ONDE PIANE: FORMALISMO E DEFINIZIONI

$$\psi = A e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\psi = A\cos(kx-\omega t)$$

numero d'onda   pulsazione

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

$$v_{ph} = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}$$

VELOCITA DI FASE
PHASE VELOCITY

$$\cos(a+b) = 2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$

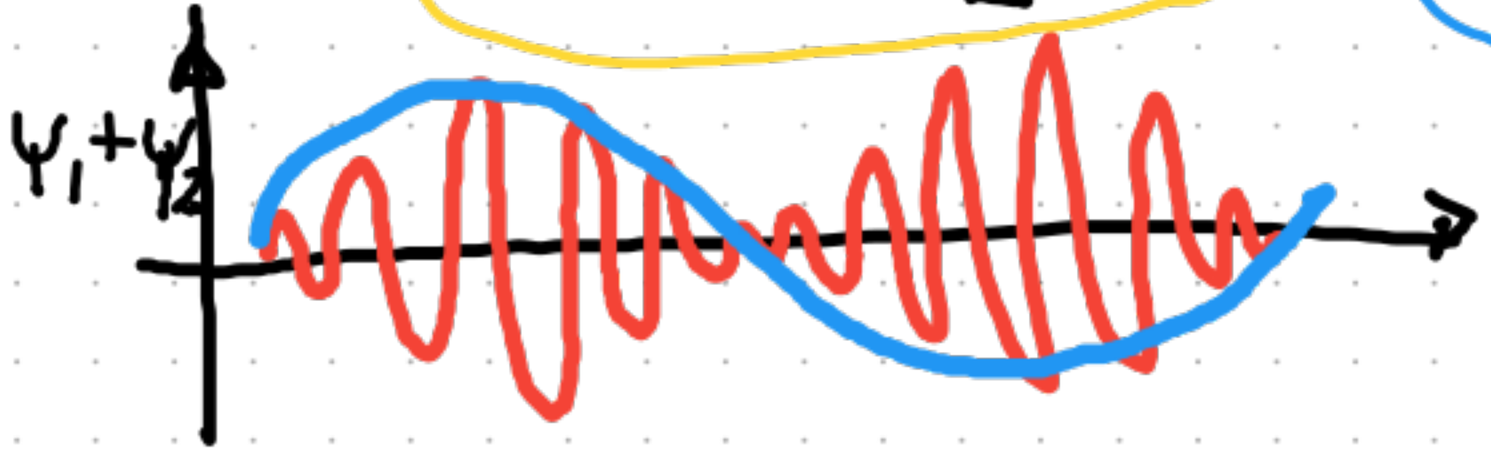
SOMMA DI ONDE PIANE

Un primo semplic caso: somma di due onde

$$A_1 = A_2 = A$$

$$k_1 \simeq k_2 \qquad \omega_1 \simeq \omega_2$$

$$\psi_1 + \psi_2 = A\cos(k_1x - \omega_1 t) + A\cos(k_2x - \omega_2 t) = 2A\cos\frac{(k_1+k_2)x - (\omega_1+\omega_2)t}{2}\cos\frac{\Delta k x - \Delta\omega t}{2}$$



$$v_{ph,fast} = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} \simeq v_{ph}$$

$$v_{ph,slow} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \longrightarrow v_g$$

GROUP VELOCITY

prima semplice definizione nel caso di due onde sommate

Velocità di gruppo e di particella

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

definizione più generale
di velocità di gruppo

$\omega = \omega(k) \longleftrightarrow$ "RELAZIONE DI DISPERSIONE"

$$v_{ph} = \lambda \nu = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = v_{ph} k \qquad \omega = 2\pi\nu \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk}} \ (*)$$

$$E = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega \qquad \lambda = \frac{h}{p}$$

usando Einstein e De Broglie
(dualismo onda particella)
si dimostra che la velocità di gruppo
è uguale alla velocità della particella

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} \Longleftarrow \text{DIMOSTRARE}$$

