

Principio di induzione

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $0 \in A$ e

$$\forall x \in A \text{ si ha che } x+1 \in A$$

Allora $A = \mathbb{N}$

$$2n \leq 2^n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : 2n \leq 2^n \}$$

$$0 \in A? \quad 2 \cdot 0 = 0 \leq 1 = 2^0 \quad \text{OK}$$

$$n=1 \quad 2 \leq 2 \quad \text{OK}$$

$$2(n+1) = 2n + 2 \leq 2^n + 2 \stackrel{?}{\leq} 2^{n+1}$$

$\leq 2^n$

equivalente a

$$2^{n+1} - 2^n \stackrel{?}{\geq} 2$$

$$2^n(2-1) \stackrel{?}{\geq} 2 \quad \Rightarrow \quad 2^n \geq 2$$

Verif
per ogni $n \geq 1$

$$2^n \geq 2$$

Passo Induttivo

Supponiamo che $n \in A$

mostriamo che $n+1 \in A$ vale

$$2(n+1) \stackrel{?}{\leq} 2^{n+1}$$

$$2n \leq 2^n$$

Ho provato che $\forall n \geq 1$ se $n \in A$ allora $n+1 \in A$

Versione "più generale"

Fisso $n_0 \in \mathbb{N}$; sia P una proprietà che soddisfa le condizioni

1) $P(n_0)$ è vero

2) $\forall \underline{n \geq n_0}$ se $P(n)$ è vero allora $P(n+1)$ è vero

Allora $P(n)$ è vero $\forall n \geq n_0$.

es: $P(n) = \boxed{2^n > 10}$ vero se $n = 4$ $n_0 = 4$ $P(4)$ è vero

supponiamo vero $P(n)$ per $n \geq 4$ provi che $P(n+1)$ è vero

$$\underbrace{2^{n+1}} = \underbrace{2^n}_1 \cdot 2 > 10 \cdot 2 > 10 //$$

$2^n > 10$

Es: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$ vale la formula

$$x^n - y^n = (x - y) (x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$\left[n=2 \quad x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \right]$$

Se $n=1 \quad x - y = (x - y)$

Se vera l'uguaglianza per n ; dimostriamo che vale per $n+1$

$$x^{n+1} - y^{n+1} = x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1} = x(x^n - y^n) + y^n(x - y) =$$

$$= x(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) + y^n(x - y) =$$

$$= (x - y)(x^n + x^{n-1}y + \dots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} + y^n)$$

$\nearrow P(n+1) \quad \left[x^{n+1} - y^{n+1} = \dots \right]$

120 studenti

$P(n) = \{ \text{lo studente } n \text{ prenderà 30 lode all'esame di Analisi} \}$

Dim: Supponiamo che sia vero la proprietà

ogni insieme costituito da n elementi prenderà ~~30 lode~~ lo stesso voto

$P(1) = \{x_1\}$ soddisfa

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

A insieme con $n+1$ studenti

$$A = \{x_1\} \cup \{x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

$$= \{x_1\} \cup \{x_2, \dots, x_{n+1}\}$$



n studenti

prenderà lo stesso voto



n studenti

prenderà lo stesso voto

$\Rightarrow$ è vero $P(n+1)$

Posso fare!

Disuguaglianza di Bernoulli

$\forall \sigma \in \mathbb{R} \quad \sigma > -1 \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+\sigma)^n \geq 1+n\sigma$$

$$\text{se } \sigma \geq 0 \quad (1+\sigma)^n = \underbrace{1+n\sigma} + \underbrace{\dots}_{>0} \quad \text{ovvio}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma^k$$

Dim Fissiamo $\sigma > -1$. Posso box $n=0 \quad (1+\sigma)^0 = 1 \geq 1+0\cdot\sigma \quad \text{OK}$

Posso iniettivo. Supponiamo vero la disuguaglianza per n .

