



Università degli Studi di Trieste

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso Laurea Triennale: Ingegneria Civile e Ambientale

Insegnamento: Principi di Infrastrutture Viarie (cod. 239MI)



Lezione 05: L'andamento planimetrico dell'asse stradale

Roberto Roberti

Tel.: 040 558 3588

E-mail: roberto.roberti@dia.units.it

Anno accademico 2021/2022



Sommario

ELEMENTI COSTITUTIVI DELL'ASSE PLANIMETRICO STRADALE

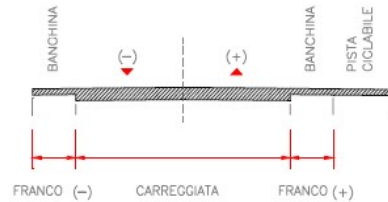
I RETTIFILI

LE CURVE CIRCOLARI

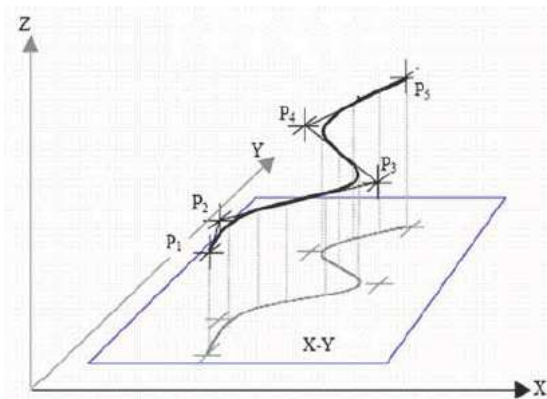
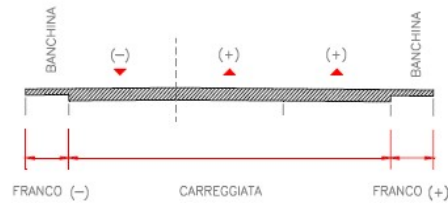
LE CURVE DI TRANSIZIONE

Asse stradale

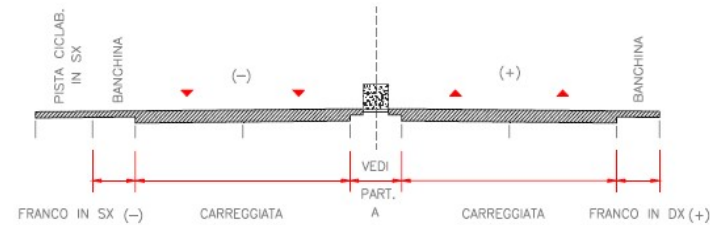
ELEMENTO A SINGOLA CARREGGIATA
A DUE CORSIE



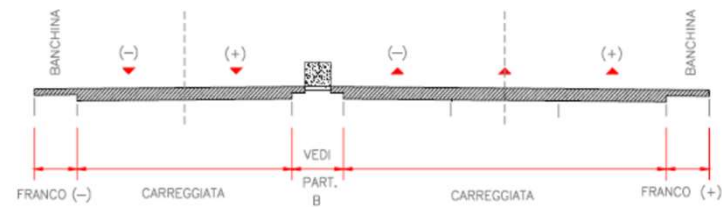
ELEMENTO A SINGOLA CARREGGIATA
A TRE CORSIE



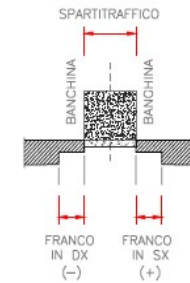
UNICO ELEMENTO A DUE CARREGGIATE



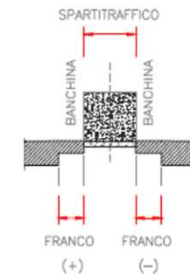
DUE ELEMENTI DISTINTI AD UNA CARREGGIATA CIASCUNO



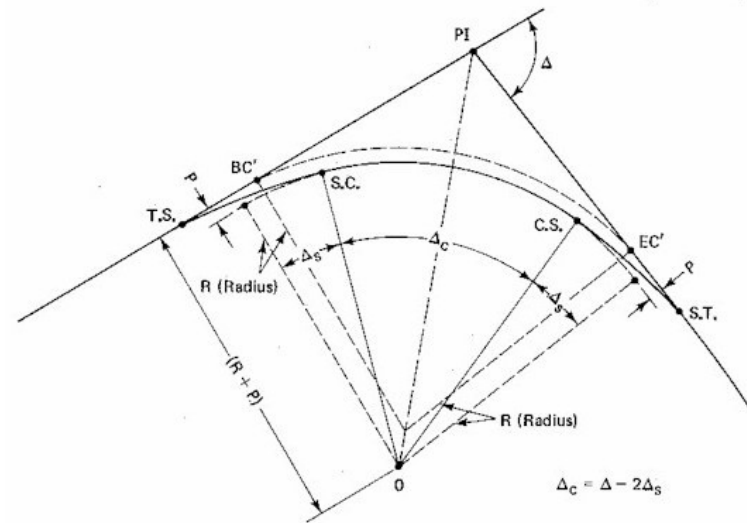
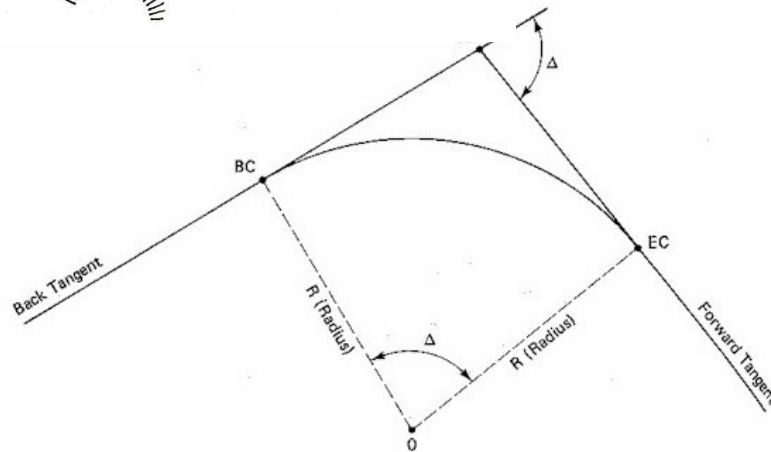
PARTICOLARE A



PARTICOLARE B



- **i rettifili;**
- **le curve circolari;**
- **le curve di transizione.**



I rettifili

Svantaggi dei rettifili:

- Non si percepisce il reale pericolo;
- Se sono troppo lunghi portano ad affrontare la curva successiva a velocità elevata;
- Abbagliamento notturno;
- Noia.
- Problematiche ambientali

Vantaggi:

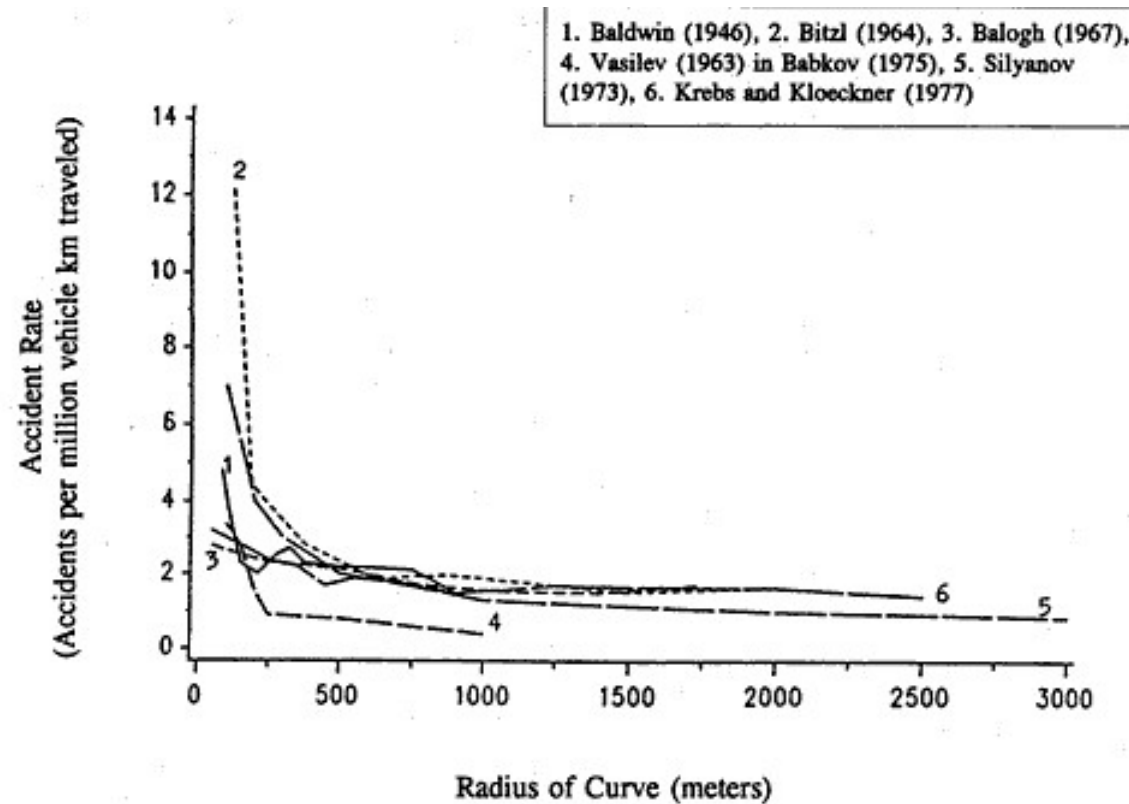
- Buona visibilità;
- Facilità di sorpasso.

$$L_{\max} \text{ [m]} \leq 22 V_{p(\max)} \text{ [km/h]}$$

Per poter essere percepito, il rettilineo deve avere una lunghezza minima, con V quella massima desunta dal diagramma di velocità nel rettifilo considerato.

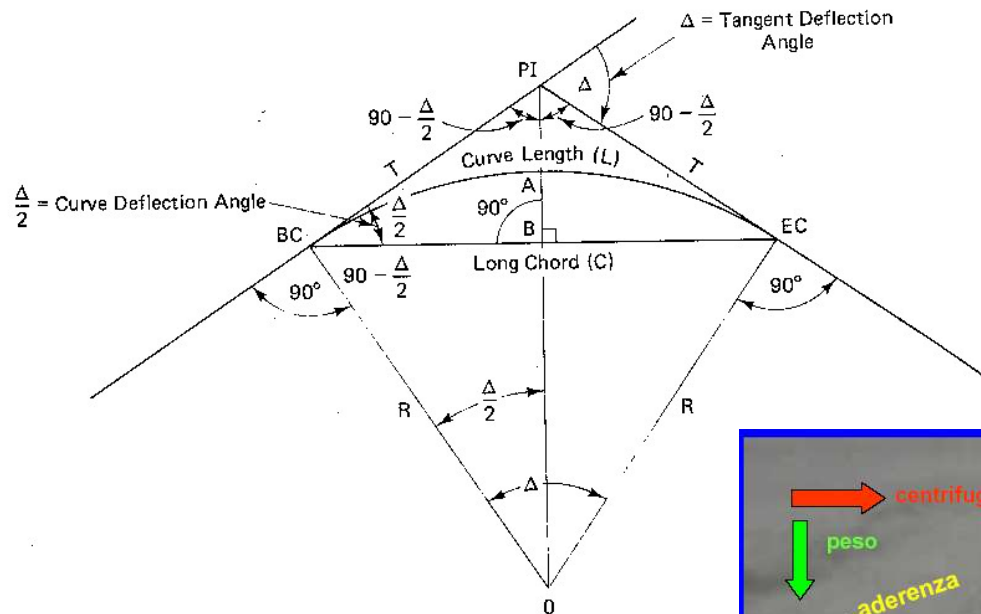
V [km/h]	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Lmin [m]	30	40	50	65	90	115	150	190	250	300	360

Fattore umano e progettazione stradale

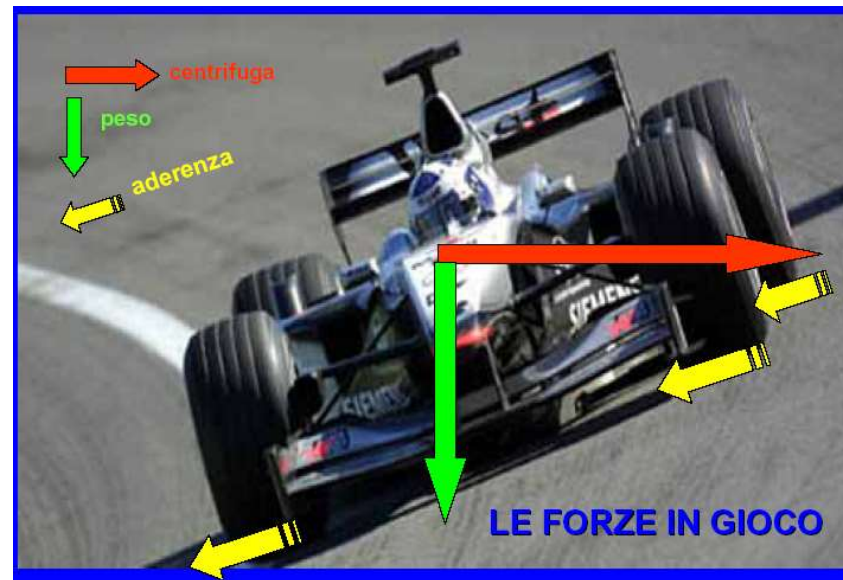


Relazioni tra raggio di curvatura e incidentalità

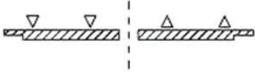
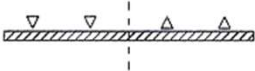
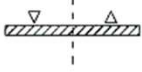
La curva circolare



$$L \geq \frac{V_p}{3,6} \cdot t = \frac{V_p}{3,6} \cdot 2,5$$



Le pendenze trasversali

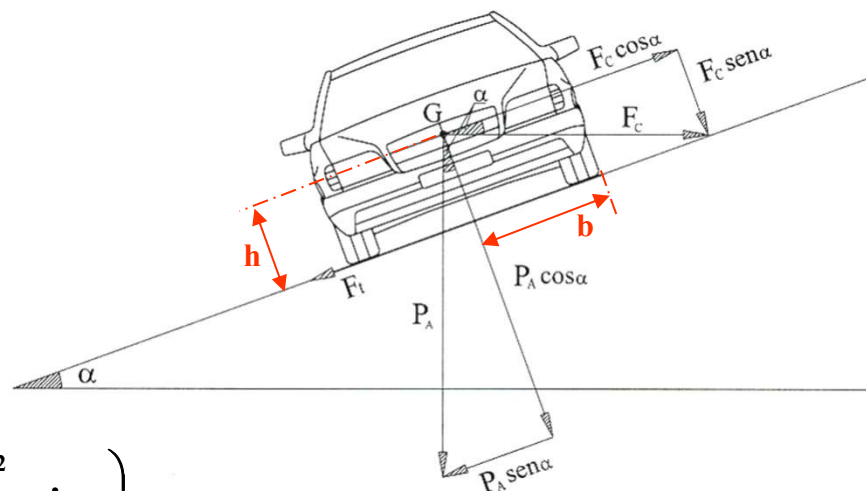
STRADE TIPO	PIATTAFORMA	PENDENZE TRASVERSALI
A, B, D a due o più corsie per carreggiata		
E a quattro corsie		
altre strade		

Equilibrio del veicolo in curva (1)

EQUILIBRIO ALLO SABANDAMENTO

$$F_C \cos\alpha - P_A \sin\alpha = F_t$$

$$F_C \cos\alpha - P_A \sin\alpha = f_t (P_A \cos\alpha + F_C \sin\alpha)$$



$$\frac{m \cdot v^2}{R} \cdot \cos\alpha - m \cdot g \cdot \sin\alpha = f_t \left(m \cdot g \cdot \cos\alpha + \frac{m \cdot v^2}{R} \cdot \sin\alpha \right)$$

$$\frac{v^2}{R} - g \cdot \tan\alpha = f_t \left(g + \frac{v^2}{R} \cdot \tan\alpha \right)$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{g \cdot (f_t + \tan\alpha)}{1 - f_t \cdot \tan\alpha}$$

$$\frac{v^2}{R} = g \cdot (f_t + \tan\alpha) = g \cdot f_t + g \cdot \tan\alpha$$

Se V in [km/h] e R in [m]

$$\frac{V^2}{R} = 127 \cdot (f_t + \tan\alpha)$$

$$a_{\text{(centrifuga)}} = a_{\text{(non compensata)}} + a_{\text{(compensata)}}$$

Equilibrio del veicolo in curva (2)

EQUILIBRIO AL RIBALTAMENTO

$$(F_C \cos \alpha - P_A \sin \alpha) h = (P_A \cos \alpha + F_C \sin \alpha) b$$

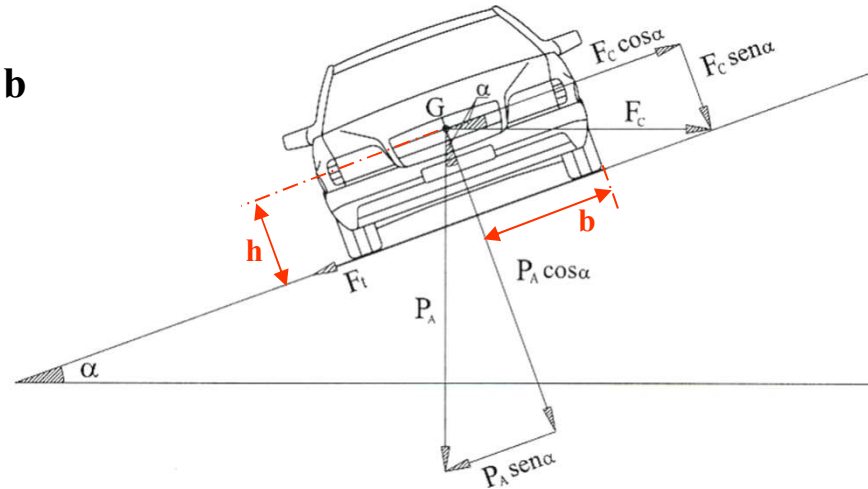
$$\frac{v^2}{R} - g \cdot \tan \alpha = \frac{b}{h} \cdot \left(g + \frac{v^2}{R} \cdot \tan \alpha \right)$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{g \cdot \left(\frac{b}{h} + \tan \alpha \right)}{1 - \frac{b}{h} \cdot \tan \alpha}$$

$$\frac{v^2}{R} = g \cdot \left(\frac{b}{h} + \tan \alpha \right)$$

Se V in [km/h] e R in [m]

$$\frac{V^2}{R} = 127 \cdot \left(\frac{b}{h} + \tan \alpha \right) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{b}{h} \gg f_t \quad \frac{V^2}{R} = 127 \cdot (f_t + \tan \alpha)$$



Campo di variazione di q e f_t

$$\frac{V^2}{R} = 127 \cdot (f_t + \tan \alpha) = 127 \cdot (f_t + q)$$

q_{max} = 0,07 per strade extraurbane ed autostrade urbane (tipi A, B, C, F) ;

q_{max} = 0,05 per strade urbane di tipo D;

q_{max} = 0,035 per strade urbane di tipo E, F.

q_{min} = 0,025

f_{t max} = massima aderenza trasversale **impegnabile** alle diverse velocità V

f_{t max} = [0,28 ÷ 0,53] * f_{T,MAX, disp.} (f_{T,MAX, disp.} massima aderenza trasversale **disponibile** alle diverse velocità),

V (km/h)	25	40	60	80	100	120	140
Strade D, E, F urbane	0,22	0,21	0,20	0,16			
Strade A, B, C, F extr.		0,21	0,17	0,13	0,11	0,10	0,09

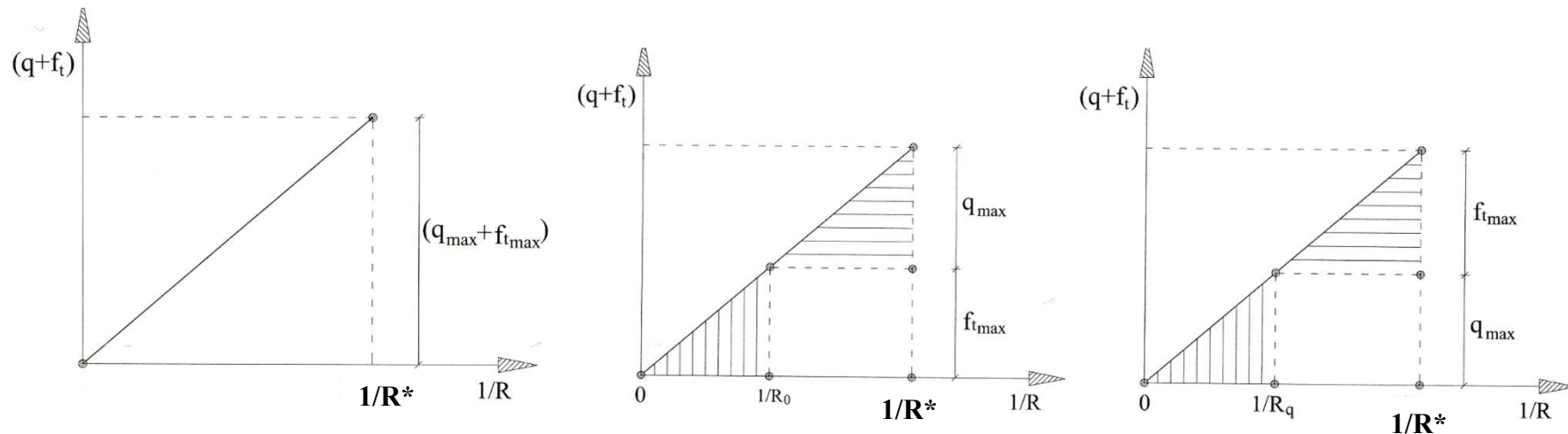
Determinazione Raggio minimo

$$\frac{V^2}{R} = 127 \cdot (f_t + q) \quad \frac{V_{p,min}^2}{R_{min}} = 127 \cdot (f_{t,max} V_{p,min} + q_{max}) \quad R_{min} = \frac{V_{p,min}^2}{127 \cdot (f_{t,max, V_{p,min}} + q_{max})}$$

$f_{t,max, V_{p,min}}$ = massima aderenza trasversale impegnabile alla velocità $V_{p,min}$ (velocità di progetto minima per la classe della strada), q_{max} pendenza massima per la classe della strada, R_{min} è il raggio minimo ammesso per la classe della strada.

TIPI SECONDO IL CODICE	AMBITO TERRITORIALE	DENOMINAZIONE	$V_{p,min}$ [km/h]	q_{max}	$f_{t,max}$	Raggio minimo [m]
AUTOSTRADA A	EXTRAURBANO	STRADA PRINCIPALE	90	0,07	0,118	339
		STRADA DI SERVIZIO (EVENTUALE)	40	0,07	0,210	45
	URBANO	STRADA PRINCIPALE	80	0,07	0,130	252
		STRADA DI SERVIZIO (EVENTUALE)	40	0,035	0,210	51
EXTRAURBANA PRINCIPALE B	EXTRAURBANO	STRADA PRINCIPALE	70	0,07	0,147	178
		STRADA DI SERVIZIO (EVENTUALE)	40	0,07	0,210	45
EXTRAURBANA SECONDARIA C	EXTRAURBANO		60	0,07	0,170	118
URBANA DI SCORRIMENTO D	URBANO	STRADA PRINCIPALE	50	0,05	0,205	77
		STRADA DI SERVIZIO (EVENTUALE)	25	0,035	0,220	19
URBANA DI QUARTIERE E	URBANO		40	0,035	0,210	51
LOCALE F	EXTRAURBANO		40	0,07	0,210	45
	URBANO		25	0,035	0,220	19

Raggi superiori al minimo, $V=\text{cost}$ (1)



R^* rappresenta, per un determinato tipo di strada, il generico raggio minimo per una determinata velocità V (da non confondere con il raggio minimo R_{min} per la tipologia di strada).

