$

$$\text{frazioni } \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \right. \\ \left. b \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

$$\frac{a}{b} R \frac{c}{d} \text{ se } a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{3}{5} R \frac{6}{10}$$

$$Q = \frac{\text{Frazioni}}{R} \quad \frac{3}{5}$$

Relazione d'ordine $A=B$

Una relazione R tra A e A si dice d'ordine se

riflessiva aRa

• antisimmetrica $aRb \wedge bRa \rightarrow a=b$

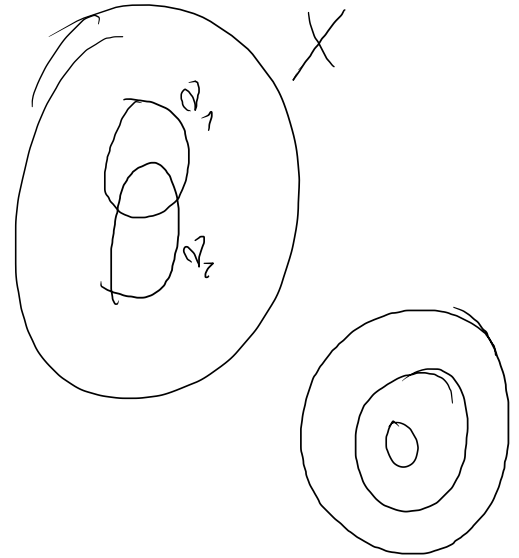
• transitiva $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

$\leq$ $\left(< \right)$ $\leq$ $<$ significa $\leq$ e $\neq$

Es: divisibilità in $\mathbb{N}$

$a \leq b$ se b è divisibile per a

$$3 \leq 9 \quad 3 \nleq 7$$



Relazioni d'ordine non totale,

Una relazione d'ordine si dice totale se due elementi sono sempre confrontabili

X insieme $A = P(X) = \{ \text{sottoinsiemi di } X \}$

$$a_1 \subseteq a_2$$

↑ inclusione

Insiemi ordinati $(X, \leq)$

Sia $K \subseteq X$ un elemento $m \in X$ si dice minimo di K se

- $\forall x \in K \quad m \leq x$

- $m \in K$

E.s. $\mathbb{R} \quad K =]0, 1]$ 0 non è minimo di K

$$X = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) = \{ \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\} \}$$

$$K = \{ \{0\}, \{1\}, \{2\} \}$$

$\min K = \text{Non esiste!}$

$$\min X = \emptyset$$

Oss X finito e la relazione d'ordine è totale, allora ogni sottoinsieme

K di X ha un minimo.

$$K = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Massimo

Teorema Il minimo / massimo se esiste è unico.

Dimp Siano m_1 e m_2 minimi di $K \subseteq X$.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \leq x \quad \forall x \in K \\ m_1 \in K \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_2 \leq x \quad \forall x \in K \\ m_2 \in K \end{array} \right.$$

$$\left(m_1 \leq m_2 \quad m_2 \leq m_1 \right) \rightarrow m_1 = m_2$$

Def. limitazione superiore = maggiorante (upper bound)
 [inferiore minorante lower]

Sia $K \subset X$; $x_0 \in X$ si dice un maggiorante di K se $a \leq x_0 \quad \forall a \in K$

$X = \mathbb{R}$ $K = [0, 1]$

13 è un maggiorante di K

$\sqrt[3]{7}$

"

1

"

di K

Se esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti questo si dice
 estremo superiore di K

oss : se esiste $\max K$ esiste $\sup K = \max K$

$\left[\begin{array}{l} \sup K = \text{estremo superiore di } K \\ \inf K = \text{estremo inferiore} \end{array} \right]$

Un insieme $K \subseteq X$ si dice superiormente limitato se esiste un maggiorante
inferiormente minore

Un insieme si dice limitato se è sup. limitato e inf. limitato

Un insieme si dice illimitato se non è limitato.

A, B insiemi non vuoti

Una relazione $R \subset A \times B$ si dice una funzione se

per ogni elemento $a \in A$ esiste uno ed un solo elemento $b \in B$ tale che $a R b$.

scriviamo $f: A \rightarrow B$

$$\boxed{f(a) = b} \quad [a R b]$$

A si dice il dominio di f

B si dice il codominio di f

f

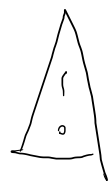
$$\frac{x^2}{\uparrow}$$

$$f(x)$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(-2) = 4$$

$$f(2) = 4$$



ambiguità di notazione

Es: f costante $f: A \rightarrow B$ $\text{fisso } b \in B$
 $f(a) = b \quad \forall a \in A$

se $A = B$ si può definire la funzione identica

$$f(a) = a \quad \forall a \in A$$

se $E \subset A$ la funzione caratteristica di E $\chi_E : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in A \setminus E \end{cases}$$

proiezioni

$$\text{pr}_A: A \times B \rightarrow A \quad \text{pr}_A((a,b)) = a$$

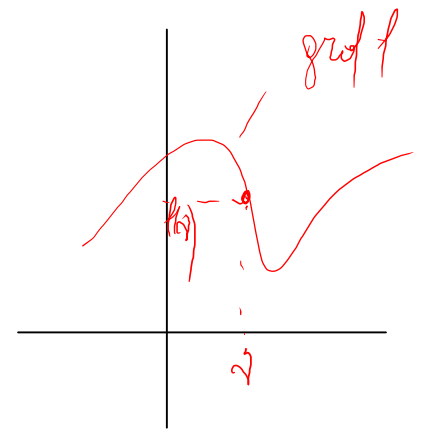
$$\text{pr}_B: A \times B \rightarrow B \quad \text{pr}_B((a,b)) = b$$