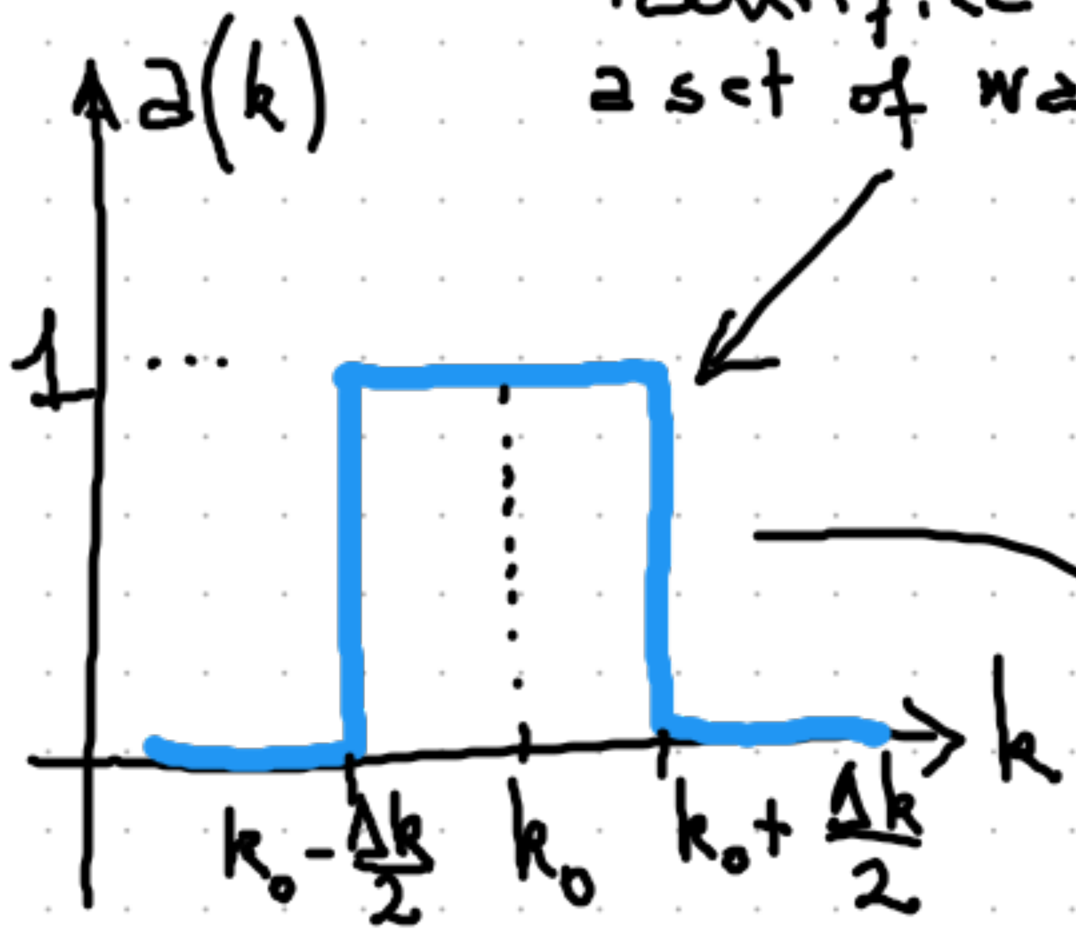
$$= \lambda\nu = \frac{h}{p}\frac{E}{h} = \frac{mv^2}{2p} = \frac{p^2}{2mp} = \boxed{\frac{\hbar k}{2m} = v_{ph}}$$

$$(*)\ v_g = \frac{\hbar k}{2m} + k\frac{\hbar}{2m} = \boxed{\frac{\hbar k}{m} = v_g} \Longleftrightarrow \boxed{v_{PAR} = \frac{p}{m}}$$

$$\boxed{v_g = v_{PARTICELLA}}$$

Application of Fourier Transform to a rectangular function

Wavepacket identified by a set of wavenumbers

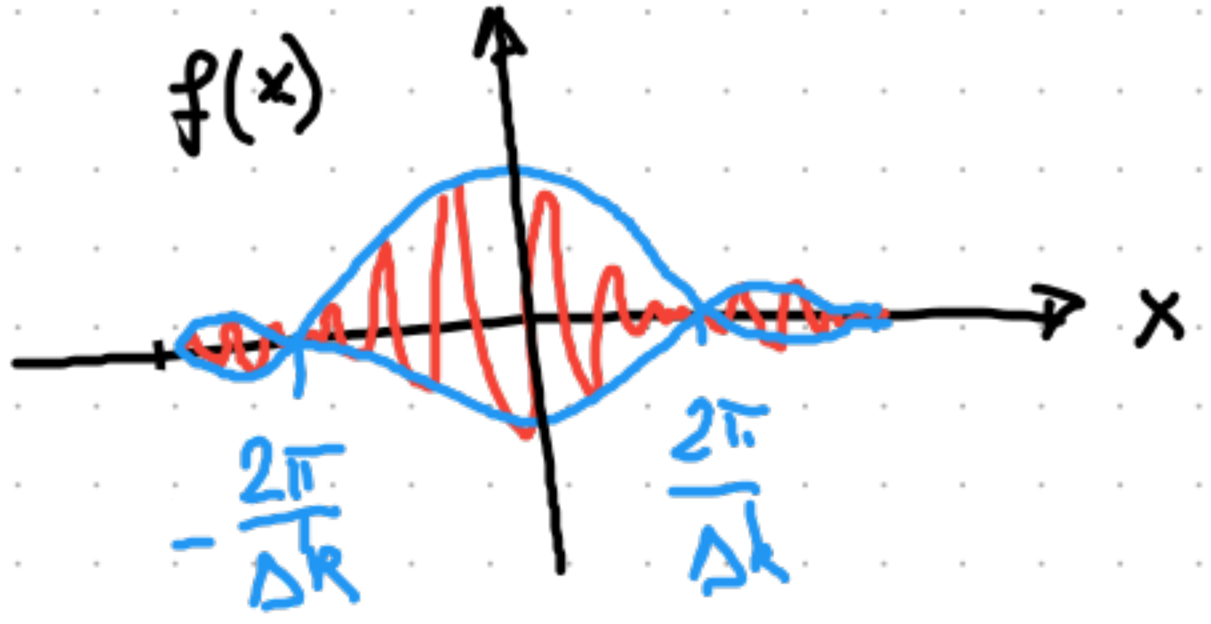


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k)\, e^{ikx}\, dk$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{ikx}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{ikx}}{ix} \right]_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\frac{ix\Delta k}{2}} - e^{\frac{-ix\Delta k}{2}}}{ix} \cdot e^{ixk_0}$$

use $\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sin\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}} e^{ixk_0} \frac{\sin\left(x \frac{\Delta k}{2}\right)}{x \frac{\Delta k}{2}}}$$



SEE SLIDES