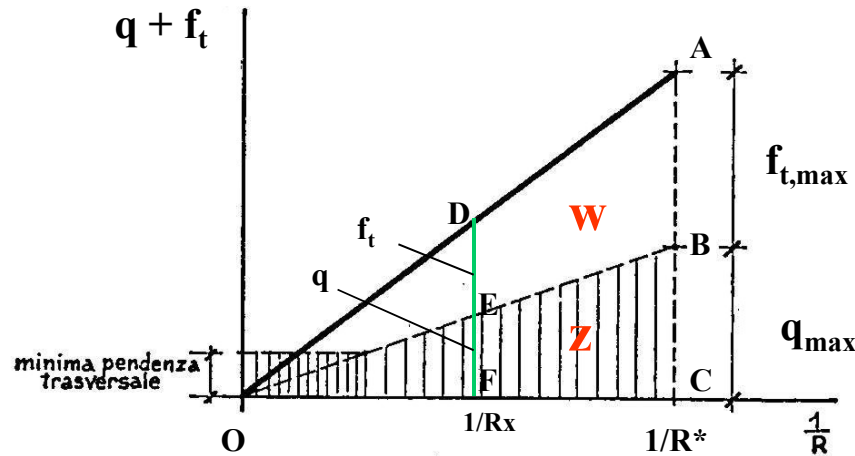
q_{max} e $f_{t,max}$ rappresentano, per un determinato tipo di strada, rispettivamente la massima pendenza trasversale ammessa ed il massimo coefficiente di aderenza trasversale impegnabile alla velocità V

$$(q + f_t) = \frac{V^2}{127 \cdot R}$$

$$R_0 = \frac{V^2}{127 \cdot f_{t,max}}$$

$$R_q = \frac{V^2}{127 \cdot q_{max}}$$

Raggi superiori al minimo (2)



$$(q + f_t) = \frac{V^2}{127 \cdot R}$$

$$\frac{127 \cdot R}{V^2} \cdot f_t + \frac{127 \cdot R}{V^2} \cdot q = 1$$

$w = \text{cost.}$

$z = \text{cost.}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{q + f_t}{1/R_x} &= \frac{q_{\max} + f_{t,\max}}{1/R^*} & R_x \cdot (q + f_t) &= R^* \cdot (q_{\max} + f_{t,\max}) \\ \frac{q}{1/R_x} &= \frac{q_{\max}}{1/R^*} & q \cdot R_x &= q_{\max} \cdot R^* \end{aligned} \right\} \frac{q}{f_t + q} = \frac{q_{\max}}{f_{t,\max} + q_{\max}} = \text{cost.} = \frac{127 \cdot R_x}{V^2} \cdot q = \frac{127 \cdot R^*}{V^2} \cdot q_{\max} = z$$

$$\frac{f_t}{f_t + q} = \frac{f_{t,\max}}{f_{t,\max} + q_{\max}} = \text{cost.} = \frac{127 \cdot R_x}{V^2} \cdot f_t = \frac{127 \cdot R^*}{V^2} \cdot f_{t,\max} = w$$

Raggi superiori al minimo (3)

Esempio: $V = 100$ [km/h] $R^* = 437$ [m] $q_{\max} = 0,07$
 $R_1 = 1000$ [m] $R_2 = 2000$ [m]

$$(q_{\max} + f_{t,\max}) = \frac{V^2}{127 \cdot R^*} = 0,18018 \qquad f_{t,\max} = \frac{V^2}{127 \cdot R^*} - q_{\max} = \frac{100^2}{127 \cdot 437} - 0,07 = 0,11018$$

$$q_1 = q_{\max} \cdot \frac{R^*}{R_1} = 0,07 \cdot \frac{437}{1000} = 0,03059$$

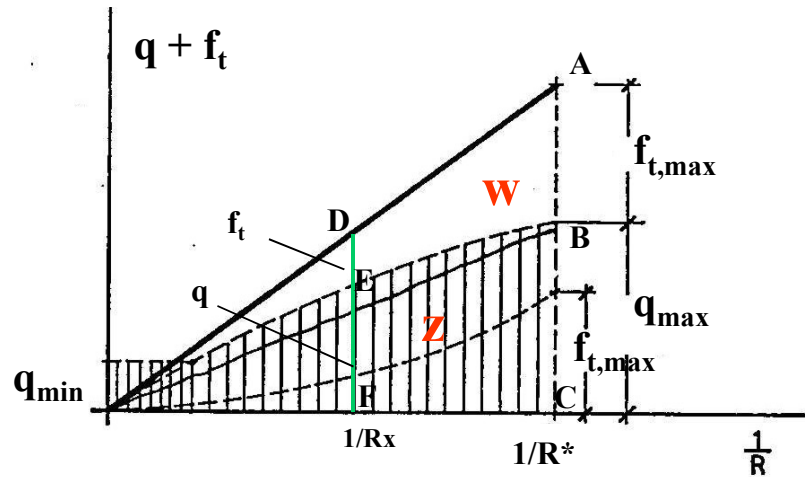
$$(q_1 + f_{t,1}) = \frac{V^2}{127 \cdot R_1} = 0,07874 \qquad f_{t,1} = \frac{V^2}{127 \cdot R_1} - q_1 = \frac{100^2}{127 \cdot 1000} - 0,03059 = 0,04815$$

$$q_2 = q_{\max} \cdot \frac{R^*}{R_2} = 0,07 \cdot \frac{437}{2000} = 0,015295$$

$$(q_2 + f_{t,2}) = \frac{V^2}{127 \cdot R_2} = 0,03937 \qquad f_{t,2} = \frac{V^2}{127 \cdot R_2} - q_2 = \frac{100^2}{127 \cdot 2000} - 0,015295 = 0,024075$$

$$z = \frac{q_{\max}}{f_{t,\max} + q_{\max}} = \frac{q_1}{f_{t,1} + q_1} = \frac{q_2}{f_{t,2} + q_2} = 0,38850 \qquad w = \frac{f_{t,\max}}{f_{t,\max} + q_{\max}} = \frac{f_{t,1}}{f_{t,1} + q_1} = \frac{f_{t,2}}{f_{t,2} + q_2} = 0,61150$$

Raggi superiori al minimo (4)



$$(f_t + q) = \frac{V^2}{127 \cdot R}$$

$$\frac{127 \cdot R}{V^2} \cdot f_t + \frac{127 \cdot R}{V^2} \cdot q = 1$$

$w \neq \text{cost.}$ $z \neq \text{cost.}$

$$\left. \begin{aligned} z &= K \cdot R_x^{(n)} = \frac{127 \cdot R_x}{V^2} \cdot q & q &= \frac{V^2}{127} \cdot K \cdot R_x^{(n-1)} \\ 0 < n < 1 \\ z_{\min} &= K \cdot R^{*(n)} = \frac{127 \cdot R^*}{V^2} \cdot q_{\max} & q_{\max} &= \frac{V^2}{127} \cdot K \cdot R^{*(n-1)} \end{aligned} \right\} q = q_{\max} \cdot \frac{R_x^{(n-1)}}{R^{*(n-1)}}$$

Raggi superiori al minimo (5)

Esempio: $V = 100$ [km/h]
 $R_1 = 1000$ [m]

$R^* = 437$ [m]
 $R_2 = 2000$ [m]

$q_{\max} = 0,07$
 $(n-1) = -0,64$

$$(q_{\max} + f_{t,\max}) = \frac{V^2}{127 \cdot R^*} = 0,18018$$

$$f_{t,\max} = \frac{V^2}{127 \cdot R^*} - q_{\max} = \frac{100^2}{127 \cdot 437} - 0,07 = 0,11018$$

$$z = \frac{127 \cdot R^*}{V^2} \cdot q_{\max} = 0,38850$$

$$w = 1 - z = 1 - 0,38850 = 0,61150$$

$$q_1 = q_{\max} \cdot \frac{R_1^{(n-1)}}{R^{*(n-1)}} = 0,07 \cdot \frac{1000^{(-0,64)}}{437^{(-0,64)}} = 0,04121$$

$$(q_1 + f_{t,1}) = \frac{V^2}{127 \cdot R_1} = 0,07874$$

$$f_{t,1} = \frac{V^2}{127 \cdot R_1} - q_1 = \frac{100^2}{127 \cdot 1000} - 0,04121 = 0,03753$$

$$z = \frac{127 \cdot R_1}{V^2} \cdot q_1 = 0,52337$$

$$w = 1 - z = 1 - 0,52337 = 0,47663$$

$$q_2 = q_{\max} \cdot \frac{R_2^{(n-1)}}{R^{*(n-1)}} = 0,07 \cdot \frac{2000^{(-0,64)}}{437^{(-0,64)}} = 0,02645$$

$$(q_2 + f_{t,2}) = \frac{V^2}{127 \cdot R_2} = 0,03937$$

$$f_{t,2} = \frac{V^2}{127 \cdot R_2} - q_2 = \frac{100^2}{127 \cdot 2000} - 0,02645 = 0,01292$$

$$z = \frac{127 \cdot R_2}{V^2} \cdot q_2 = 0,67183$$

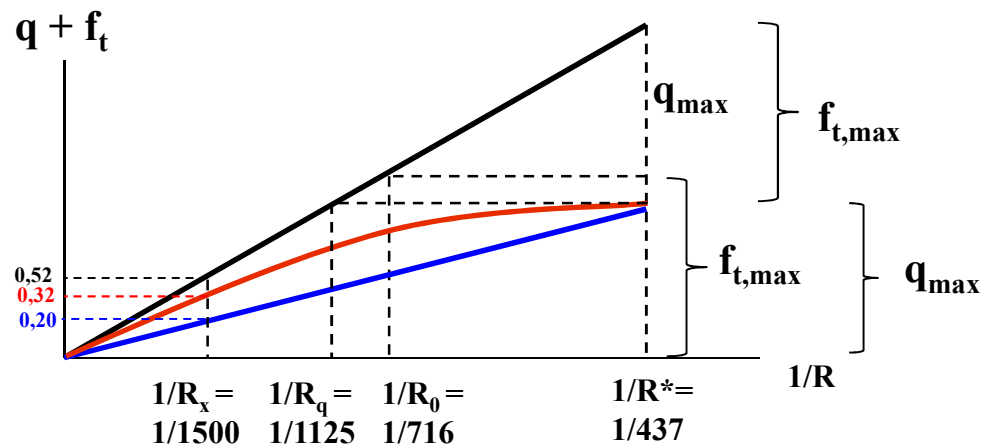
$$w = 1 - z = 1 - 0,67183 = 0,32817$$

Raggi superiori al minimo (6)

Esempio: $V = 100 \text{ km/h}$; $f_{t\max,100} = 0,11$ $q_{\max} = 0,07$; $n-1 = -0,64$

$R^* = 437 \text{ m}$; $R_0 = 716 \text{ m}$; $R_q = 1125 \text{ m}$;

	$R_x = 1500 \text{ m}$		$R_x = 1000$		$R_x = 500 \text{ m}$	
Criterio	$f_{t_{R_x}}$	q_{R_x}	$f_{t_{R_x}}$	q_{R_x}	$f_{t_{R_x}}$	q_{R_x}
I	0,052	0	0,079	0	0,110	0,047
II	0	0,052	0,009	0,070	0,087	0,070
III	0,032	0,020	0,048	0,031	0,096	0,061
IV	0,020	0,032	0,038	0,041	0,093	0,064

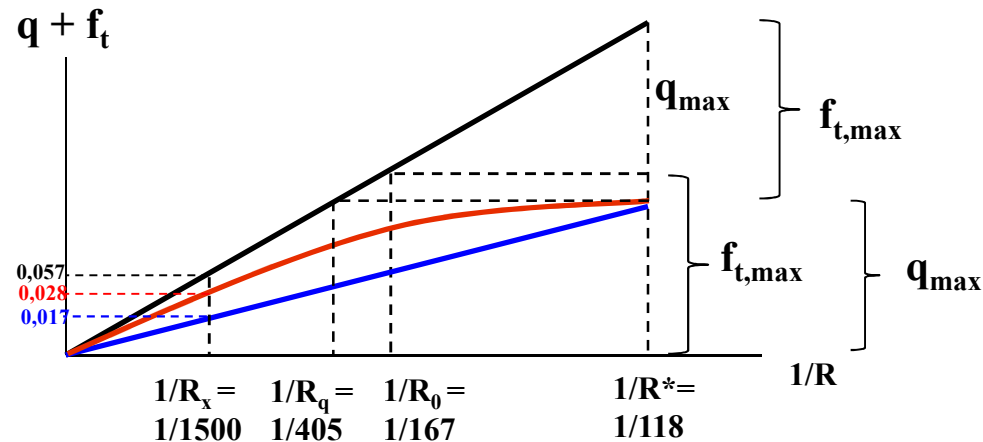


Raggi superiori al minimo (7)

Esempio: $V = 60 \text{ km/h}$; $f_{t\max,60} = 0,17$ $q_{\max} = 0,07$; $n-1 = -0,64$;

$R^* = 118 \text{ m}$; $R_0 = 167 \text{ m}$; $R_q = 405 \text{ m}$;

	$R_x = 500 \text{ m}$		$R_x = 250 \text{ m}$		$R_x = 140 \text{ m}$	
Criterio	$f_{t_{Rx}}$	q_{Rx}	$f_{t_{Rx}}$	q_{Rx}	$f_{t_{Rx}}$	q_{Rx}
I	0,057	0	0,114	0	0,17	0,032
II	0	0,057	0,043	0,07	0,132	0,07
III	0,040	0,017	0,080	0,033	0,143	0,059
IV	0,029	0,028	0,070	0,043	0,139	0,063



Raggi superiori al minimo (8)

$$q = \frac{V^2}{127} K \cdot R^{n-1} \quad \ln(q) = (n-1) \cdot \ln(R) + \ln\left(\frac{K \cdot V^2}{127}\right)$$

$$R^* = \frac{V^2}{127 \cdot (f_{t,\max} + q_{\max})}$$

$$q_{\max} = \frac{V^2}{127} K \cdot R^{*(n-1)} \quad \frac{q_{\max}}{R^{*(n-1)}} = \frac{K \cdot V^2}{127}$$

$$\ln(q) = (n-1) \cdot \ln(R) + \ln(q_{\max}) - (n-1) \ln(R^*)$$

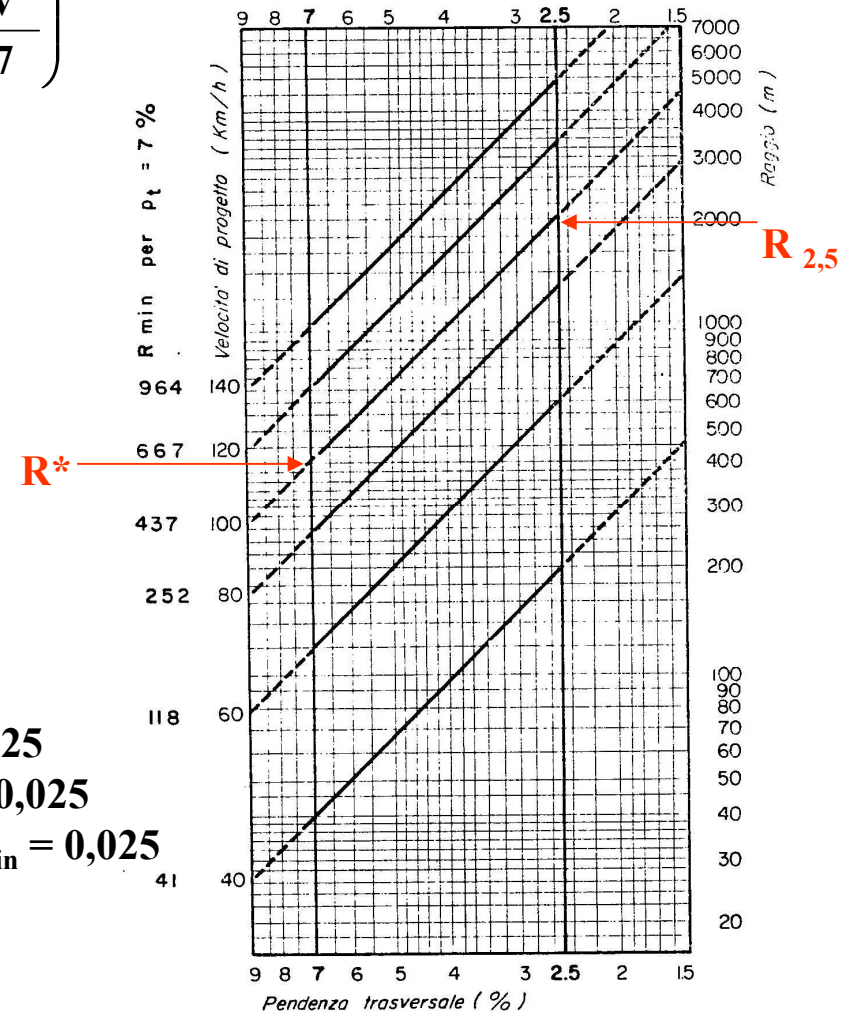
$$\frac{\ln(q_{\min}) - \ln(q_{\max})}{\ln(R_{2,5}) - \ln(R^*)} = (n-1) = -0,64$$

Strade extr.: $R_{2,5} = 5 R^*$; $q_{\max} = 0,07$; $q_{\min} = 0,025$

Strade D: $R_{2,5} = 2,95 R^*$; $q_{\max} = 0,05$; $q_{\min} = 0,025$

Strade E, F urb.: $R_{2,5} = 1,69 R^*$; $q_{\max} = 0,035$; $q_{\min} = 0,025$

$$\ln(q) = -0,64 \cdot \ln(R) + \ln(q_{\max}) + 0,64 \cdot \ln(R^*)$$



Raggi superiori al minimo (9)

