

$\mathbb{R}$ è un corpo-ordinato completo



campo con le operazioni $+$ e $\cdot$

proprietà associativa $(+, \cdot)$ $a + (b + c) = (a + b) + c$. . .

proprietà commutativa $a + b = b + a$. . .

distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot c$

$\mathbb{R}^+$ $\mathbb{R}^-$

esistono l'elemento neutro rispetto a $+$ $[0]$ $0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$\cdot$ $[1]$ $1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

elemento simmetrico rispetto a $+$ $[opposto]$ $\forall a \in \mathbb{R} \quad] -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$

$\cdot$ $[reciproco]$ $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \quad] a^{-1} \in \mathbb{R} \quad a \cdot a^{-1} = 1$

$$E_7 \quad X = \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \} \quad f \circ g$$

$$f(n) = 3n^2 + 1$$

$$g(k) = 2k$$

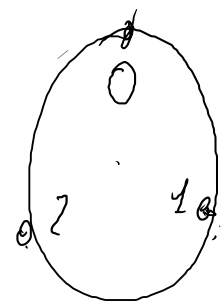
$$f(g(k)) = 3(2k)^2 + 1 \\ 12k^2 + 1$$

$$g(f(k)) = 2(3k^2 + 1) = 6k^2 + 2$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} = \frac{\mathbb{Z}}{2}$$

$$1 + 1 = 0$$

è un campo



$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \quad \text{è un campo}$$

Campo - ordinato

$$\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$$

È definito una relazione d'ordine compatibile con la struttura di campo, i.e.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x < y \rightarrow x + z < y + z$$

$$x < y \wedge z > 0 \rightarrow x \cdot z < y \cdot z$$

$$" \wedge z < 0 \rightarrow x \cdot z > y \cdot z$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$

$$0 < 1$$

$$0 + 1 < 1 + 1 = 0$$

$$1 < 0$$

$$\Rightarrow 0 = 1 \text{ falso}$$

In ogni campo-ordinato K posso considerare alcuni numeri

$$0, 1 \in K \quad 1 < \underbrace{1+1}_2 \in K \quad 2 < \underbrace{2+1}_3 \quad \dots \quad n+1 > n$$

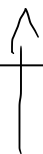
In ogni campo-ordinato esiste una "copia" di $\mathbb{N}$.

" " " di $\mathbb{Z}$

$$\text{se } a \in K, a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \leadsto b \cdot a^{-1} = \left(\frac{b}{a} \right) \\ b \in K$$

In ogni campo-ordinato esiste una copia $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ è un corps-ordinato



ed è il "più piccolo" tra tutti i corps-ordinati

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Teorema

$\mathbb{Q}$ [Proprietà di Archimede in $\mathbb{Q}$]

$\mathbb{N}$ è illimitato superiormente in $\mathbb{Q}$

Dobbiamo provare che non esiste maggiorante per $\mathbb{N}$

$$p > 0$$

$$\underbrace{p \in \mathbb{Z}} \quad \bigg| \quad q \in \mathbb{N}^+$$

Per assurdo supponiamo che esista un maggiorante $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tale che

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}} \quad \underbrace{n \leq \frac{p}{q}}$$

Considero $n = p+1$

$$p+1 \leq \frac{p}{q}$$

$$\leadsto \underbrace{q \cdot (p+1) \leq p}$$

$$\underbrace{p \cdot q + q \leq p}$$

ma $\underbrace{q \geq 1}$

$$p \cdot q \geq p$$

$$p \leq p \cdot q$$

$$\underbrace{p < p+q} \leq \underbrace{p \cdot q + q} \leq p \quad \text{assurdo.}$$

Conséquence

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^+ \exists n \in \mathbb{N}^+$$

$$\text{telle que } n \cdot a \geq b.$$

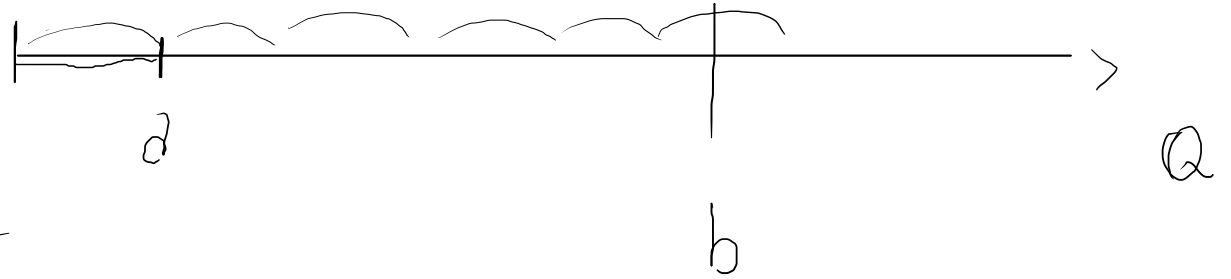
In particular $\forall d \in \mathbb{Q}^+ \exists n \in \mathbb{N}^+ :$

$$\frac{1}{n} < d$$

$$b = 1$$



$$n \cdot d \geq 1 \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq d$$



$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

$$\alpha > 0$$

$$\exists n \quad \frac{1}{n} < \alpha$$

$$\left\{ x : \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad x \in \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[\right\}$$

Q Nel campo-ordinato $\mathbb{Q}$ esistono insiemi limitati che non hanno sup / inf.

Noi vorremmo un campo dove ogni insieme limitato ha sup e inf.

Un corpo-ordinato con le proprietà descritte si dice **Completo**.

Si può dimostrare che esiste un unico corpo-ordinato completo;
questo è il corpo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.