Proviamo che è vero per $n+1$

$$\begin{aligned} (1+\sigma)^{n+1} &= \underbrace{(1+\sigma)^n}_{\geq 1+n\sigma} \cdot \underbrace{(1+\sigma)}_{>0} \geq (1+n\sigma)(1+\sigma) = 1+n\sigma + \sigma + \underbrace{n\sigma^2}_{>0} = \\ &= 1+(n+1)\sigma + n\sigma^2 > \\ &> 1+(n+1)\sigma \end{aligned}$$

$P(n)$

$$(1+\sigma)^n \geq 1+n\sigma \quad \forall n$$

$n=k$

$$(1+\sigma)^k \geq 1+k\sigma$$

vero

$P(n) \text{ vero} \Rightarrow P(n+1)$

$$(1+\sigma)^{n+1} \stackrel{?}{\geq} 1+(n+1)\sigma$$

$$(1+\sigma)^{n+1} = \underbrace{(1+\sigma)^n}_{\geq 1+n\sigma} \cdot \underbrace{(1+\sigma)}_{\geq 1+\sigma} \geq (1+n\sigma)(1+\sigma) \sim$$

Definizioni per ricorrenza

es: potenza $a \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}^+$ $a^n = ?$

$$\left| \begin{array}{l} a^1 := a \\ a^{n+1} := a^n \cdot a \end{array} \right|$$

$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

fattoriale $n!$

$$\left| \begin{array}{l} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{array} \right|$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2$$

Ind: $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

per induzione

Posso provare

$n=1$

$$1 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2}{2}$$

OK

$n=2$

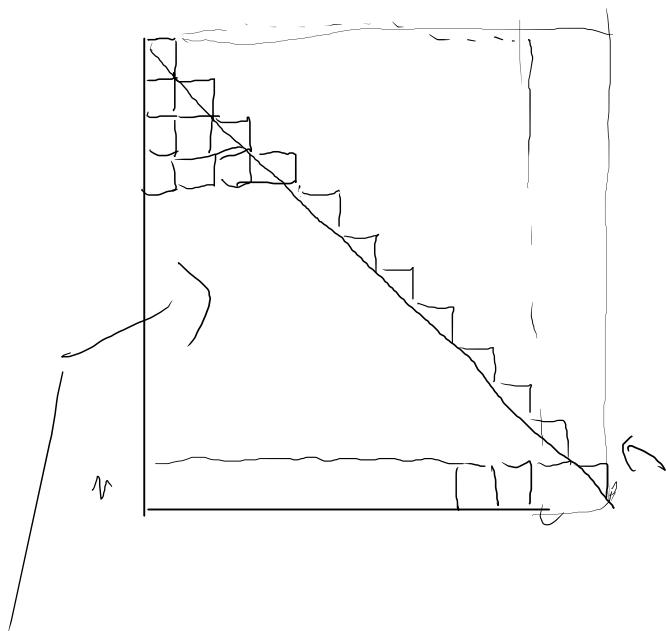
$$1+2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \quad \text{OK}$$

Posso induttivo vero per n

$\Rightarrow$ vero per $n+1$

$$\left[1+2+3+\dots+n+(n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]$$

$$\underbrace{\left[1+2+3+\dots+n \right]} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$



$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 1$$

$$\forall n \geq 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n=1 \quad 1+x = \frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{Vero}$$

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

$$\frac{1}{x+1}$$

Posso bere dx

Posso induttivo vero per n $\rightarrow$ vero per n+1?

$$\underbrace{1+x+x^2+\dots+x^n}_{\text{vero per } n} + x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1 + x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

Successioni

Diciamo successione di elementi di un insieme X non vuoto una funzione $f: A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow X$ dove A è un insieme infinito

$$f(n) = x_n$$

$$x_1 = \text{Moby}$$

$$x_2 = \text{Sofia}$$

$$x_3 = \text{Gabriel}$$

$\vdots$

Esempio

$$X = \mathbb{R}$$

$$X_n = (-1)^n$$

$$X_0 = 1$$

$$X_1 = -1$$

$$X_2 = 1$$

$$X_3 = -1$$



successione $\neq$ insieme dei valori

~~$\{X_n\}_n$~~
no

$$(X_n)_n$$

$$(X_n)_{n \geq 1}$$

$$X_n = n!$$

$$X_n = 2^n$$

$$X_n = \frac{1}{n}$$

Es. successione per ricorrenza

$$X_0 = 1 \quad X_1 = 1$$

se $n \geq 1$

$$X_{n+1} = X_{n-1} + X_n$$

$$X_2 = X_0 + X_1$$

$(X_n)_n$ è la successione di Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

$$Y_n = \frac{X_{n+1}}{X_n}$$

dove $(X_n)_n$ è la successione di Fibonacci

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = \varphi \text{ numero aureo } \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$