$$\ln(q) = -0,64 \cdot \ln(R) + \ln(q_{\max}) + 0,64 \cdot \ln(R^*)$$

$$R^* = \frac{V_{p,\max}^2}{127 \cdot (f_{t,\max} + q_{\max})}$$

R = 252 m

V_p = 80 km/h, q = q_{max} = 0,07, f_t = 0,130

V_p = 68 km/h, q ≈ 0,053, f_t = 0,090

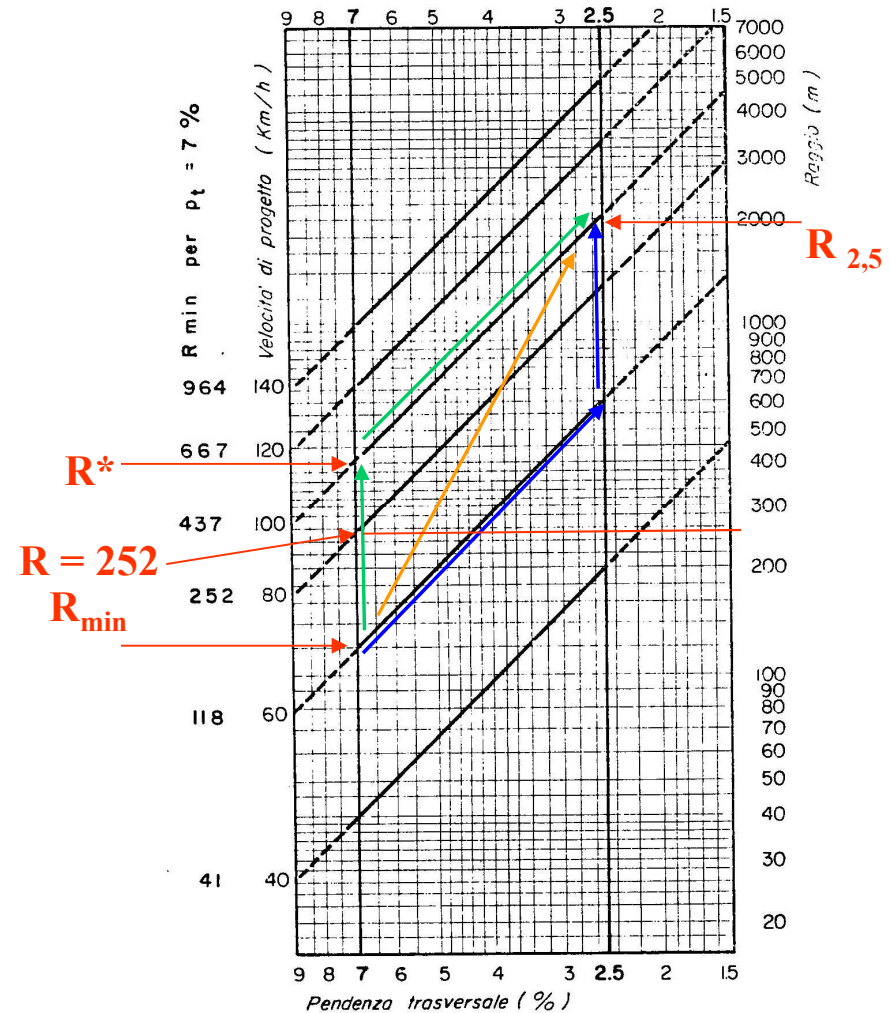
V_p = 60 km/h, q ≈ 0,043, f_t = 0,069

V_p = 80 km/h,

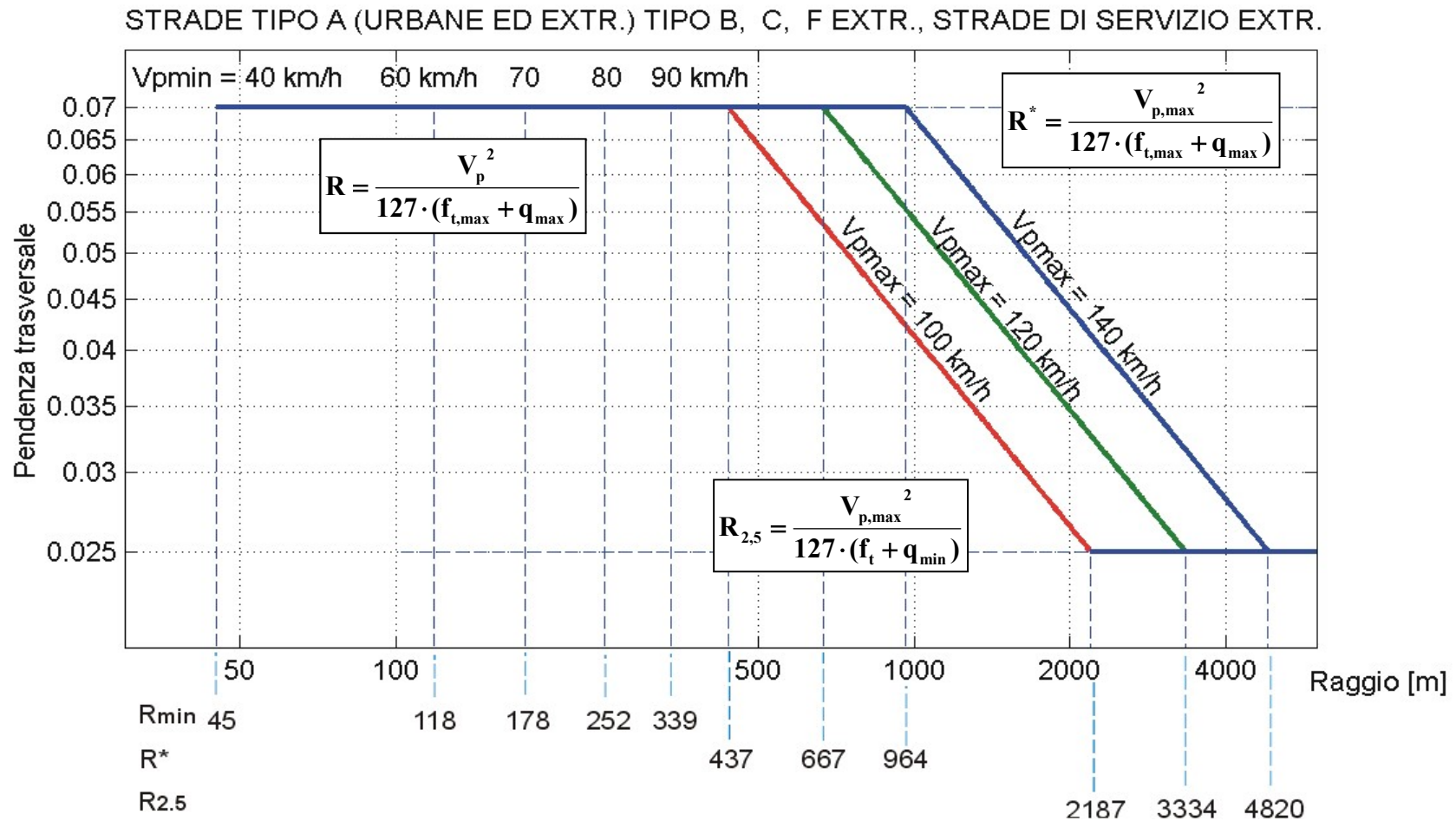
f_t = 0,13, q = q_{max} = 0,07, R = 252

f_t = 0,042, q ≈ 0,038, R = 650m

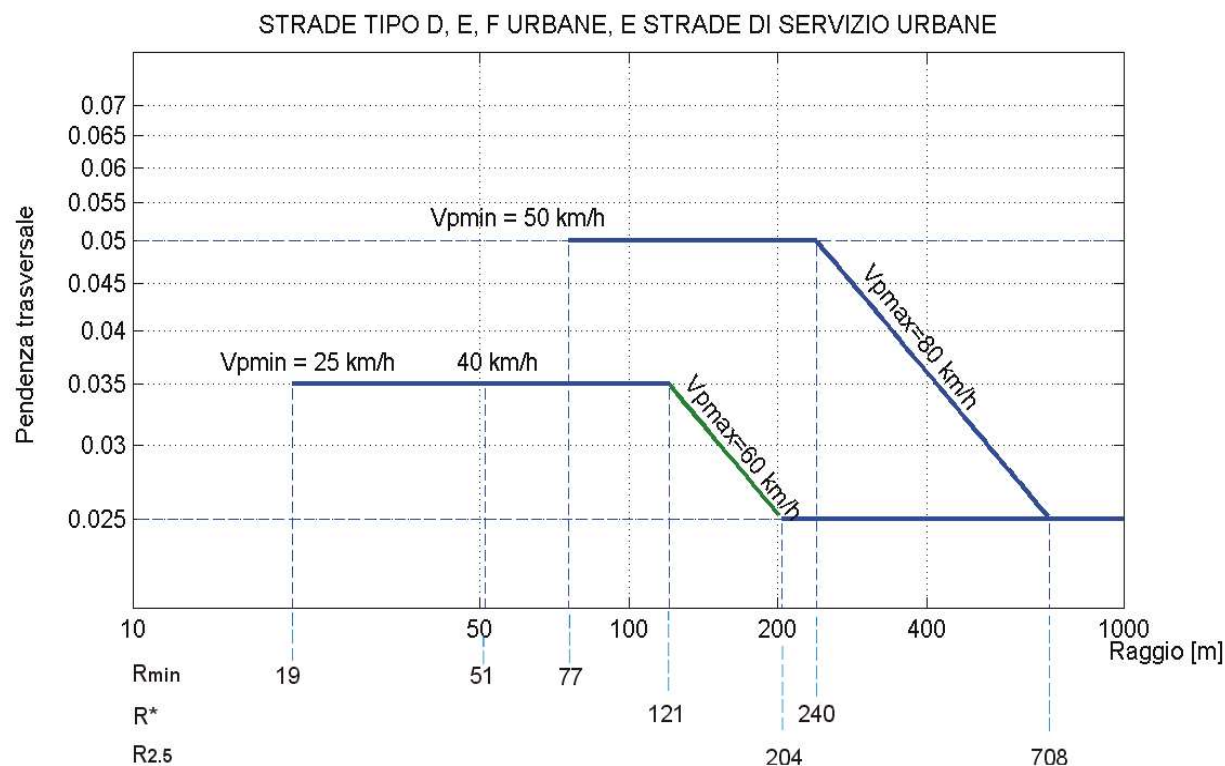
f_t = 0,012, q = 0,025, R = 1350 m



Raggi superiori a quello minimo (10)



Raggi superiori a quello minimo (11)



Raggi superiori a quello minimo (12)

STRADA TIPO	A	B	C F extraurbane	D	E F urbane
R' [m]	10250	7500	5250	2000	1150

STRADA DI SERVIZIO	A extraurbane.	A urbane	B F extraurbane	D
R' [m]	5250	1150	5250	1150

$$R' = \frac{V_{p,max}^2}{127 \cdot [f_t + (-0,025)]}$$

Valori minimi di raggio per mantenere la contropendenza della carreggiata

$$J = \sqrt{i_c^2 + i_l^2}$$

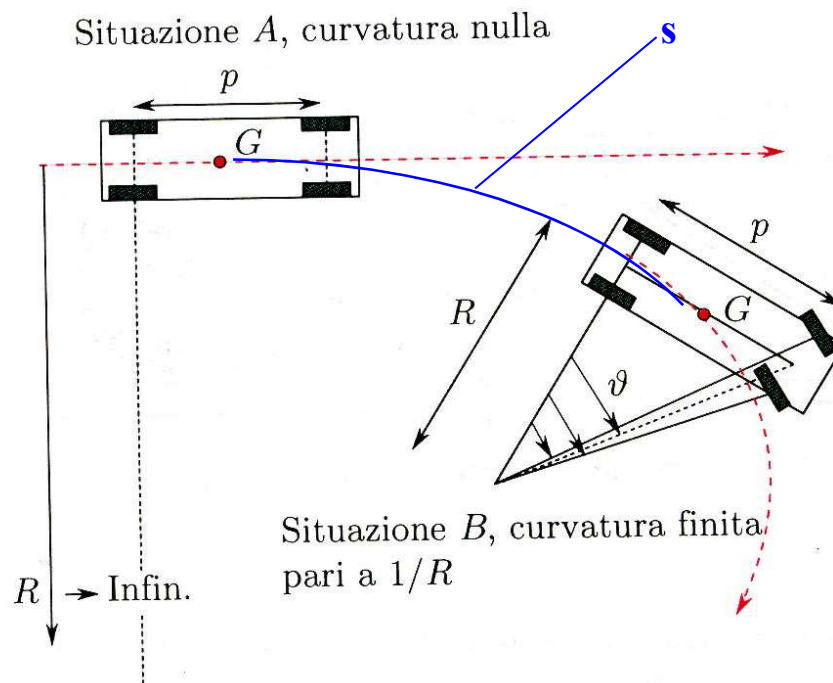
$$i_c = q * 100; i_l = i \%$$

$J \leq 10 \%$ per strade di tipo A e B

$J \leq 12 \%$ per le altre strade in condizioni ordinarie

$J \leq 8 \%$ per tutte le strade in condizioni di frequente innevamento

Elementi a curvatura variabile



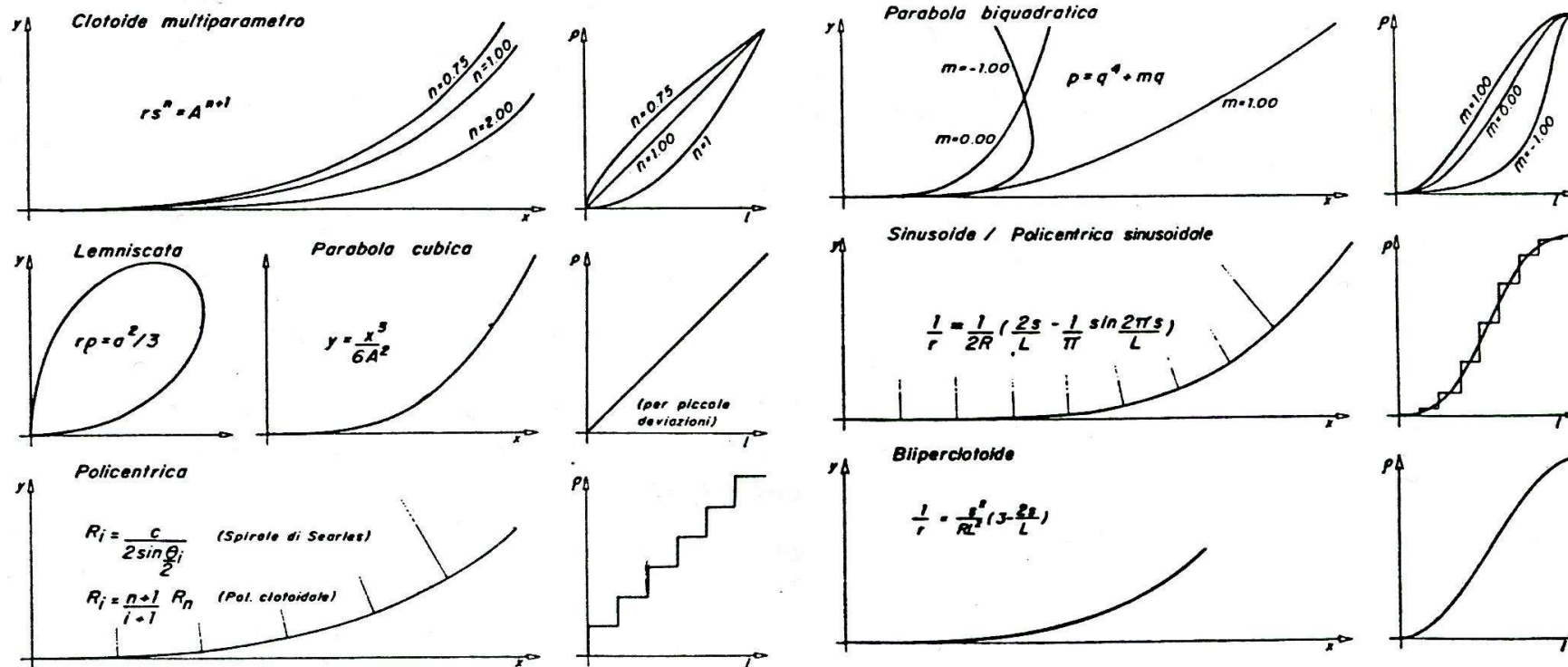
$$\frac{p}{R} = \sin(\vartheta) \cong \tan(\vartheta) \cong \vartheta$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\vartheta}{t} = \frac{p/R}{s/v} = \frac{p \cdot v}{R \cdot s}$$

$$R \cdot s = \frac{p \cdot v}{\dot{\vartheta}}$$

Curve a curvatura variabile



lunghezza
unitaria o
ridotta

$$l = \frac{s}{L}$$

curvatura
unitaria o
ridotta

$$\rho = \frac{R}{r}$$

Clotoide multiparametro (1)

Clotoide multiparametro

$$r * s^n = A^{n+1}$$

r = raggio puntuale;

s = ascissa curvilinea;

A = parametro di scala

n = fattore di forma

Per

$n = -1$

$r = s$

Spirale

$n = 0$

$r = A$

Cerchio

$0 < n < 1$ (p. e. $n = 0,5$)

$r * s^{0,5} = A^{1,5}$

Ipoclotoidi

$n = 1$

$r \times s = A^2$

Clotoide

$1 < n < \infty$ (p.e. $n = 2$)

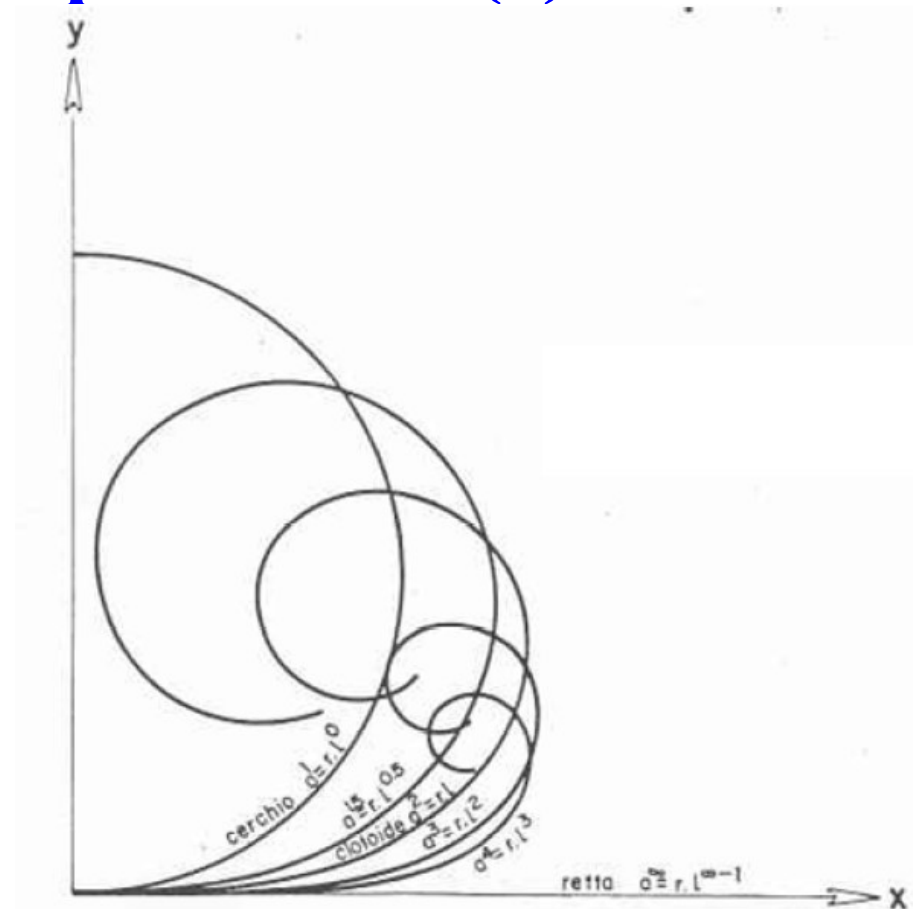
$r * s^2 = A^3$

Iperclotoidi

$n = \infty$

$r = \infty$

Retta



Clotoide multiparametro (2)

Clotoide multiparametro

$$r * s^n = A^{n+1}$$

r = raggio puntuale;

s = ascissa curvilinea;

A = parametro di scala

n = fattore di forma

Per

$$n = -1$$

$$r = s$$

Spirale

$$n = 0$$

$$r = A$$

Cerchio

$$0 < n < 1 \quad (\text{p. e. } n = 0,5)$$

$$r * s^{0,5} = A^{1,5}$$

Ipoclotoidi

$$n = 1$$

$$r \times s = A^2$$

Clotoide

$$1 < n < \infty \quad (\text{p.e. } n = 2)$$

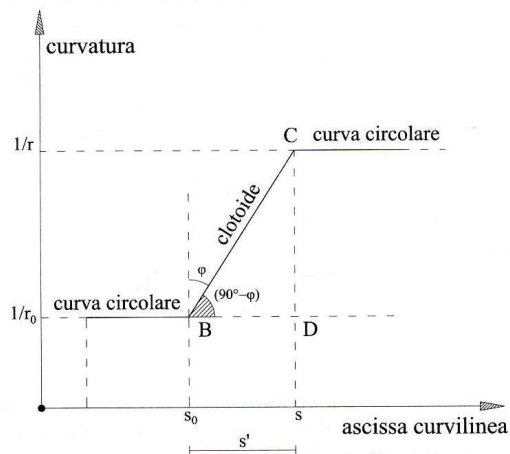
$$r * s^2 = A^3$$

Iperclotoidi

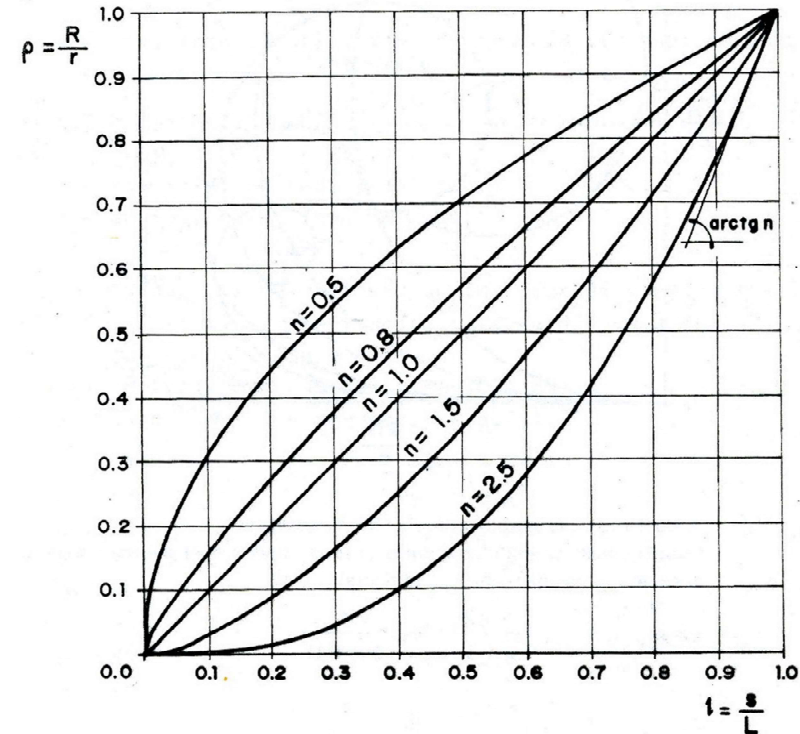
$$n = \infty$$

$$r = \infty$$

Retta



$$\text{tg}(\varphi) = A^2$$



Clotoide multiparametro (3)

$$\vartheta \cong \frac{p}{R}$$

V (vel. Veic.)	θ (Ang. sterzo)	θ' (Vel. Sterzo)	a (acc. veic.)	L (lun.. Arco)	R (rag. curvat.)	Tipo curva
Costante	Nulla	Nulla	Qualsiasi	Infinito	Infinito	Retta
Costante	Costante	Nulla	Nulla	Finito	Costante	Cerchio
Costante	Variabile	Costante	Nulla	Finito	Variabile	Clotoide
Variabile	Variabile	Costante	Costante	Finito	Variabile	Ipoclotoide
Costante	Variabile	Variabile	Nulla	Finito	Variabile	Iperclotoide
Variabile	Variabile	Variabile	Costante	Finito	Variabile	Clotoide

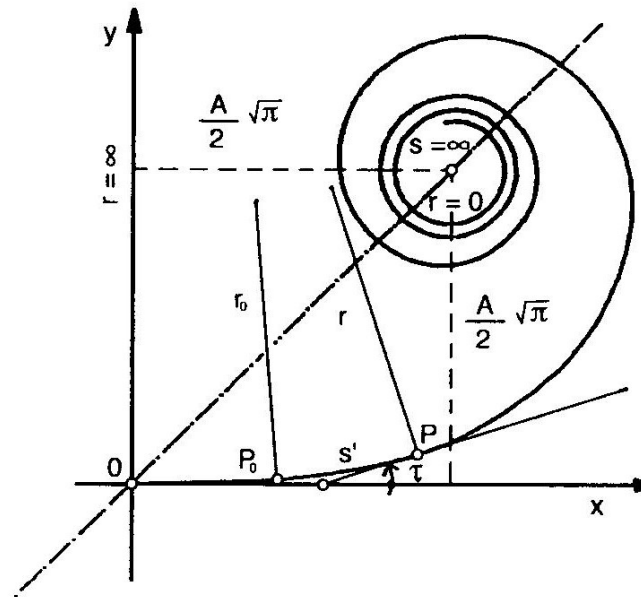
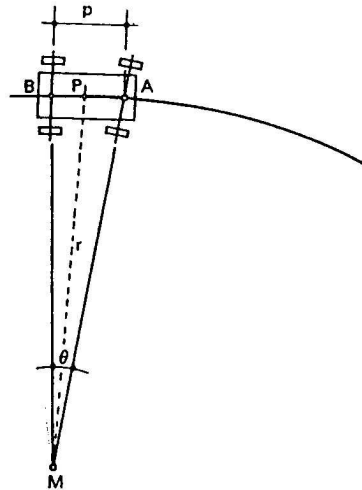
$$t = \frac{L}{v} \quad \dot{\vartheta} = \frac{\vartheta}{t} \quad R \cdot L = \frac{p \cdot v}{\dot{\vartheta}} = \cos t = A^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot L}{a}} \quad \dot{\vartheta} = \frac{\vartheta}{t} \quad R^2 \cdot L = \frac{p^2 \cdot a}{2 \cdot \dot{\vartheta}^2} = \cos t = A^3 \quad R \cdot L^{0,5} = A^{1,5}$$

$$t = \frac{L}{v} \quad \vartheta = \frac{1}{2} \cdot \ddot{\vartheta} \cdot t^2 = \frac{p}{R} \quad R \cdot L^2 = \frac{2 \cdot p \cdot v^2}{\ddot{\vartheta}} = \cos t = A^3$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot L}{a}} \quad \vartheta = \frac{1}{2} \cdot \ddot{\vartheta} \cdot t^2 = \frac{p}{R} \quad R \cdot L = \frac{p \cdot a}{\ddot{\vartheta}} = \cos t = A^2$$

La Clotoide (1)

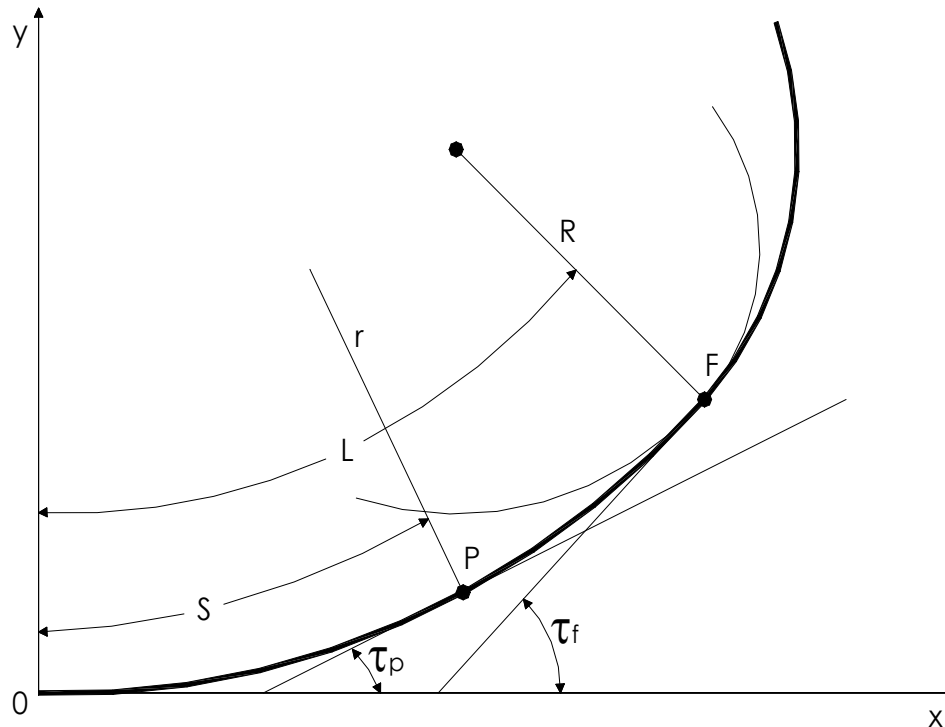


$$\left. \begin{aligned} \frac{s}{A^2} &= \frac{1}{r} \\ \frac{s_0}{A^2} &= \frac{1}{r_0} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}{s - s_0} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}{s'}$$

$$\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}}{A^2} = \frac{\frac{\mathbf{p}}{r} - \frac{\mathbf{p}}{r_0}}{\frac{s'}{v}} = \frac{\theta - \theta_0}{\Delta t} = \dot{\theta}$$

La Clotoide (2)