- - -

Definizione  Grafico di una funzione

$f: A \rightarrow B$ funzione. Diamo grafico di f l'insieme

$$\text{Graf } f = \{ (a, f(a)) : a \in A \} \subseteq A \times B$$



Funzione iniettiva

$$f: A \rightarrow B$$

f è iniettiva se $\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$

funzione suriettiva

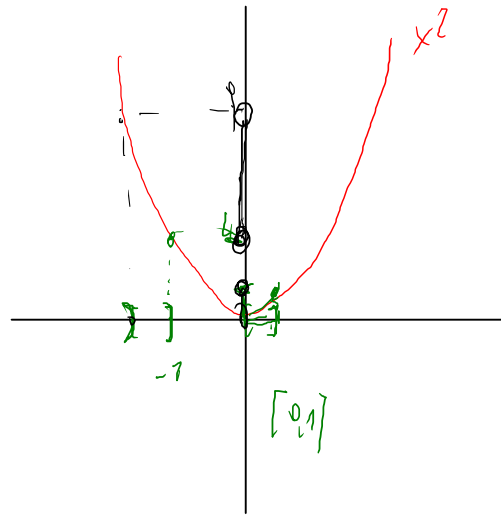
f è suriettiva se $\forall b \in B \quad \exists a \in A : f(a) = b$

[Si dice insieme immagine di f l'insieme $\text{Im} f = f(A) :$
- $\{ f(a) : a \in A \} \subseteq B$.
 f suriettiva se e solo se $\text{Im} f = B$]

$$f_n: \quad f(x) = x^2 \quad E =]-3, -2] \cup [0, 1] \quad f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(E) \equiv [4, 9] \cup [9, 1]$$

9



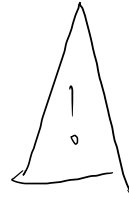
Funzione biellittica

f n sic bieltiva nfi unellano e parietale

l'unico controesempio

$$f: A \rightarrow B$$

$$H \subseteq B$$



$$f^{-1}$$

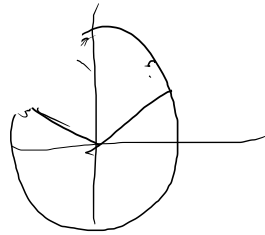
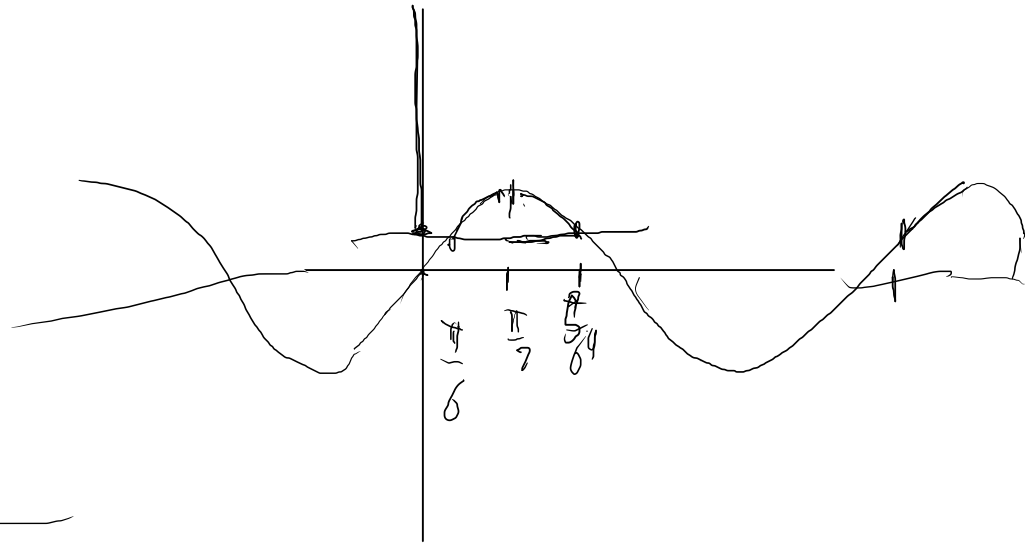
$$\neq \frac{1}{f}$$



$$f^{-1}(H) = \{a \in A : f(a) \in H\}$$

es: $f(x) = \sin x$ $H = [\frac{1}{2}, +\infty[$

$$f^{-1}(H) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]$$



Funzioni composte

$$f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow C$$

$$\underbrace{g \circ f}: A \rightarrow C \quad (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$\triangle g \circ f \neq f \circ g \quad !!!$$

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = \sin x$$

$$(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$$

$$(f \circ g)(x) = (\sin x)^2$$

Funzioni inverse

$f: A \rightarrow B$ biettiva

possiamo definire una funzione $f^{-1}: B \rightarrow A$

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{se} \quad f(a) = b.$$

oss: $(f \circ f^{-1})(b) = b$

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_B$$

$\downarrow$
funzione identica

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A$$