Clotoide

$$\mathbf{r} * \mathbf{s} = \mathbf{A}^2$$

r, raggio puntuale

s, ascissa curvilinea

A, parametro di scala

R, raggio curva circolare

L, lunghezza clotoide

τ_f angolo di deviazione nel punto F

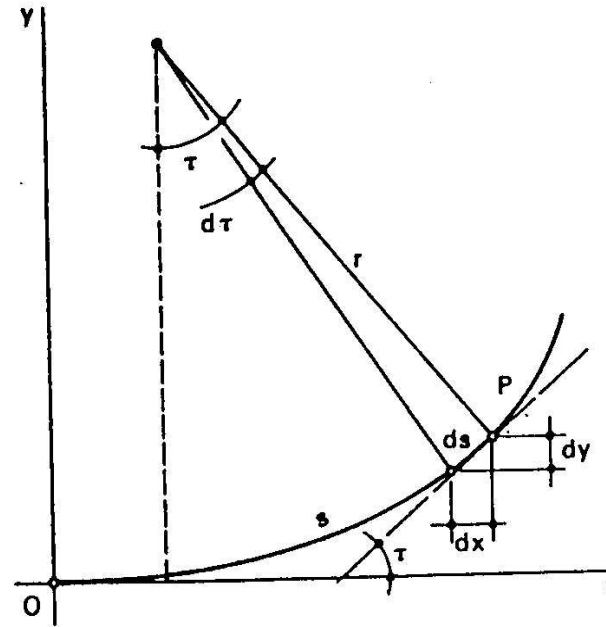
Equazione cartesiana della clotoide (1)

$$dx = \cos \tau \, ds \quad dy = \sin \tau \, ds$$

Equazione intrinseca della clotoide $r s = A^2$

$$d\tau = \frac{ds}{r} = \frac{s \cdot ds}{A^2} \quad \tau = \frac{s^2}{2 \cdot A^2} = \frac{s}{2 \cdot r} = \frac{A^2}{2 \cdot r^2}$$

$$s = A \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \quad ds = A \frac{\sqrt{2}}{2} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau$$



$$\begin{aligned} x &= \int_0^s dx = \int_0^s \cos \tau \cdot ds = \frac{A \sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^\tau \tau^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos \tau \cdot d\tau = \frac{A \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^\tau \tau^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} - \dots\right) \cdot d\tau = \frac{A \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^\tau \left(\tau^{-\frac{1}{2}} - \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{2!} + \dots\right) \cdot d\tau = \\ &= \frac{A \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \left[\frac{\tau^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \dots \right]_0^\tau = \frac{A \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \left[\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \dots \right]_0^\tau = A \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \dots\right) \cong s \end{aligned}$$

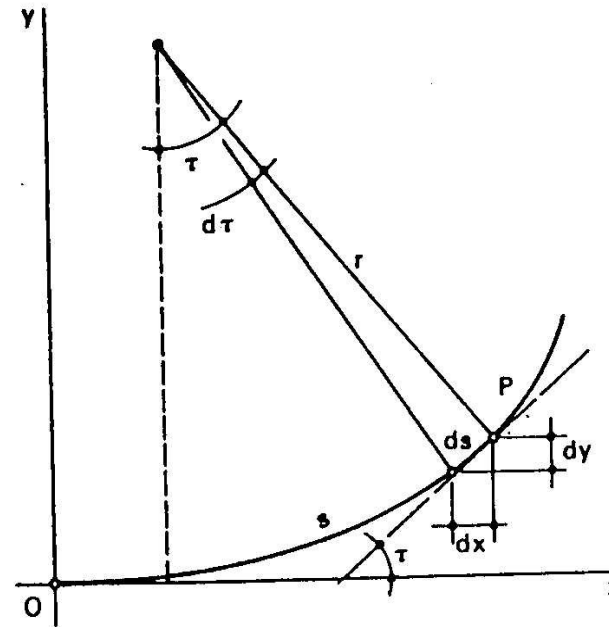
Equazione cartesiana della clotoide (2)

$$dx = \cos \tau \, ds \quad dy = \sin \tau \, ds$$

Equazione intrinseca della clotoide $r s = A^2$

$$d\tau = \frac{ds}{r} = \frac{s \cdot ds}{A^2} \quad \tau = \frac{s^2}{2 \cdot A^2} = \frac{s}{2 \cdot r} = \frac{A^2}{2 \cdot r^2}$$

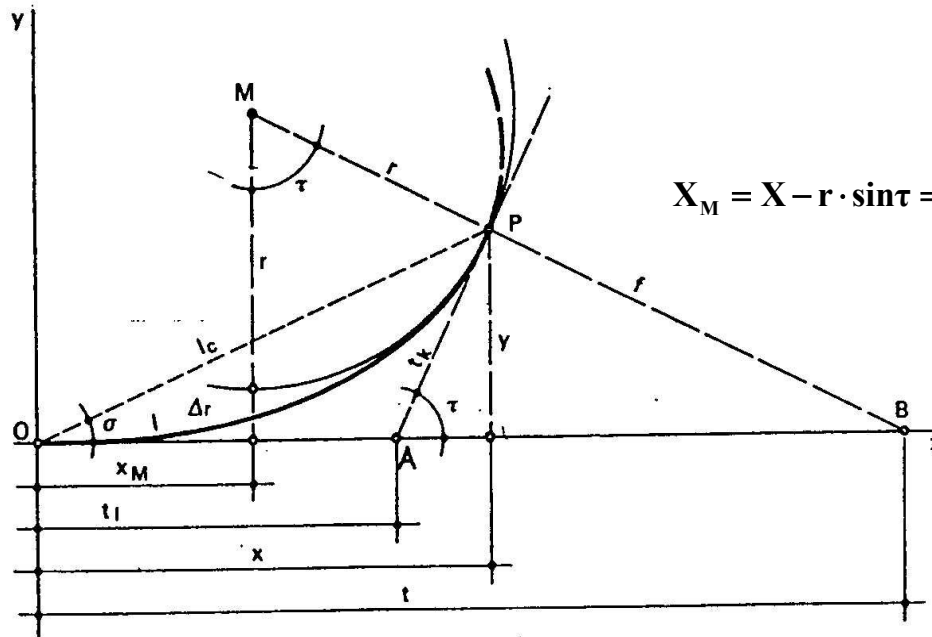
$$s = A \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \quad ds = A \frac{\sqrt{2}}{2} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau$$



$$y = \int_0^s dy = \int_0^s \sin \tau \cdot ds = \frac{A \sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^\tau \tau^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin \tau \cdot d\tau = \frac{A \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^\tau \tau^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\tau - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^5}{5!} - \dots \right) \cdot d\tau = \frac{A \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^\tau \left(\tau^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau^{\frac{5}{2}}}{3!} + \dots \right) \cdot d\tau =$$

$$= \frac{A \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \left[\frac{\tau^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\tau^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + \dots \right]_0^\tau = \frac{A \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \left[\frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\tau^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \dots \right]_0^\tau = A \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \dots \right) \cong \frac{s^2}{6 \cdot r}$$

Elementi caratteristici della clotoide (3)

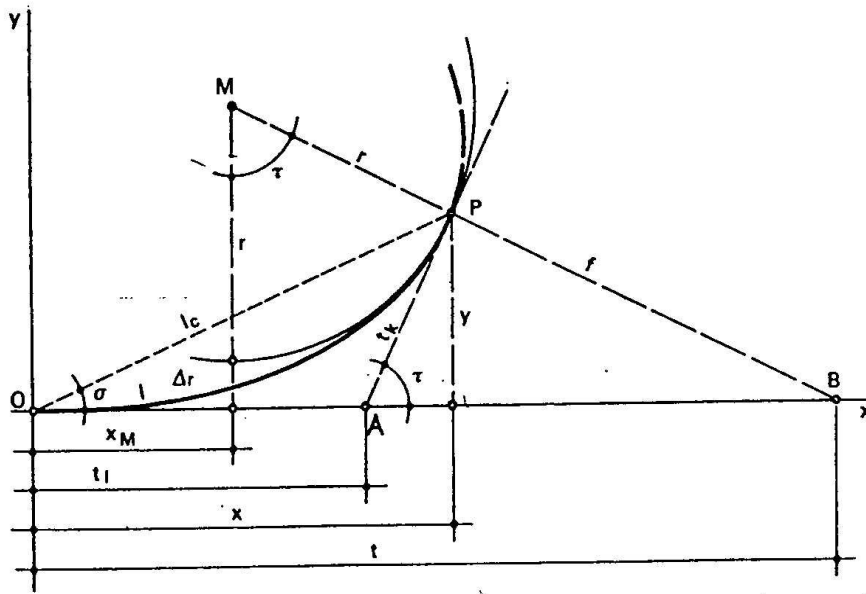


$$X_M = X - r \cdot \sin \tau = A \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \dots \right) - r \cdot \left(\tau - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^5}{5!} - \dots \right)$$

$$\begin{aligned} X_M &\cong A \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} \right) - r \cdot \left(\tau - \frac{\tau^3}{6} \right) = \frac{s}{\sqrt{2 \cdot \tau}} \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} \right) - \frac{s}{2 \cdot \tau} \cdot \left(\tau - \frac{\tau^3}{6} \right) = \\ &= \frac{s}{\sqrt{2 \cdot \tau}} \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} \right) - \frac{s}{2 \cdot \tau} \cdot \left(\tau - \frac{\tau^3}{6} \right) = \frac{s}{2} \left(2 - \frac{\tau^2}{5} - 1 + \frac{\tau^2}{6} \right) = \frac{s}{2} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{30} \right) = \frac{A^2}{2 \cdot r} \left(1 - \frac{\tau^2}{30} \right) \end{aligned}$$

$$X_M = X - r \cdot \sin \tau \cong \frac{s}{2} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{30} \right) = \frac{A^2}{2 \cdot r} \left(1 - \frac{\tau^2}{30} \right)$$

Elementi caratteristici della clotoide (4)



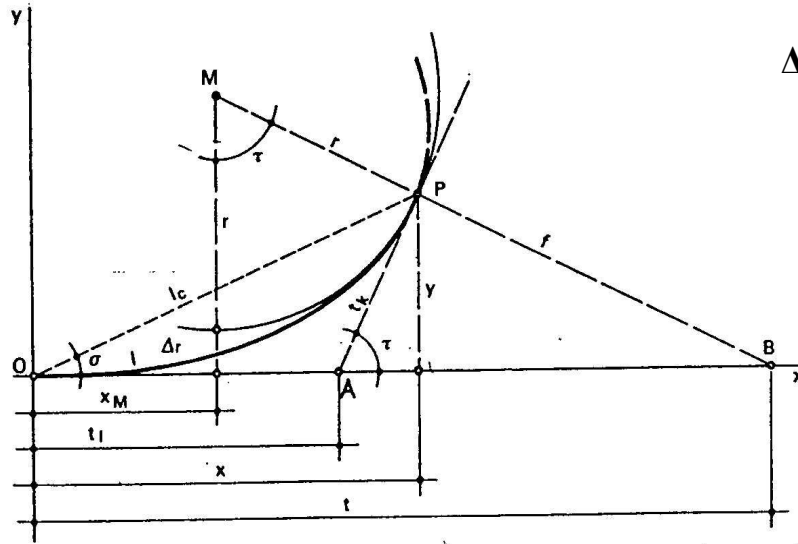
$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{Y} + \mathbf{r} \cdot \cos \tau = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$$

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{Y} + \mathbf{r} \cdot (\cos \tau - 1)$$

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{y} + \mathbf{r} \cdot (\cos \tau - 1) = \mathbf{A} \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \dots \right) + \mathbf{r} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{24} - \dots - 1 \right) = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{2 \cdot \tau}} \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \dots \right) + \frac{\mathbf{s}}{2 \cdot \tau} \cdot \left(-\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{24} - \dots \right)$$

$$= s \cdot \left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \dots - \frac{\tau}{4} + \frac{\tau^3}{48} - \dots \right) = s \cdot \tau \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{\tau^2}{42} + \dots - \frac{1}{4} + \frac{\tau^2}{48} - \dots \right) \cong s \cdot \frac{s}{2 \cdot r} \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{\tau^2}{336} \right) = \frac{s^2}{24 \cdot r} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{28} \right) = \frac{A^4}{24 \cdot r^3} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{28} \right)$$

Elementi caratteristici della clotoide (5)



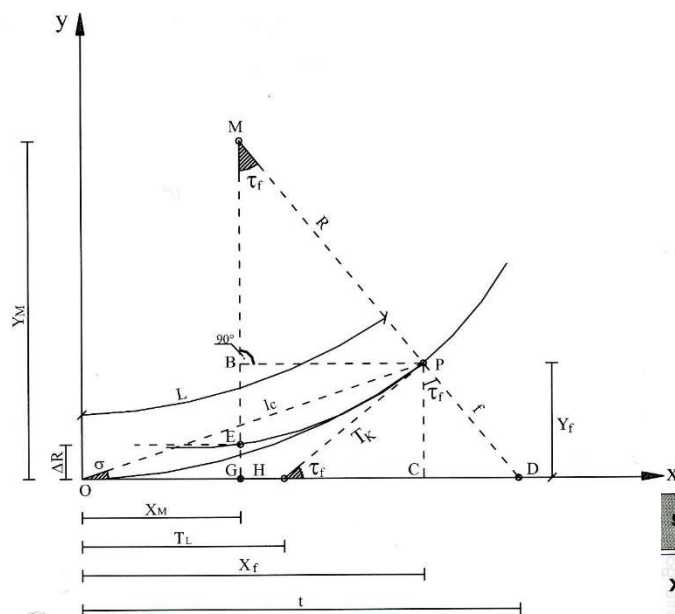
$$\Delta r = \frac{s^2}{24 \cdot r} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{28} + \frac{\tau^4}{1320} - \dots \right) = \frac{A^4}{24 \cdot r^3} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{28} + \frac{\tau^4}{1320} - \dots \right)$$

$$A = \sqrt[4]{\frac{24 \cdot r^3 \cdot \Delta r}{\left(1 - \frac{\tau^2}{28} + \frac{\tau^4}{1320} - \dots \right)}}$$

$$A \cong \sqrt[4]{\frac{24 \cdot r^3 \cdot \Delta r}{\left(1 - \frac{\tau^2}{28} \right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\tau^2}{28} \right)}{\left(1 + \frac{\tau^2}{28} \right)}} = \sqrt[4]{24 \cdot r^3 \cdot \Delta r \cdot \frac{\left(1 + \frac{\tau^2}{28} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\tau^2}{28} \right)^2 \right]}} \cong \sqrt[4]{24 \cdot r^3 \cdot \Delta r \cdot \left(1 + \frac{\tau^2}{28} \right)} = \sqrt[4]{24 \cdot r^3 \cdot \Delta r \cdot \left(1 + \frac{s^2}{4 \cdot r^2 \cdot 28} \right)}$$

$$A \cong \sqrt[4]{24 \cdot r^3 \cdot \Delta r \cdot \left(1 + \frac{3}{14} \frac{s^2}{24 \cdot r^2} \right)} \cong \sqrt[4]{24 \cdot r^3 \cdot \Delta r \cdot \left(1 + \frac{3}{14} \frac{\Delta r}{r} \right)}$$

Elementi caratteristici della clotoide (6)

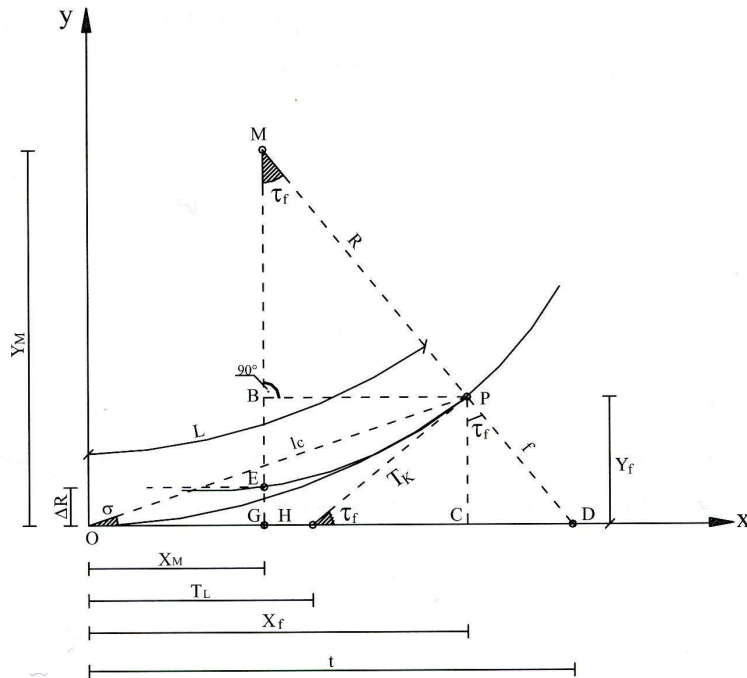


tangente lunga

$$t_l = x_f - y_f \cotg \tau_f$$

SIMBOLI	FORMULE ESATTE	FORMULE APPROSSIMATE
X_f	$A \cdot \sqrt{2\tau_f} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-2)}}{(4i-3) \cdot [(2i-2)!]} \right]$	L
Y_f	$A \cdot \sqrt{2\tau_f} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-1)}}{(4i-1) \cdot [(2i-1)!]} \right]$	$\frac{L^2}{6R}$
ΔR	$\frac{A^4}{24R^3} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{6 \cdot \tau_f^{(2i-2)}}{(2i)! \cdot (4i-1)} \right] = \frac{L^2}{24R} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{6 \cdot \tau_f^{(2i-2)}}{(2i)! \cdot (4i-1)} \right]$	$\frac{A^4}{24R^3} = \frac{L^2}{24R}$
X_M	$A \cdot \frac{\sqrt{2\tau_f}}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-2)}}{(2i-1)! \cdot (4i-3)} \right]$	$\frac{L}{2}$
Y_M	$A \cdot \frac{\sqrt{2\tau_f}}{2} \cdot \left[\frac{1}{\tau_f} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-1)}}{(2i)! \cdot (4i-1)} \right]$	$R + \frac{A^4}{24R^3} = R + \frac{L^2}{24R}$
T_L	$T_L = A \cdot \sqrt{2\tau_f} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \tau_f^{(2i-2)}}{(4i-3) \cdot [(2i-2)!]} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \tau_f^{(2i-1)}}{(4i-1) \cdot [(2i-1)!]} \times \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-2)}}{(2i-2)!}}{\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-1)}}{(2i-1)!}} \right] \right\}$	$\frac{2}{3} \cdot L$

Elementi caratteristici della clotoide (7)



tangente corta

lunghezza della corda $l_c = x_f / \cos\sigma$

angolo $\sigma = \arctg y_f / x_f$

$$\mathbf{t}_k = \mathbf{y}_f / \mathbf{sen}\tau_f$$

$$\mathbf{l}_c = \mathbf{x}_f / \cos\sigma$$

SIMBOLI	FORMULE ESATTE	FORMULE APPROSSIMATE
T_K	$\frac{A \cdot \sqrt{2\tau_f} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-1)}}{(4i-1) \cdot [(2i-1)!]} \right]}{\left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-1)}}{(2i-1)!} \right]}$	$\frac{1}{3} \cdot L$
σ	$\arctg \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-1)}}{(4i-1) \cdot [(2i-1)!]}}{\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-2)}}{(4i-3) \cdot [(2i-2)!]}} \right]$	$\arctg \left(\frac{A^2}{6R^2} \right)$
l_c	$l_c = \left\{ \begin{array}{l} A \cdot \sqrt{2\tau_f} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-i)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-1)}}{(4i-1) \cdot [(2i-1)!]} \\ \text{sen} \left[\arctg \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-1)}}{(4i-1) \cdot [(2i-1)!]}}{\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau_f^{(2i-2)}}{(4i-3) \cdot [(2i-2)!]}} \right] \end{array} \right\}$	L

Tabelle per la clotoide unitaria

APPENDICE "A" - n = 1,00

s	τ^c	x_f	y_f	x_M	y_M	Δr	t_L	t_K	r	σ^c	l_c
0.005	0.000796	0.005000	0.000000	0.002500	200.000000	0.000000	0.003333	0.001667	200.000000	0.000265	0.005000
0.010	0.003183	0.010000	0.000000	0.005000	100.000000	0.000000	0.006667	0.003333	100.000000	0.001061	0.010000
0.015	0.007162	0.015000	0.000001	0.007500	66.666667	0.000000	0.010000	0.005000	66.666667	0.002387	0.015000
0.020	0.012732	0.020000	0.000001	0.010000	50.000000	0.000000	0.013333	0.006667	50.000000	0.004244	0.020000
0.025	0.019894	0.025000	0.000003	0.012500	40.000001	0.000001	0.016667	0.008333	40.000000	0.006631	0.025000
0.030	0.028648	0.030000	0.000004	0.015000	33.333334	0.000001	0.020000	0.010000	33.333333	0.009549	0.030000
0.035	0.038993	0.035000	0.000007	0.017500	28.571430	0.000002	0.023333	0.011667	28.571429	0.012998	0.035000
0.040	0.050930	0.040000	0.000011	0.020000	25.000003	0.000003	0.026667	0.013333	25.000000	0.016977	0.040000
0.045	0.064458	0.045000	0.000015	0.022500	22.222226	0.000004	0.030000	0.015000	22.222222	0.021486	0.045000
0.050	0.079577	0.050000	0.000021	0.025000	20.000005	0.000005	0.033333	0.016667	20.000000	0.026526	0.050000
0.055	0.096289	0.055000	0.000028	0.027500	18.181825	0.000007	0.036667	0.018333	18.181818	0.032096	0.055000
0.060	0.114592	0.060000	0.000036	0.030000	16.666676	0.000009	0.040000	0.020000	16.666667	0.038197	0.060000
0.065	0.134486	0.065000	0.000046	0.032500	15.384627	0.000011	0.043333	0.021667	15.384615	0.044829	0.065000
0.070	0.155972	0.070000	0.000057	0.035000	14.285729	0.000014	0.046667	0.023333	14.285714	0.051991	0.070000
0.075	0.179049	0.075000	0.000070	0.037500	13.333351	0.000018	0.050000	0.025000	13.333333	0.059683	0.075000
0.080	0.203718	0.080000	0.000085	0.040000	12.500021	0.000021	0.053333	0.026667	12.500000	0.067906	0.080000
0.085	0.229979	0.085000	0.000102	0.042500	11.764731	0.000026	0.056667	0.028333	11.764706	0.076660	0.085000
0.090	0.257831	0.090000	0.000121	0.045000	11.111141	0.000030	0.060000	0.030000	11.111111	0.085944	0.090000
0.095	0.287275	0.095000	0.000143	0.047500	10.526352	0.000036	0.063333	0.031667	10.526316	0.095758	0.095000
0.100	0.318310	0.100000	0.000167	0.050000	10.000042	0.000042	0.066667	0.033333	10.000000	0.106103	0.100000
0.105	0.350937	0.105000	0.000193	0.052500	9.523858	0.000048	0.070000	0.035000	9.523810	0.116979	0.105000
0.110	0.385155	0.110000	0.000222	0.055000	9.090965	0.000055	0.073333	0.036667	9.090909	0.128385	0.110000
0.115	0.420965	0.114999	0.000253	0.057500	8.695716	0.000063	0.076667	0.038333	8.695652	0.140322	0.115000

$$s = \frac{L}{A} = \frac{A}{R} \uparrow \uparrow \tau^c = \frac{L}{2 \cdot R} \frac{200}{\pi}$$

$$\uparrow r = \frac{R}{A}$$

Esempio utilizzo Tabelle

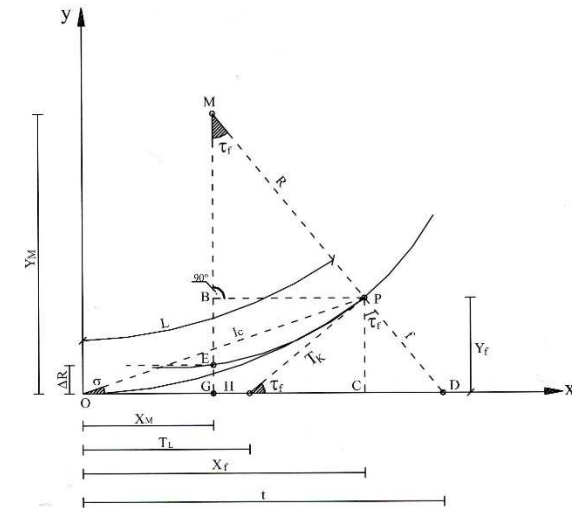
A = 272 m; R = 340 m

$$r = \frac{R}{A} = \frac{340}{272} = 1,25$$



(segue) APPENDICE "A" - n = 1,00

s	τ^c	x_f	y_f	x_M	y_M	Δr	t_L	t_K	r	σ^c	l_c
0.695	15.375163	0.690957	0.055718	0.346825	1.452807	0.013958	0.464757	0.232961	1.438849	5.122520	0.693200
0.700	15.597184	0.695810	0.056922	0.349301	1.442832	0.014261	0.468142	0.234676	1.428571	5.196416	0.698134
0.705	15.820797	0.700658	0.058143	0.351776	1.433008	0.014568	0.471529	0.236391	1.418440	5.270838	0.703067
0.710	16.046001	0.705503	0.059382	0.354250	1.423330	0.014879	0.474918	0.238108	1.408451	5.345786	0.707997
0.715	16.272797	0.710342	0.060637	0.356723	1.413796	0.015195	0.478308	0.239826	1.398601	5.421261	0.712926
0.720	16.501184	0.715178	0.061910	0.359195	1.404404	0.015515	0.481700	0.241546	1.388889	5.497261	0.717852
0.725	16.731163	0.720008	0.063200	0.361667	1.395149	0.015839	0.485094	0.243268	1.379310	5.573788	0.722777
0.730	16.962734	0.724834	0.064508	0.364138	1.386031	0.016168	0.488489	0.244991	1.369863	5.650840	0.727699
0.735	17.195896	0.729655	0.065833	0.366608	1.377046	0.016501	0.491886	0.246715	1.360544	5.728419	0.732619
0.740	17.430649	0.734472	0.067177	0.369077	1.368191	0.016839	0.495285	0.248441	1.351351	5.806522	0.737537
0.745	17.666994	0.739283	0.068537	0.371546	1.359463	0.017182	0.498685	0.250169	1.342282	5.885152	0.742453
0.750	17.904931	0.744089	0.069916	0.374013	1.350862	0.017529	0.502088	0.251899	1.333333	5.964306	0.747367
0.755	18.144459	0.748890	0.071313	0.376480	1.342383	0.017880	0.505492	0.253630	1.324503	6.043986	0.752278
0.760	18.385579	0.753686	0.072728	0.378946	1.334026	0.018236	0.508898	0.255363	1.315789	6.124190	0.757186
0.765	18.628290	0.758476	0.074161	0.381411	1.325787	0.018597	0.512306	0.257098	1.307190	6.204920	0.762093
0.770	18.872593	0.763261	0.075613	0.383875	1.317664	0.018963	0.515716	0.258835	1.298701	6.286174	0.766997
0.775	19.118488	0.768040	0.077082	0.386338	1.309655	0.019333	0.519129	0.260573	1.290323	6.367953	0.771898
0.780	19.365973	0.772813	0.078571	0.388800	1.301759	0.019708	0.522543	0.262313	1.282051	6.450256	0.776797
0.785	19.615051	0.777580	0.080078	0.391261	1.293973	0.020087	0.525960	0.264056	1.273885	6.533084	0.781693
0.790	19.865720	0.782342	0.081603	0.393721	1.286295	0.020472	0.529378	0.265800	1.265823	6.616435	0.786586
0.795	20.117981	0.787097	0.083148	0.396180	1.278723	0.020861	0.532799	0.267547	1.257862	6.700310	0.791477
0.800	20.371833	0.791847	0.084711	0.398639	1.271255	0.021255	0.536222	0.269295	1.250000	6.784710	0.796365
0.805	20.627276	0.796590	0.086294	0.401096	1.263891	0.021655	0.539648	0.271046	1.242236	6.869632	0.801250



$$L = s \cdot A = 0,800 \cdot 272 = 217,60 \text{ m}$$

$$X_f = x_f \cdot A = 0,791847 \cdot 272 = 215,382 \text{ m}$$

$$Y_f = y_f \cdot A = 23,04 \text{ m}$$

$$X_M = x_M \cdot A = 108,42 \text{ m}$$

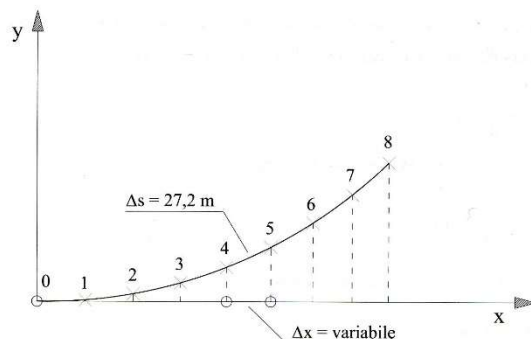
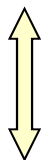
$$Y_M = y_M \cdot A = 345,78 \text{ m}$$

$$\Delta R = \Delta r \cdot A = 5,78 \text{ m}$$

Esempio tracciamento clotoide

$$\Delta S = \frac{L}{8} = \frac{217,60}{8} = 27,20$$

$$\Delta s = \frac{\Delta S}{A} = \frac{27,2}{272} = 0,10$$



APPENDICE "A" - n = 1,00

s	c	x _i	y _i	x _M	y _M	Δr	t _L	t _K	r	σ ^c	t _c
0.005	0.000796	0.005000	0.000000	0.002500	200.000000	0.000000	0.003333	0.001667	200.000000	0.000265	0.005000
0.010	0.003183	0.010000	0.000000	0.005000	100.000000	0.000000	0.006667	0.003333	100.000000	0.001061	0.010000
0.015	0.007162	0.015000	0.000001	0.007500	66.666667	0.000000	0.010000	0.005000	66.666667	0.002387	0.015000
0.020	0.012732	0.020000	0.000001	0.010000	50.000000	0.000000	0.013333	0.006667	50.000000	0.004244	0.020000
0.025	0.019894	0.025000	0.000003	0.012500	40.000001	0.000001	0.016667	0.008333	40.000000	0.006631	0.025000
0.030	0.028648	0.030000	0.000004	0.015000	33.333334	0.000001	0.020000	0.010000	33.333333	0.009549	0.030000
0.035	0.038993	0.035000	0.000007	0.017500	28.571430	0.000002	0.023333	0.011667	28.571429	0.012998	0.035000
0.040	0.050930	0.040000	0.000011	0.020000	25.000003	0.000003	0.026667	0.013333	25.000000	0.016977	0.040000
0.045	0.064458	0.045000	0.000015	0.022500	22.222226	0.000004	0.030000	0.015000	22.222222	0.021486	0.045000
0.050	0.079577	0.050000	0.000021	0.025000	20.000005	0.000005	0.033333	0.016667	20.000000	0.026526	0.050000
0.055	0.096289	0.055000	0.000028	0.027500	18.181825	0.000007	0.036667	0.018333	18.181818	0.032096	0.055000
0.060	0.114592	0.060000	0.000036	0.030000	16.666676	0.000009	0.040000	0.020000	16.666667	0.038197	0.060000
0.065	0.134486	0.065000	0.000046	0.032500	15.384627	0.000011	0.043333	0.021667	15.384615	0.044829	0.065000
0.070	0.155972	0.070000	0.000057	0.035000	14.285729	0.000014	0.046667	0.023333	14.285714	0.051991	0.070000
0.075	0.179049	0.075000	0.000070	0.037500	13.333351	0.000018	0.050000	0.025000	13.333333	0.059683	0.075000
0.080	0.203718	0.080000	0.000085	0.040000	12.500021	0.000021	0.053333	0.026667	12.500000	0.067906	0.080000
0.085	0.229979	0.085000	0.000102	0.042500	11.764731	0.000026	0.056667	0.028333	11.764706	0.076660	0.085000
0.090	0.257831	0.090000	0.000121	0.045000	11.111141	0.000030	0.060000	0.030000	11.111111	0.085944	0.090000
0.095	0.287275	0.095000	0.000143	0.047500	10.526352	0.000036	0.063333	0.031667	10.526316	0.095758	0.095000
0.100	0.318310	0.100000	0.000167	0.050000	10.000042	0.000042	0.066667	0.033333	10.000000	0.106103	0.100000
0.105	0.350937	0.105000	0.000193	0.052500	9.523858	0.000048	0.070000	0.035000	9.523810	0.116979	0.105000
0.110	0.385155	0.110000	0.000222	0.055000	9.090965	0.000055	0.073333	0.036667	9.090909	0.128385	0.110000
0.115	0.420965	0.114999	0.000253	0.057500	8.695716	0.000063	0.076667	0.038333	8.695652	0.140322	0.115000

PUNTO	s	COORD. CARTESIANE	
		X (m)	Y (m)
0	0,00	0,00	0,00
1	0,10	27,20	0,04
2	0,20	54,40	0,36
3	0,30	81,58	1,22
4	0,40	108,73	2,90
5	0,50	135,79	5,66
6	0,60	162,67	9,77
7	0,70	189,26	15,48
8	0,80	215,38	23,04

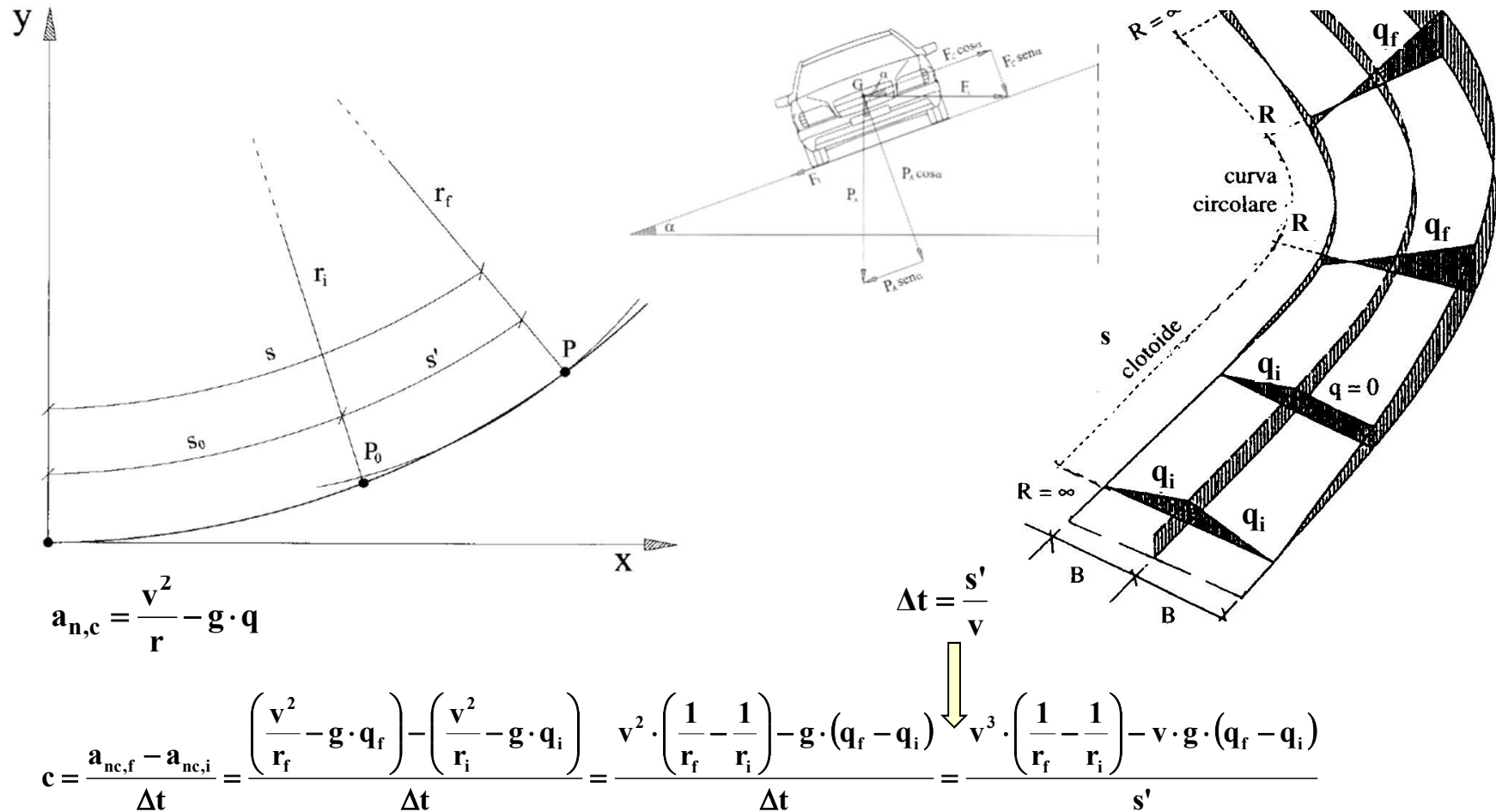
Scelta del parametro A

Le clotoidi vengono inserite nel tracciato in modo da garantire:

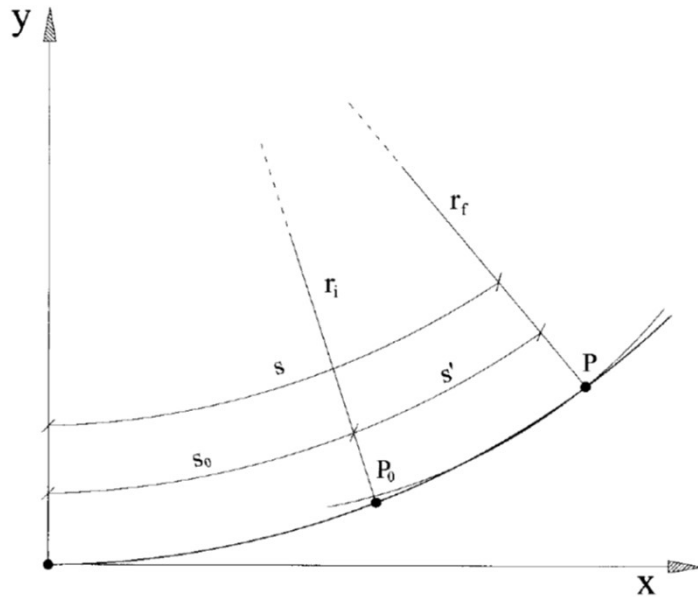
- una variazione di accelerazione centrifuga non compensata (contraccollo) contenuta entro valori accettabili (criterio dinamico);
- una limitazione della pendenza (o sovrapendenza) longitudinale delle linee di estremità della piattaforma (criterio costruttivo);
- la percezione ottica corretta dell'andamento del tracciato (criterio ottico).

Criterio di verifica del contraccollo (1)

Criterio 1 (Limitazione del contraccollo): Lungo un arco di clotoide si vuole una graduale variazione dell'accelerazione trasversale non compensata nel tempo (contraccollo c).



Criterio di verifica del contraccolpo (2)



$$\frac{s}{A^2} = \frac{1}{r_f}$$

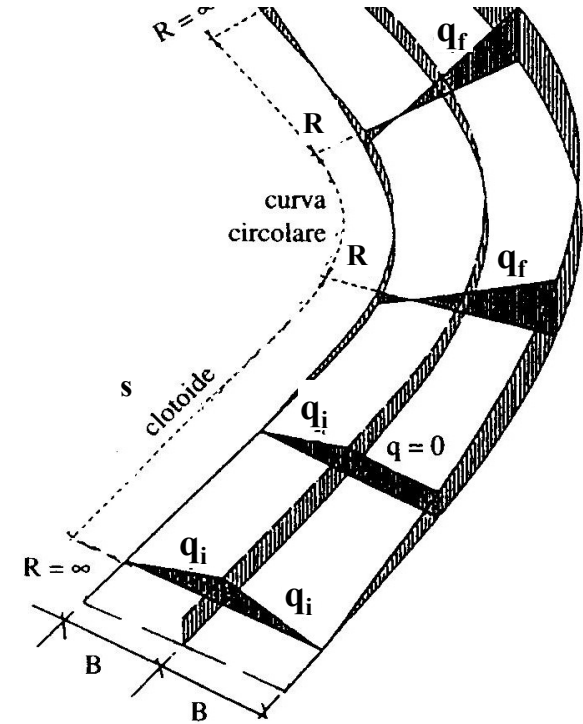
$$\frac{s_0}{A^2} = \frac{1}{r_i}$$

$$\frac{s'}{A^2} = \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}$$

$$c = \frac{v^3 \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) - v \cdot g \cdot (q_f - q_i)}{s'} = \frac{v^3}{A^2} - \frac{v \cdot g \cdot (q_f - q_i)}{A^2 \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)}$$

$$A^2 = \frac{v^3}{c} - \frac{v \cdot g \cdot (q_f - q_i)}{c \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)}$$

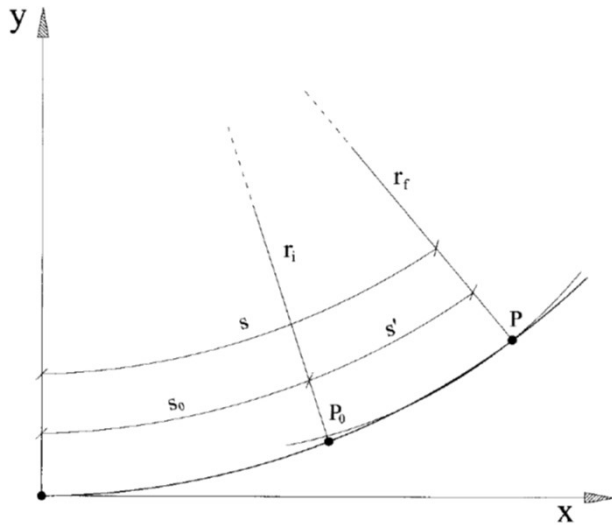
$$A = \sqrt{\frac{v^3}{c} - \frac{v \cdot g \cdot (q_f - q_i)}{c \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)}}$$



Per $r_i = \infty$ e $r_f = R$

$$A = \sqrt{\frac{v^3}{c} - v \cdot g \cdot R \cdot \frac{q_f - q_i}{c}}$$

Criterio di verifica del contraccolpo (3)



$$A = \sqrt{\frac{v^3}{c} - v \cdot g \cdot R \cdot \frac{q_f - q_i}{c}}$$

$$c = \frac{\partial a_{nc}}{\partial t} \leq \frac{14}{v} = \frac{50,4}{V} = c_{\max} \quad \left[\frac{m}{s^3} \right]$$

[m/s] [km/h]

$$A \geq A_{\min} = \sqrt{\frac{v^3}{c}} = v^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{14}} = \frac{V^2}{3,6^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{14}} = 0,021 \cdot V^2 \quad [V = km/h]$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{r_f \cdot s}$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}}{s - s_0} = \frac{\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}}{s'}$$

$$\frac{v^3}{A^2} = \frac{\frac{v^2}{r_f} - \frac{v^2}{r_i}}{\frac{s'}{v}} = \frac{\Delta a_{nc}}{\Delta t} = c$$

$$\dot{\theta} = p \cdot v \cdot \frac{1}{A^2}$$

$$\dot{\theta} = p \cdot v \cdot \frac{c}{v^3} = p \cdot \frac{c}{v^2}$$

Criterio di verifica del contraccollo (4)

$$r \cdot s^n = A^{n+1}$$

$$a_t = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2 \cdot s^n}{A^{n+1}}$$

$$c = v^3 \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} = \frac{v^3 \cdot n \cdot s^{n-1}}{A^{n+1}}$$

$$R \cdot L^n = A^{n+1}$$

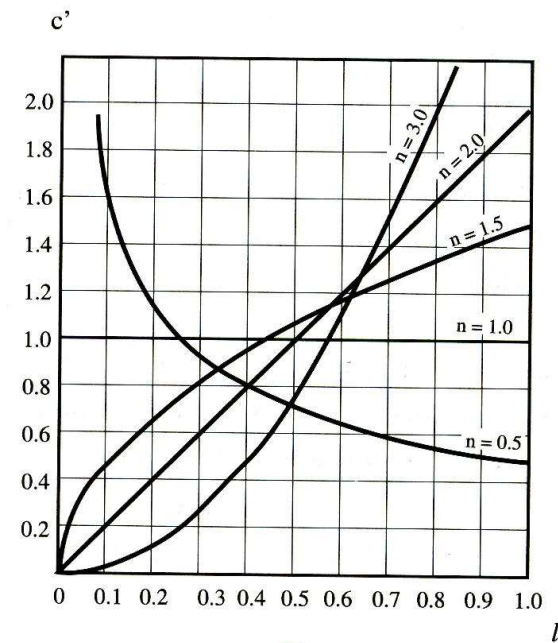
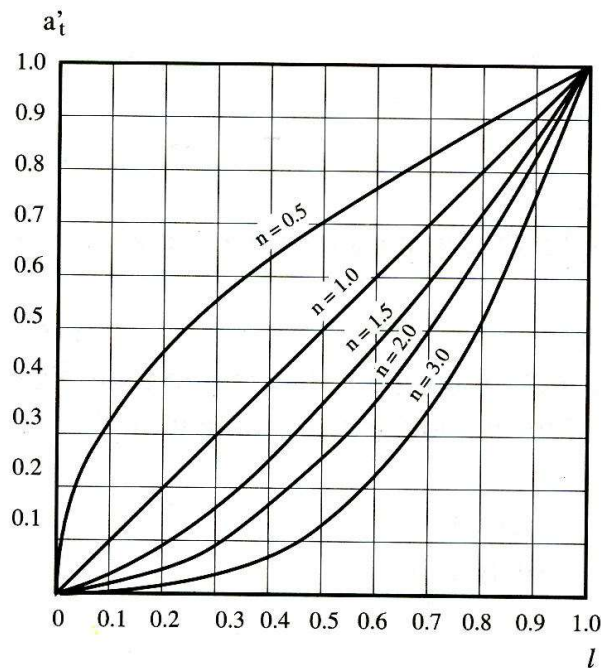
$$\ell = \frac{s}{L}$$

$$a_t = \frac{v^2}{R} \cdot \ell^n$$

$$a'_t = \frac{R \cdot a_t}{v^2} = \ell^n$$

$$c = \frac{v^3 \cdot n \cdot \ell^{n-1}}{R \cdot L}$$

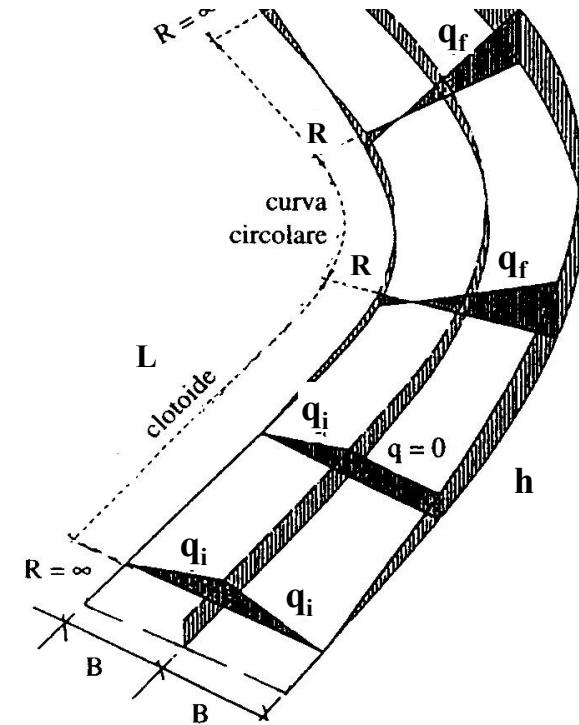
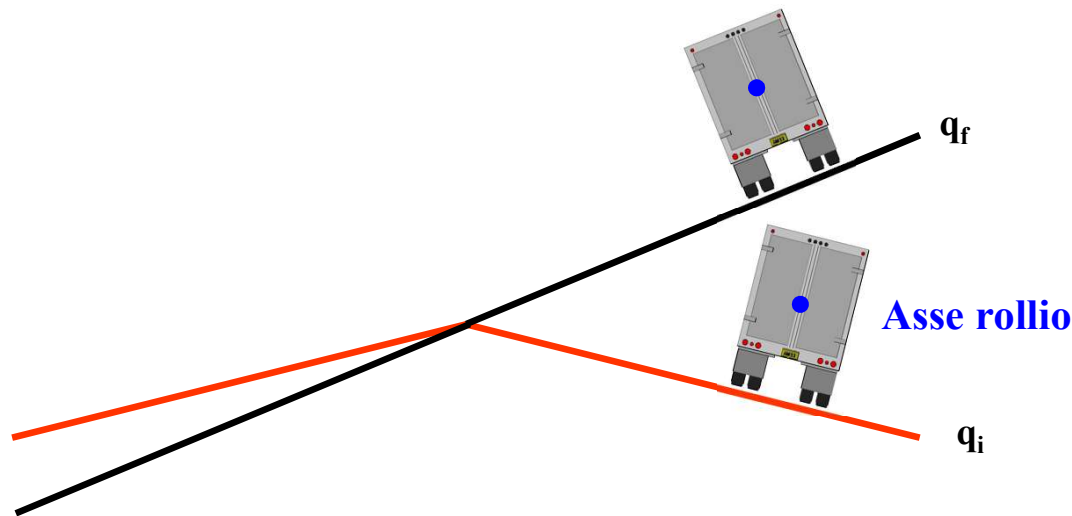
$$c' = \frac{c \cdot R \cdot L}{v^3} = n \cdot \ell^{n-1}$$



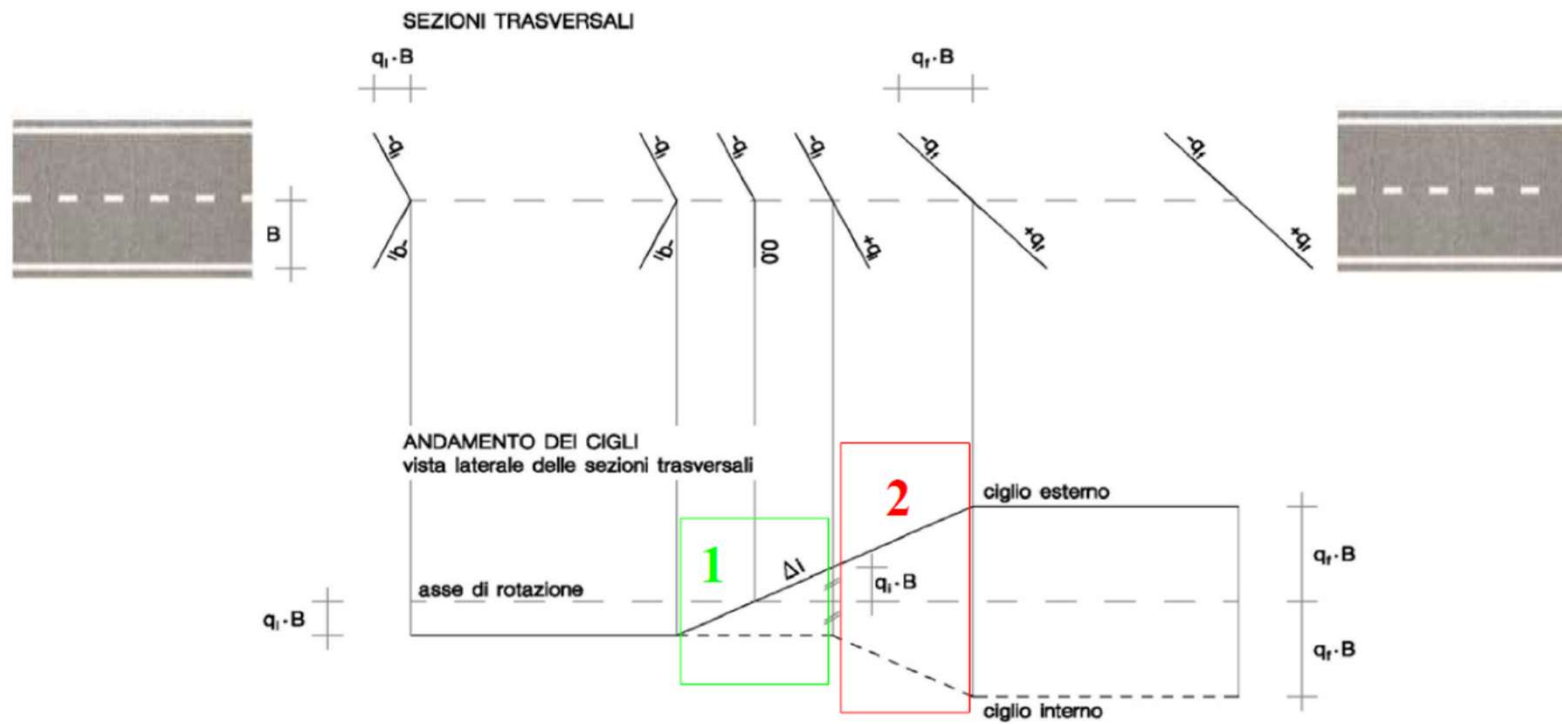
Criterio di verifica della sovrappendenza (1)

Criterio 2 (Limitazione della sovrappendenza longitudinale):
Nelle sezioni di estremità di un arco di clotoide la piattaforma stradale presenta differenti assetti trasversali, che vanno raccordati longitudinalmente, introducendo una pendenza (o una sovrappendenza) nelle linee di estremità della piattaforma.

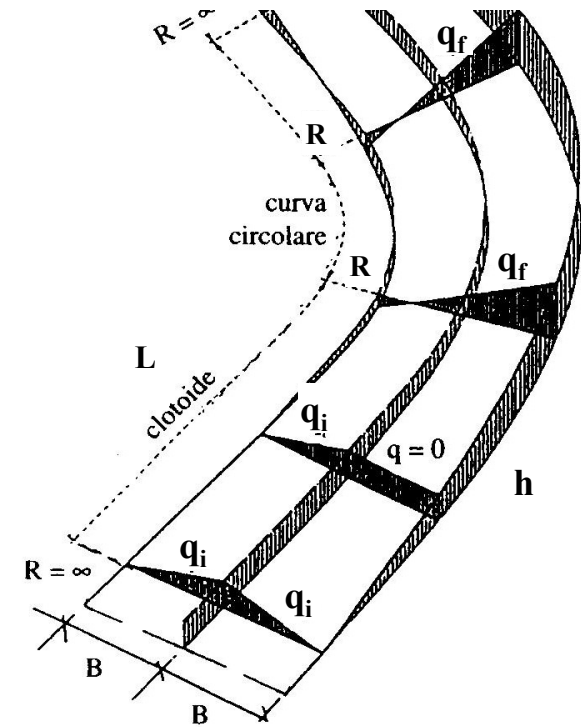
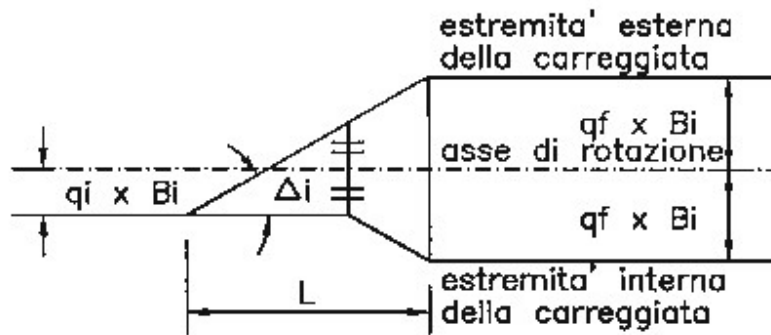
Per ragioni dinamiche (cioè per limitare la velocità di rotazione trasversale dei veicoli – velocità di rollio) la pendenza (o sovrappendenza) longitudinale Δi [%] delle estremità della carreggiata, o di parte di essa, non può superare un valore massimo.



Criterio di verifica della sovrappendenza (2)



Criterio di verifica della sovrappendenza (3)



$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{d(h/B)}{dt} = \frac{dh}{B \cdot ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d(\Delta i \cdot s)}{B \cdot ds} \cdot v = \frac{\Delta i \cdot v}{B} \leq 0,05 \text{ rad/s}$$

$$\Delta i_{\max} \leq 0,05 \cdot 100 \frac{B}{v} \approx 18 \frac{B}{V} \quad [\%]$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $[m/s]$ $[km/h]$

Criterio di verifica della sovrappendenza (4)

$$\frac{1}{A^2} = \frac{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i}}{s_f - s_i} = \frac{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i}}{\frac{\Delta h}{\Delta i/100}} = \frac{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i}}{\frac{B \cdot (q_f - q_i)}{\Delta i/100}}$$

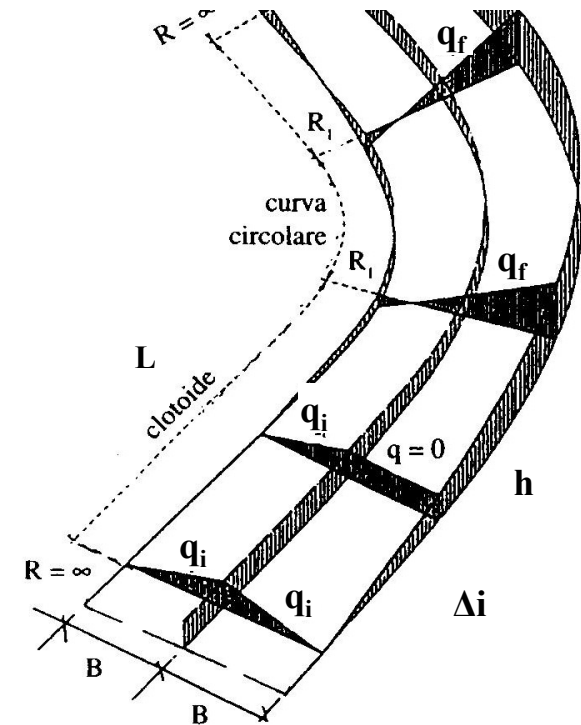
$$A \geq A_{\min} = \sqrt{\frac{B \cdot (q_f - q_i)}{\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i} \right) \cdot \frac{\Delta i_{\max}}{100}}}$$

$$A \geq A_{\min} = \sqrt{\frac{R \cdot B \cdot (q_f - q_i)}{\Delta i_{\max} / 100}}$$

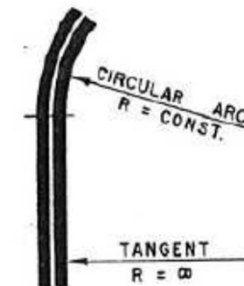
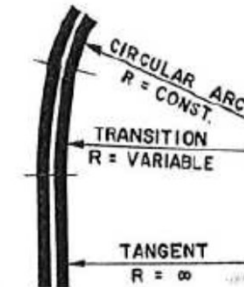
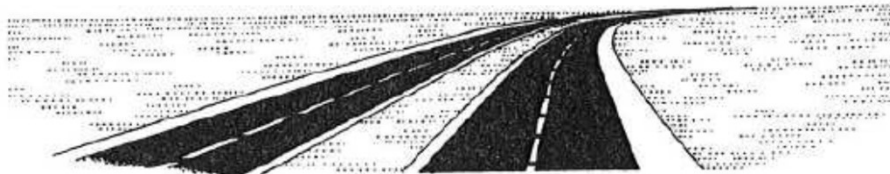
$$A \geq A_{\min} = \sqrt{\frac{R}{\Delta i_{\max}} \cdot 100 \cdot B \cdot (q_f + q_i)}$$

Se $R_f = R$ e $R_i = \infty$

Valida per q_i in contropendenza,
e valori pendenze senza segno



Criterio di verifica ottica (1)



Criterio di verifica ottica (2)

Criterio 3 (ottico): per percepire otticamente il raccordo deve essere verificata la relazione

$$3^\circ \cong \frac{1}{18} \leq \tau_f = \frac{A^2}{2 \cdot R^2} \quad A \geq R/3; L \geq R/9$$

$$A = \sqrt[4]{24 \cdot R^3 \cdot \Delta R} \geq \sqrt[4]{24 \cdot R^3 \cdot 0,25}$$

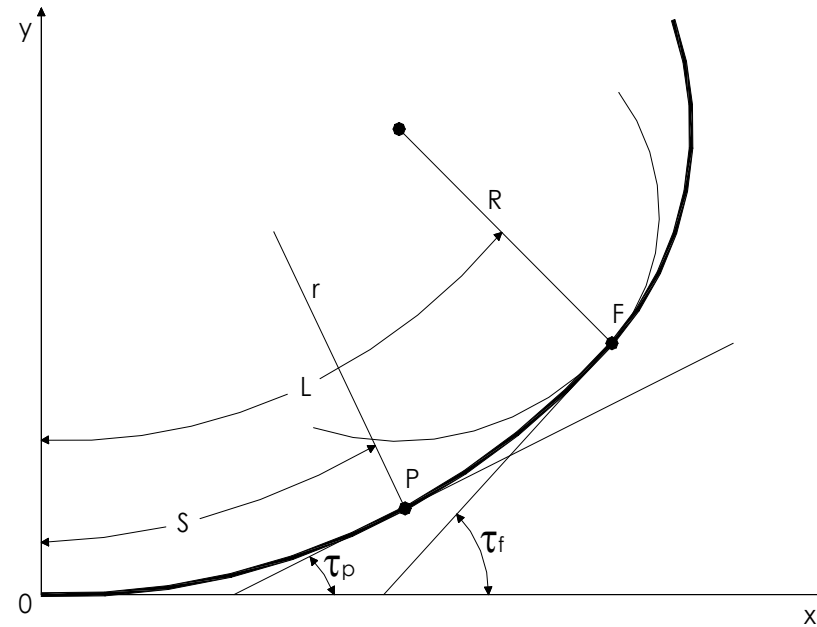
(norma Australiana)

Inoltre per la percezione dell'arco di cerchio deve essere

$$29^\circ \cong \frac{1}{2} \geq \tau_f = \frac{A^2}{2 \cdot R^2} \quad A \leq R; L \leq R$$

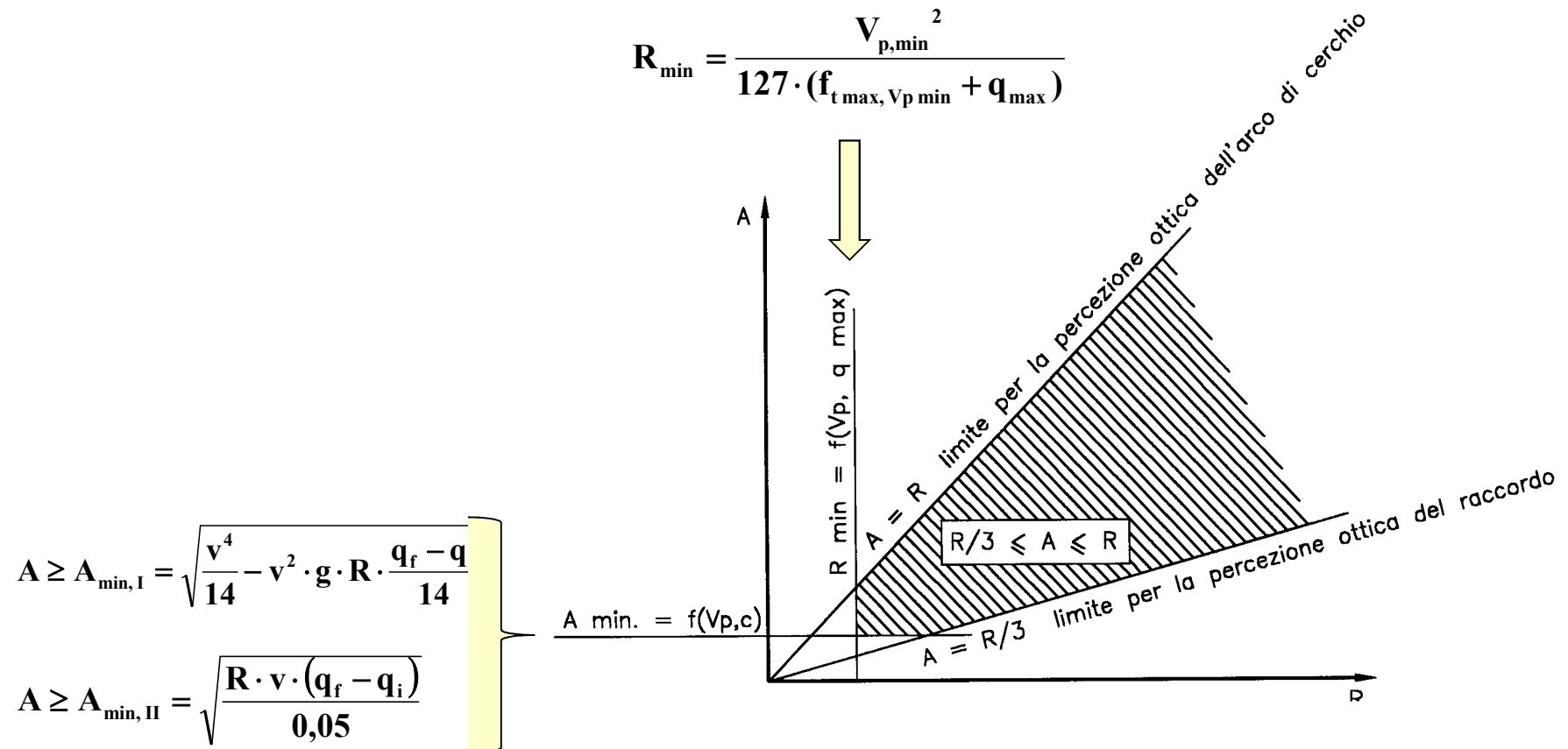
$$A = \sqrt[4]{24 \cdot R^3 \cdot \Delta R} \leq \sqrt[4]{24 \cdot R^3 \cdot 1}$$

(norma Inglese)

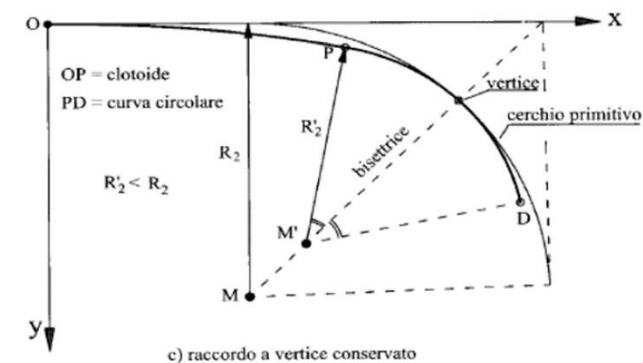
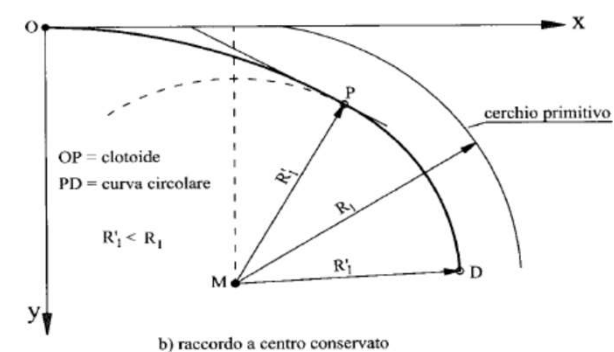
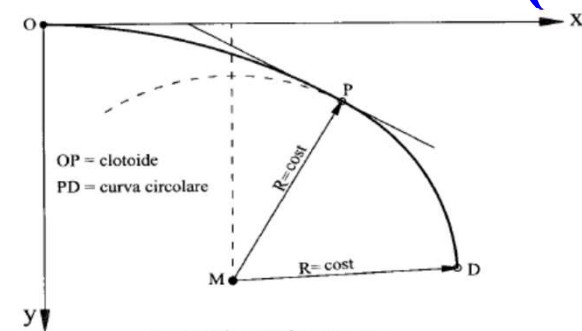
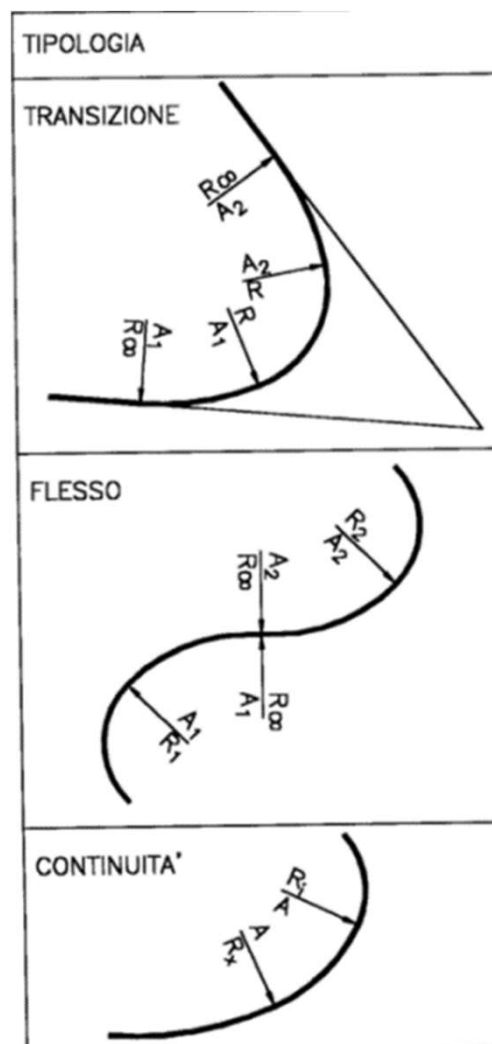


Criterio di verifica ottica (3)

Criterio 3 (ottico): per percepire otticamente il raccordo deve essere verificata la relazione $A \geq R/3$ ($A \geq R_i/3$ nel caso di continuità), inoltre per la percezione dell'arco di cerchio deve essere $A \leq R$



Inserimento della clotoide nel tracciato (1)



Inserimento della clotoide nel tracciato (2)

CLOTOIDE DI TRANSIZIONE

$$A_1 = 4 \sqrt{24 \cdot r^3 \cdot \Delta r_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{14} \frac{\Delta r_1}{r}\right)}$$

$$A_2 = 4 \sqrt{24 \cdot r^3 \cdot \Delta r_2 \cdot \left(1 + \frac{3}{14} \frac{\Delta r_2}{r}\right)}$$

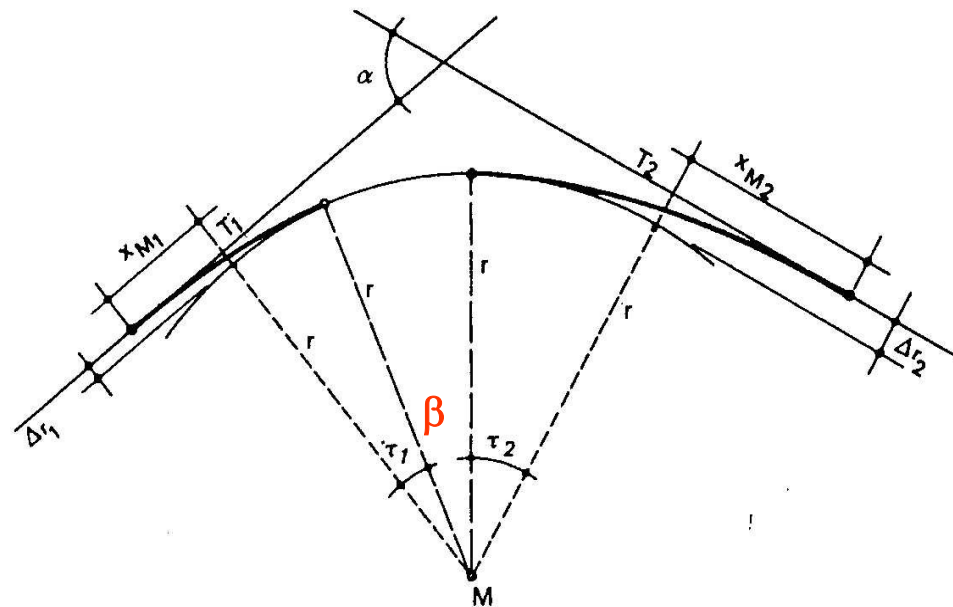
$$\tau_1 = \frac{A_1^2}{2 \cdot r^2}$$

$$\tau_2 = \frac{A_2^2}{2 \cdot r^2}$$

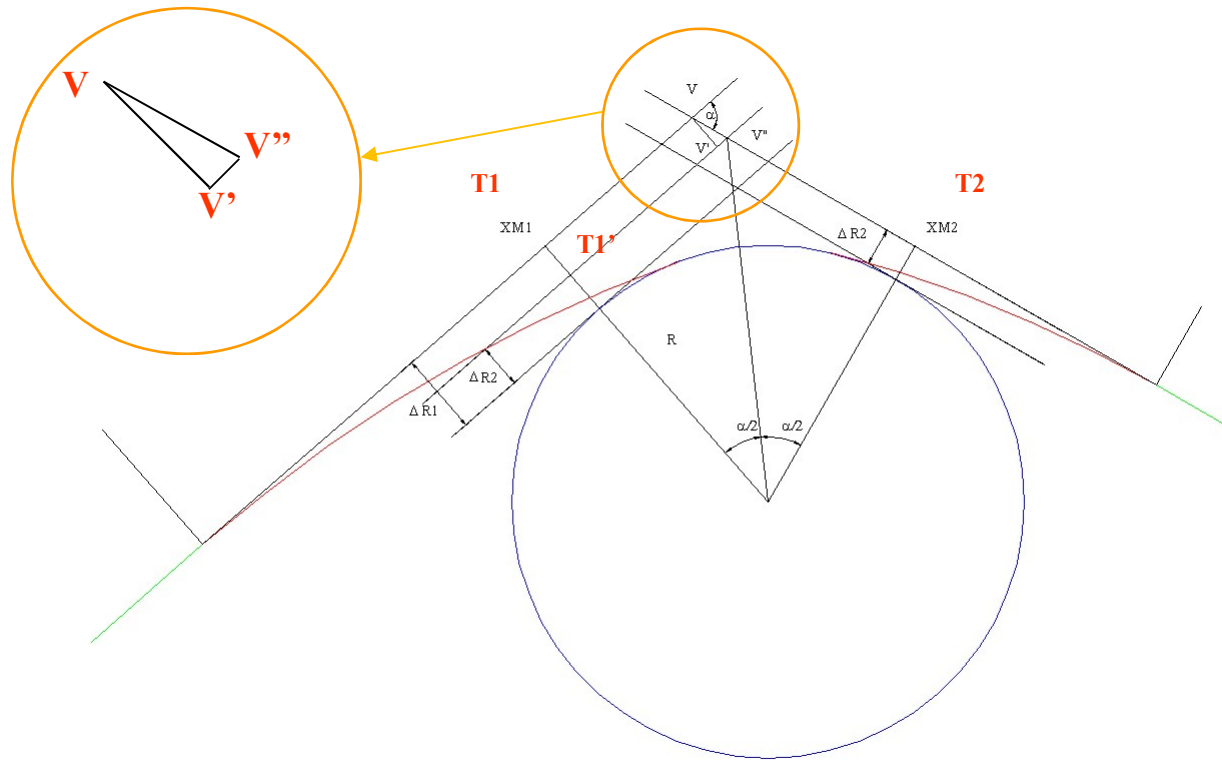
$$\tau_1 + \tau_2 \leq \alpha$$

$$\beta = \alpha - \tau_1 - \tau_2$$

$$\Delta r = \frac{s^2}{24 \cdot r} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{28}\right) = \frac{A^4}{24 \cdot r^3} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{28}\right)$$



Inserimento della clotoide nel tracciato (3)



$$VV' = \Delta R1 - \Delta R2$$

$$VV'' = (\Delta R1 - \Delta R2) / \sin \alpha$$

$$V'V'' = (\Delta R1 - \Delta R2) / \tan \alpha$$

$$T_1'V'' = T_2V'' = (R + \Delta R2) * \tan(\alpha/2)$$

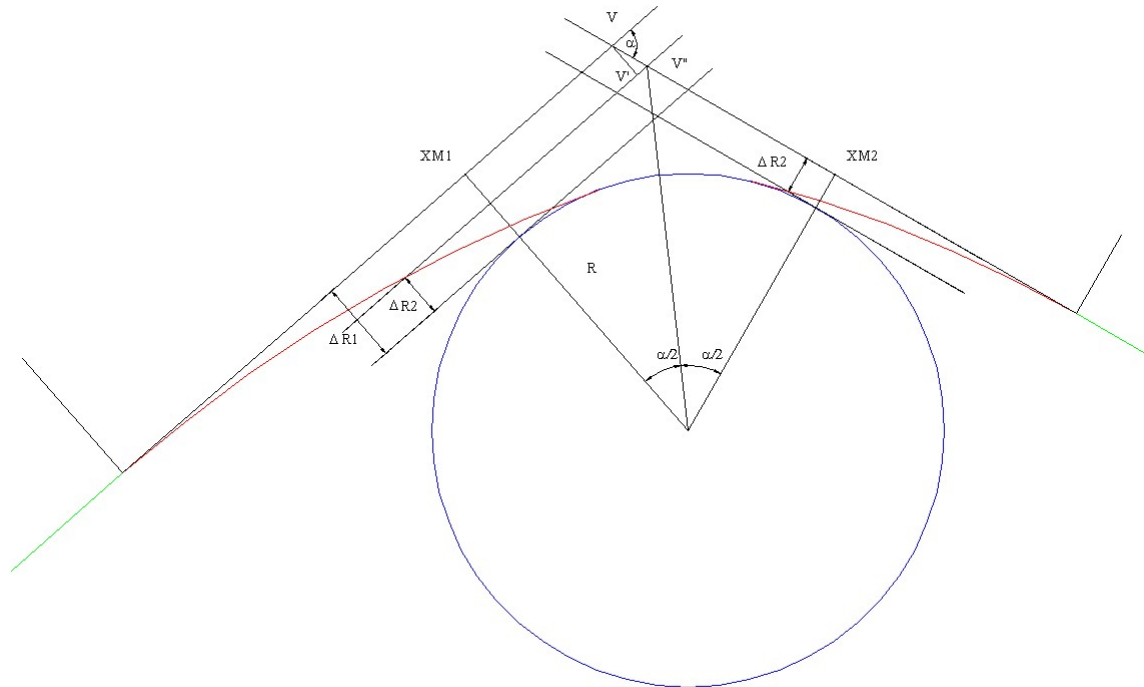
$$T_1V = T_1'V'' - V'V''$$

$$T_2V = T_2V'' + V''V$$

$$\beta = \alpha - \tau1 - \tau2$$

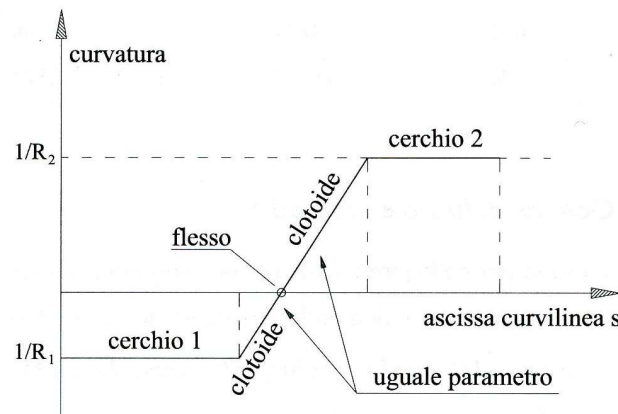
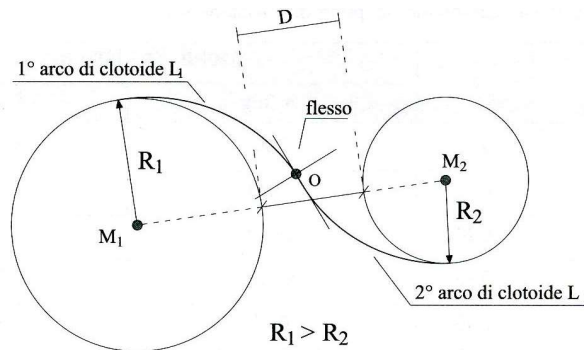
Esempio di calcolo clotoide di transizione

Si consideri una strada di tipo C, nell'ipotesi di raccordo tra rettilineo e curva circolare, con angolo di deviazione tra i rettilinei di appoggio di 90° , si richiede: il raggio della curva, il calcolo dei parametri delle clotoidi (supponendo $A1 \neq A2$), il tracciamento per punti della clotoide.

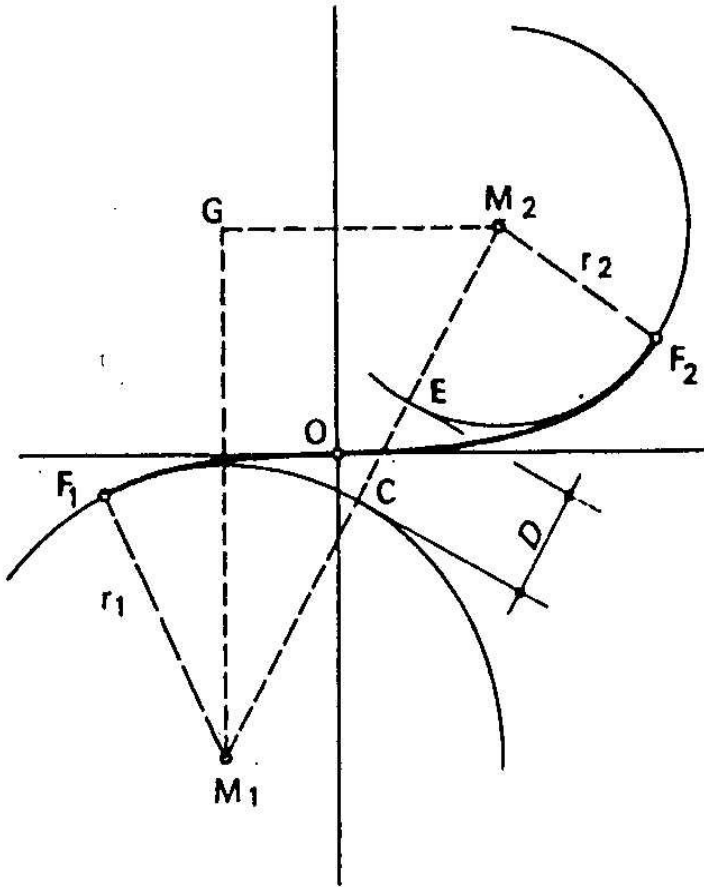


Clotoide di flesso (1)

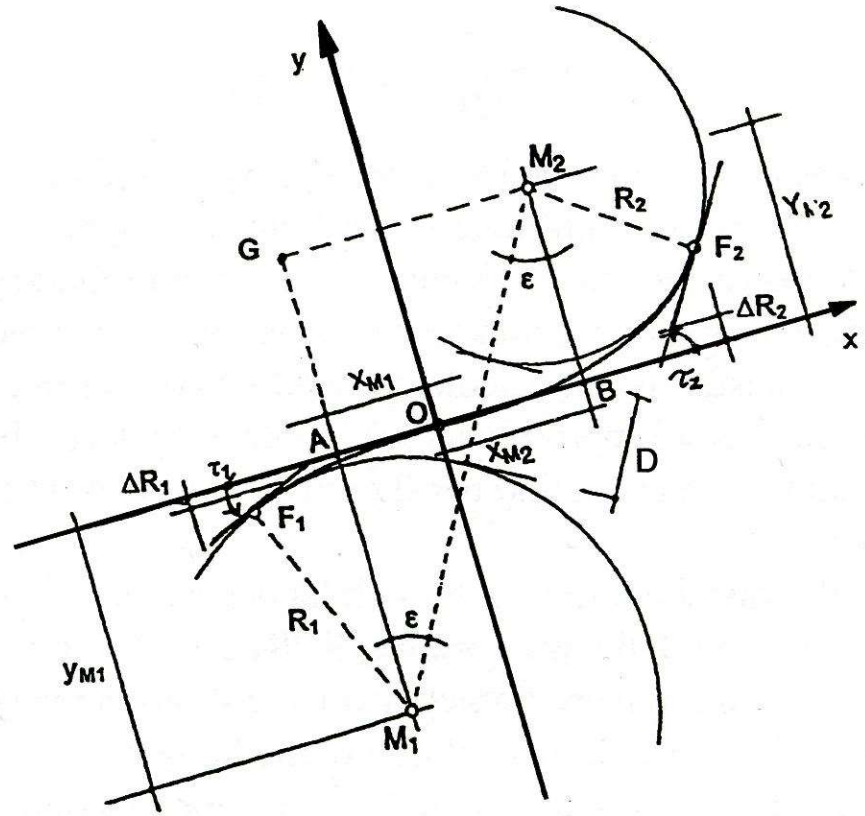
Il raccordo di flesso è utilizzato per raccordare due archi di cerchio le cui curvature hanno segno opposto. Questo raccordo è costituito da due clotoidi contrapposte le cui origini coincidono nel punto O (punto di flesso), in cui la curvatura è nulla.



Clotoide di flesso (2)



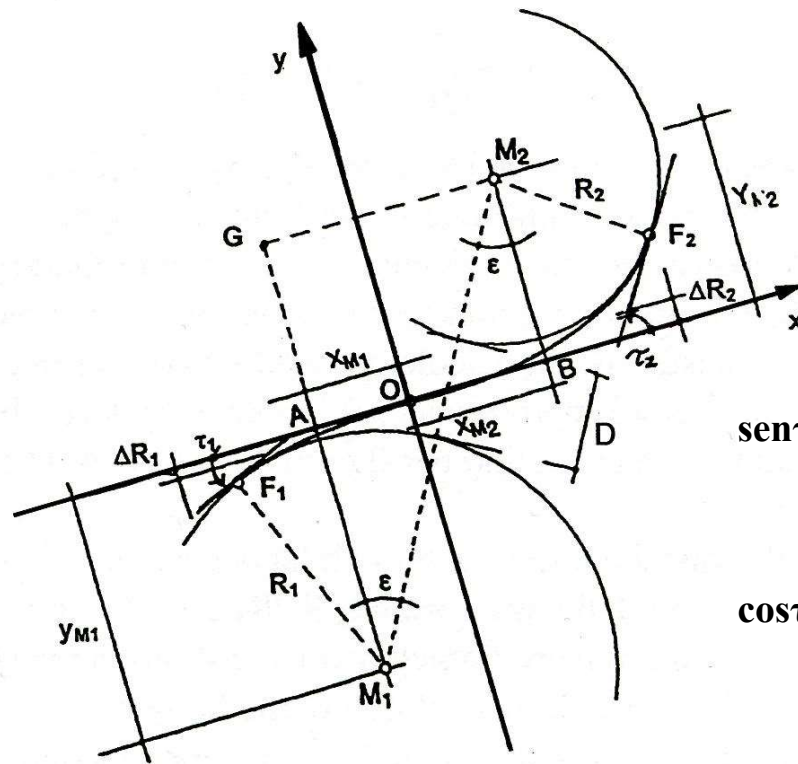
$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{D}$$



$$\mathbf{M}_1 \mathbf{G} = \mathbf{y}_{M1} + \mathbf{y}_{M2} \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{G} = \mathbf{x}_{M1} + \mathbf{x}_{M2}$$

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)^2 = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{D})^2 = (\mathbf{x}_{\mathbf{M}1} + \mathbf{x}_{\mathbf{M}2})^2 + (\mathbf{y}_{\mathbf{M}1} + \mathbf{y}_{\mathbf{M}2})^2$$

Clotoide di flesso (3)



$$(r_1 + r_2 + D)^2 = [(x_{F1} - r_1 \sin \tau_1) + (x_{F2} - r_2 \sin \tau_2)]^2 + [(y_{F1} + r_1 \cos \tau_1) + (y_{F2} + r_2 \cos \tau_2)]^2$$

$$\sin \tau = \tau - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \tau = 1 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} - \dots$$

$$X_F = A \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \dots \right)$$

$$Y_F = A \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \dots \right)$$

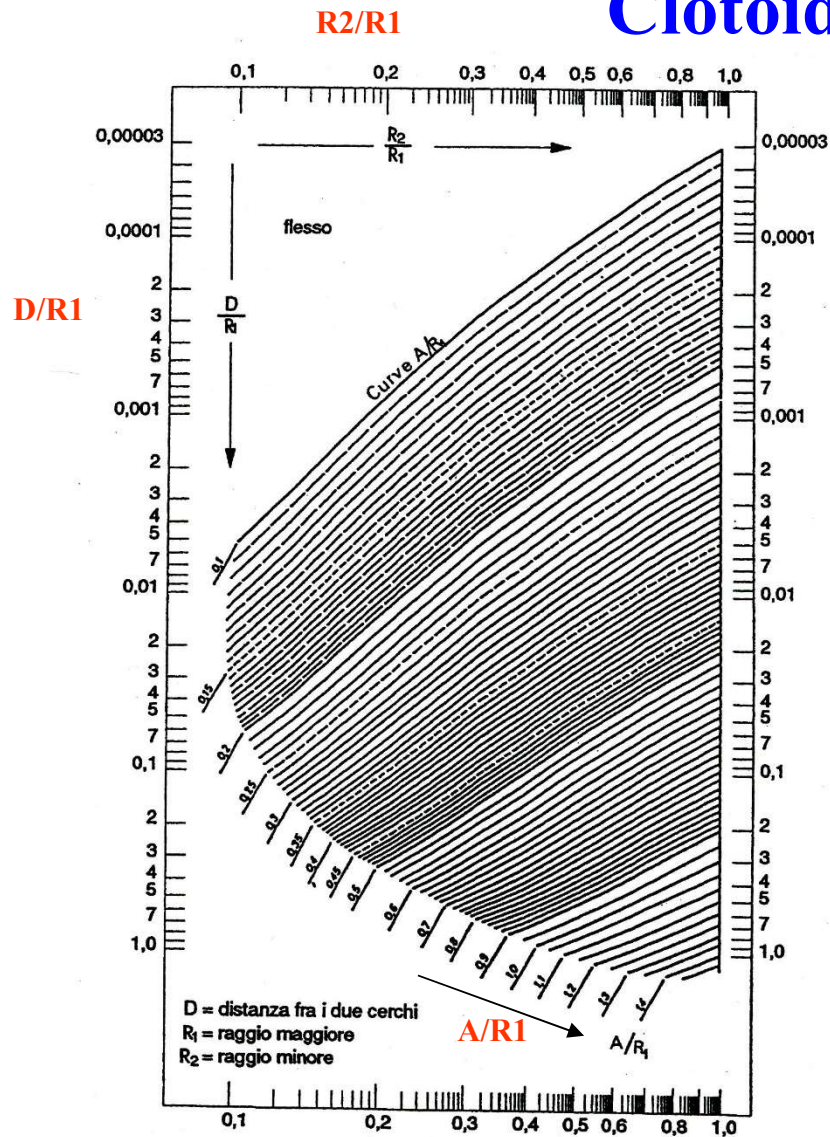
$$\tau_1 = \frac{A_1^2}{2 \cdot r_1^2}$$

$$\tau_2 = \frac{A_2^2}{2 \cdot r_2^2} = \frac{k^2 \cdot A_1^2}{2 \cdot r_2^2} = \frac{k^2 \cdot r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{A_1^2}{2 \cdot r_1^2}$$

$$A_1 = f(r_1; r_2; D)$$

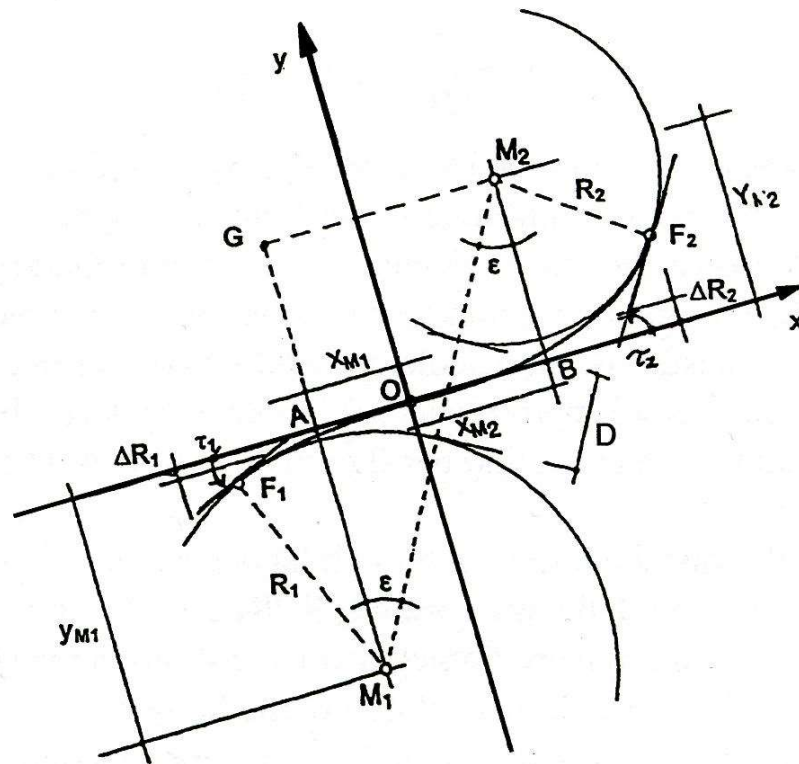
Clotoide di flesso (4)

Diagramma di Osterloch



$$\frac{A}{r_1} = f\left(\frac{r_2}{r_1}; \frac{D}{r_1}\right)$$

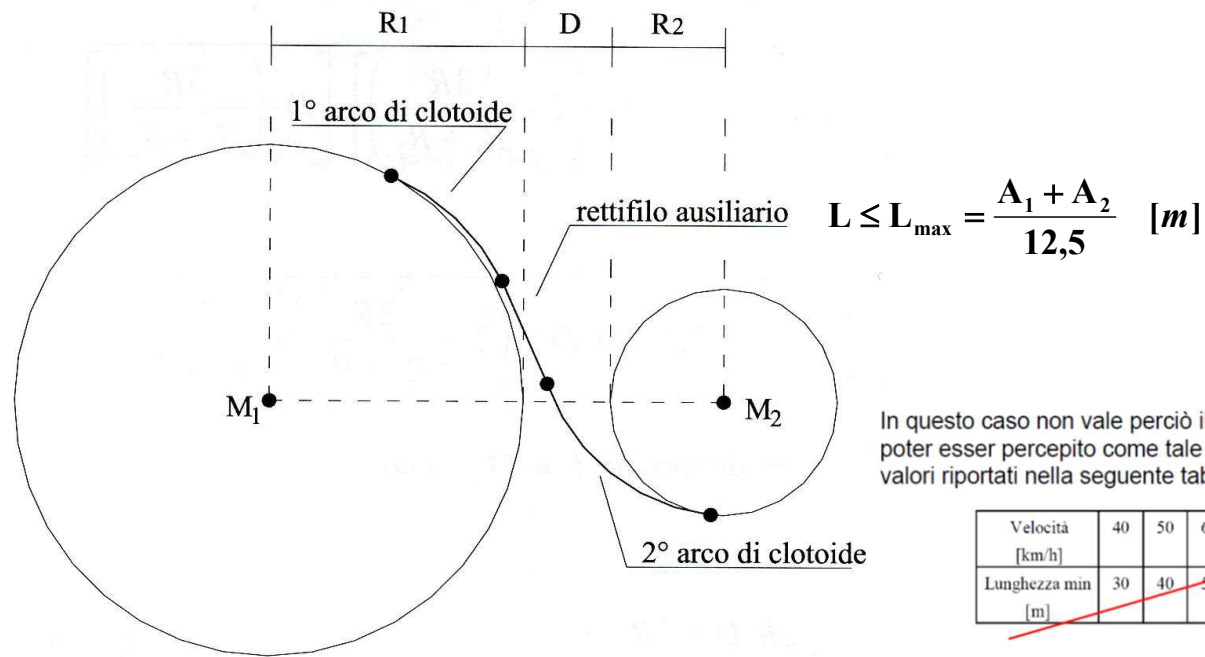
Clotoide di flesso (5)



$$X_{M1} + X_{M2} = (Y_{M1} + Y_{M2}) \operatorname{tg} \varepsilon$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{X_{M1} + X_{M2}}{Y_{M1} + Y_{M2}}$$

Clotoide di flesso (6)



In questo caso non vale perciò il requisito minimo fissato secondo il quale un rettifilo, per poter esser percepito come tale dall'utente, deve avere una lunghezza non inferiore ai valori riportati nella seguente tabella:

Velocità [km/h]	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Lunghezza min [m]	30	40	50	65	90	115	150	190	250	300	360

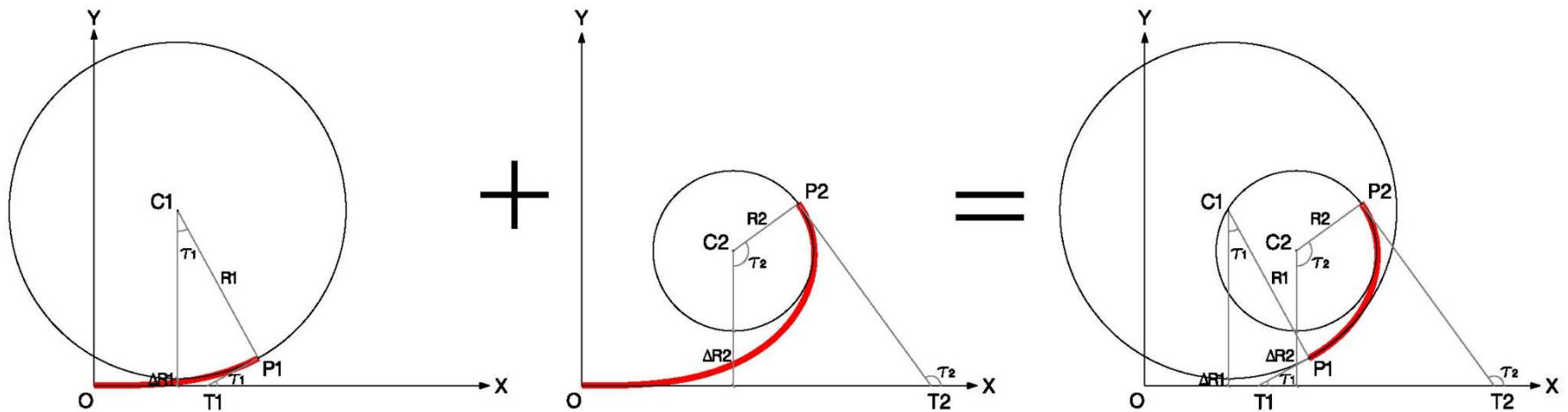
Esempio

$V = 100 \text{ km/h}$ $R1 = 624 \text{ [m]}$ $R2 = 437 \text{ [m]}$ $D = 62,4 \text{ [m]}$ $A = 405 \text{ [m]}$ $L_{\max} = 64,8 \text{ [m]}$

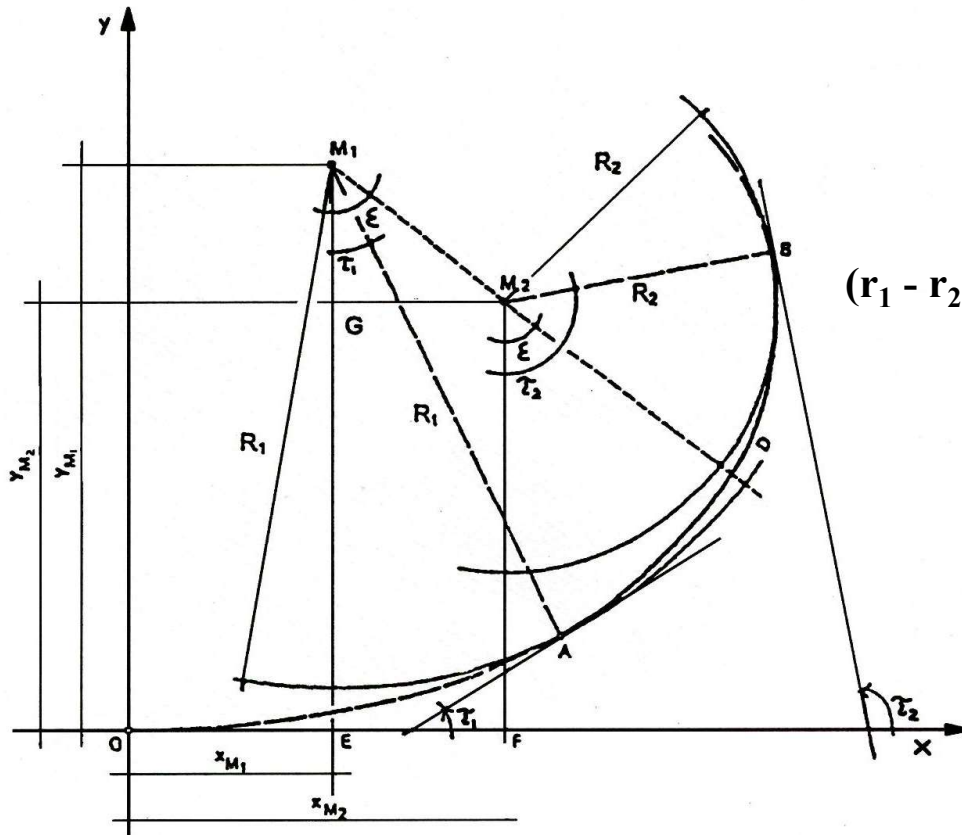
Transizione	NO	NO	SI	NO
Flesso	SI	NO	NO	NO
	L 64,8	150	2200	

Clotoide di Continuità (1)

Raccordo di continuità è un arco di clotoide che raccorda due archi di cerchio l'uno interno all'altro le cui curvature hanno segno uguale, cioè percorsi nello stesso senso.



Clotoide di Continuità (2)



$$(M_1 M_2)^2 = (GM_2)^2 + (GM_1)^2$$

$$(r_1 - r_2 - D)^2 = (x_{M1} - x_{M2})^2 + (y_{M1} - y_{M2})^2$$

$$(r_1 - r_2 - D)^2 = [(x_A - r_1 \sin \tau_1) - (x_B - r_2 \sin \tau_2)]^2 + [(y_A + r_1 \cos \tau_1) - (y_B + r_2 \cos \tau_2)]^2$$

$$\sin \tau = \tau - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^5}{5!} - \dots$$

$$X_{A,B} = A \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \dots \right)$$

$$\cos \tau = 1 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} - \dots$$

$$Y_{A,B} = A \cdot \sqrt{2 \cdot \tau} \cdot \left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \dots \right)$$

$$A = f(r_1; r_2; D)$$

Clotoide di Continuità (3)

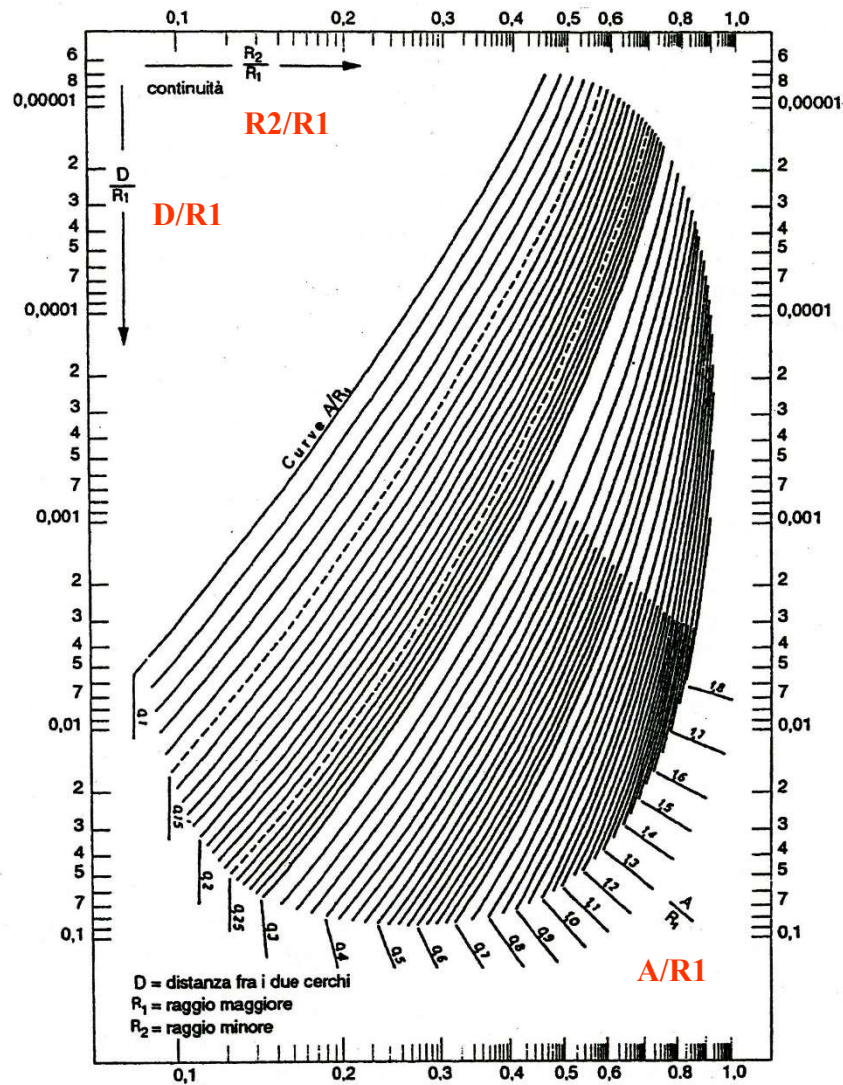
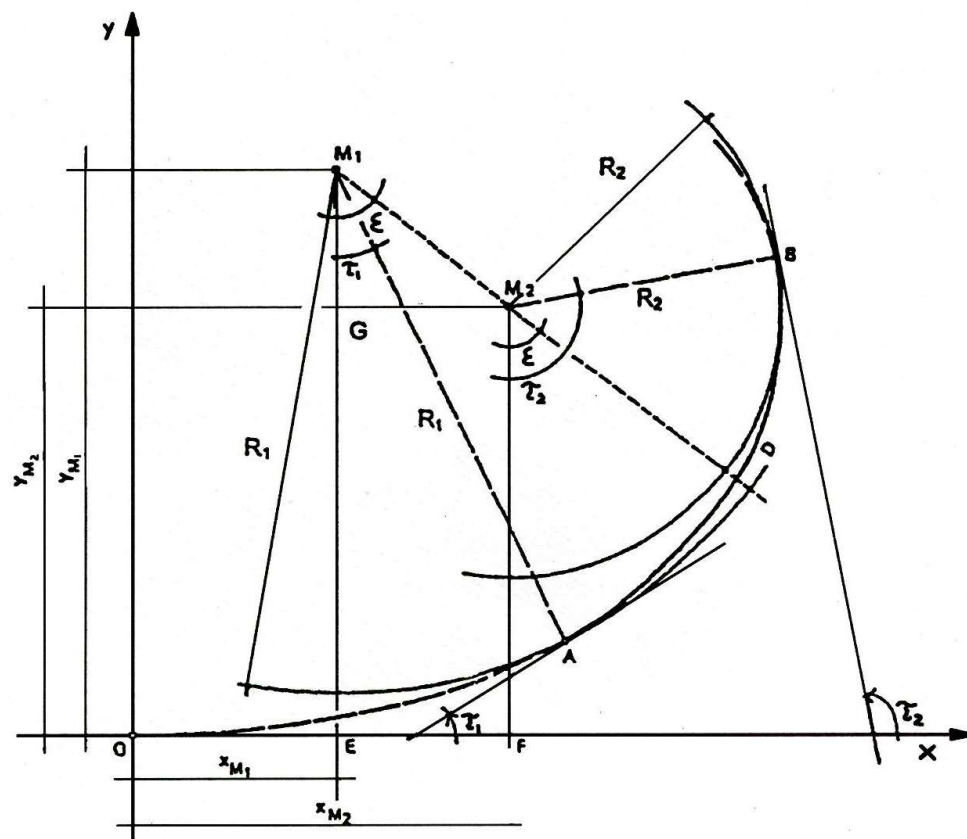


Diagramma di Osterloch

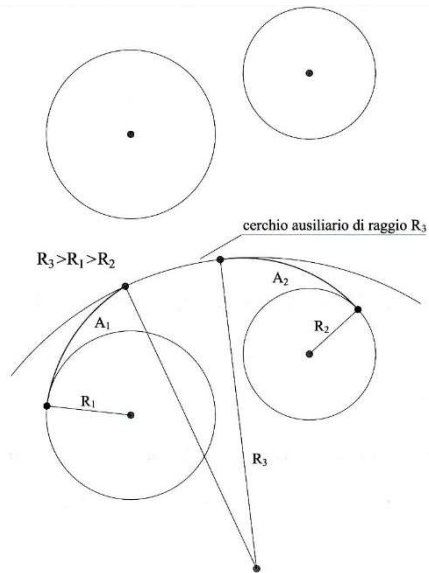
$$\frac{A}{r_1} = f\left(\frac{r_2}{r_1}; \frac{D}{r_1}\right)$$

Clotoide di Continuità (4)

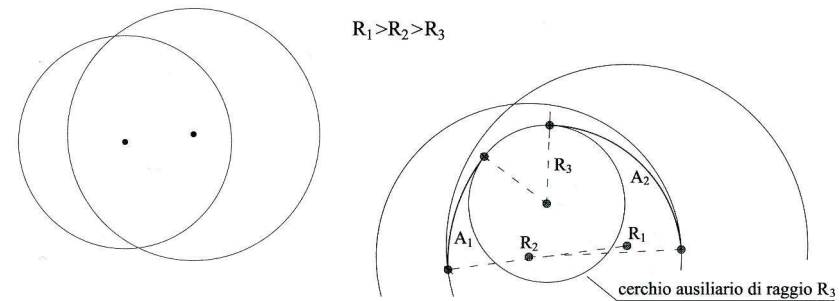
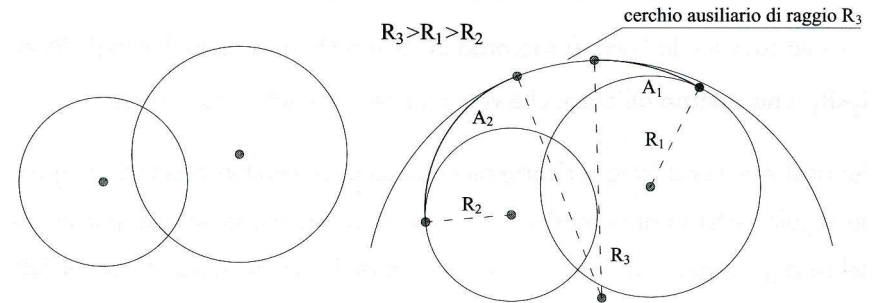


$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{X_{M1} - X_{M2}}{Y_{M1} - Y_{M2}}$$

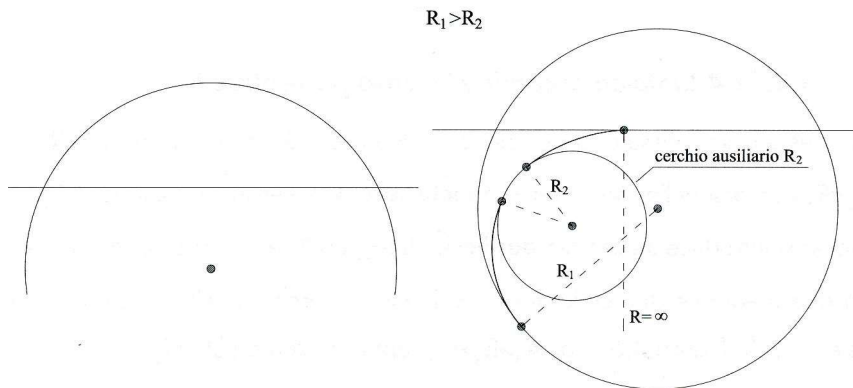
Clotoide di Continuità, casi particolari



Cerchi esterni

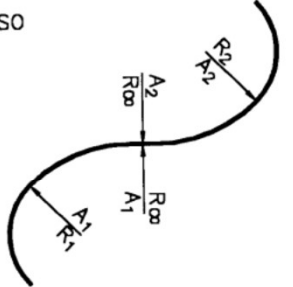
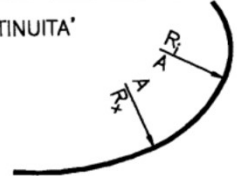


Cerchi intersecantisi

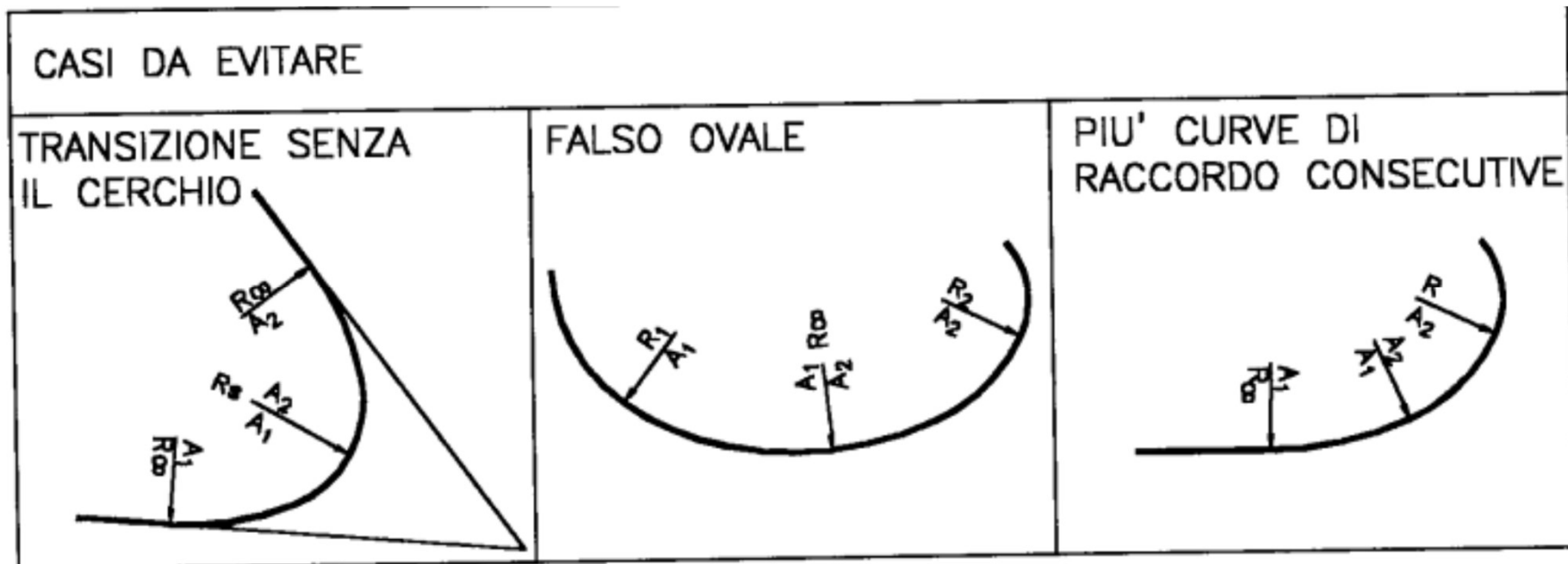


Cerchio intersecante rettilineo

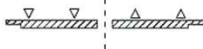
Limitazione nell'uso dei raccordi

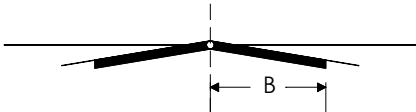
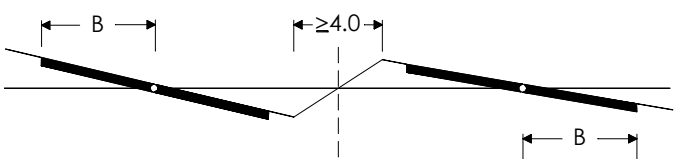
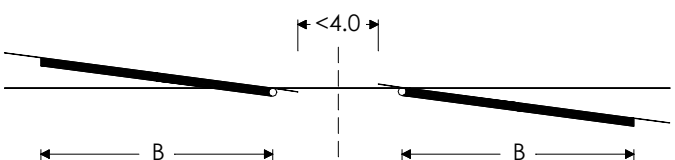
TIPOLOGIA	LIMITI
TRANSIZIONE 	$A_1 \geq A_{min}$ $A_2 \geq A_{min}$ $\frac{R}{3} \leq A_1 \leq R$ $\frac{R}{3} \leq A_2 \leq R$ $\frac{2}{3} \leq \frac{A_1}{A_2} \leq \frac{3}{2}$
FLESSO 	$R_2 \leq R_1 \quad A_1 \geq A_{min} \quad A_2 \geq A_{min}$ FLESSO ASIMMETRICO $A_1 \neq A_2$ $\frac{R_1}{3} \leq A_1 \leq R_1 \quad \frac{R_2}{3} \leq A_2 \leq R_2 \quad \frac{2}{3} \leq \frac{A_1}{A_2} \leq \frac{3}{2}$ FLESSO SIMMETRICO $A_1 = A_2 = A$ $\frac{R_1}{3} \leq A \leq R_2$
CONTINUITA' 	$R_x \leq R_i \quad R_x \text{ all'interno di } R_i \text{ ma non concentrico}$ $A_{min} \leq A$ $\frac{R_i}{3} \leq A \leq R_x$
RACCORDO TRA DUE CERCHI SECANTI CON ALTRO CERCHIO AUSILIARIO 	$A_1 \geq A_{min} \quad A_2 \geq A_{min}$ $\frac{R_3}{3} \leq A_1 \leq R_1$ $\frac{R_3}{3} \leq A_2 \leq R_2$ $\frac{2}{3} \leq \frac{A_1}{A_2} \leq \frac{3}{2}$

Limitazione nell'uso dei raccordi



Sezione stradale in curva (1)

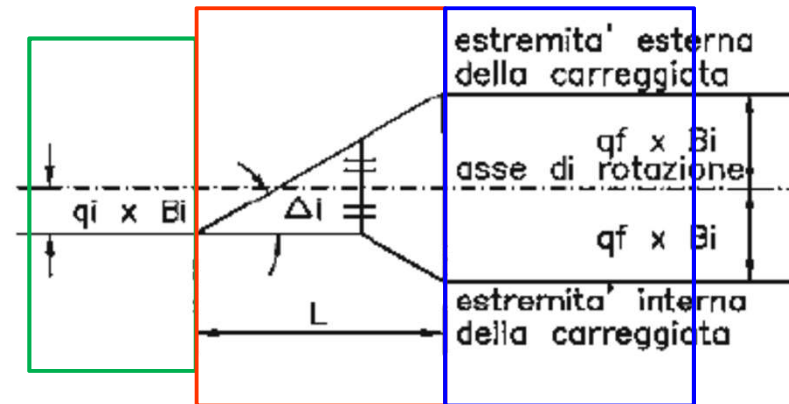
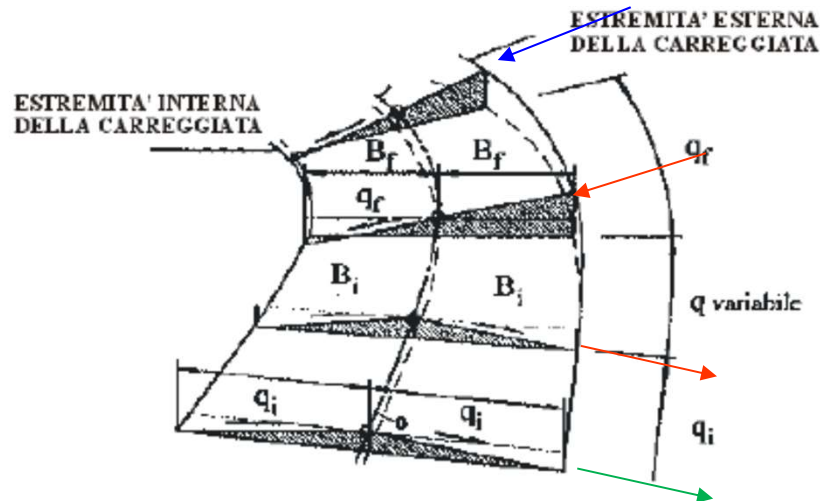
STRADE TIPO	PIATTAFORMA	PENDENZE TRASVERSALI
A, B, D a due o più corsie per carreggiata		
E a quattro corsie		
altre strade		

a	
b	
c	

Lungo le curve a raggio variabile si realizza il graduale passaggio della pendenza trasversale dal valore proprio di un elemento a quello relativo al successivo.

Questo passaggio si ottiene facendo ruotare la carreggiata stradale, o parte di essa, secondo i casi, intorno al suo asse (preferibile...) ovvero intorno alla sua estremità interna (in strade a doppia carreggiata con spartitraffico < 4m)

Sezione stradale in curva (2)

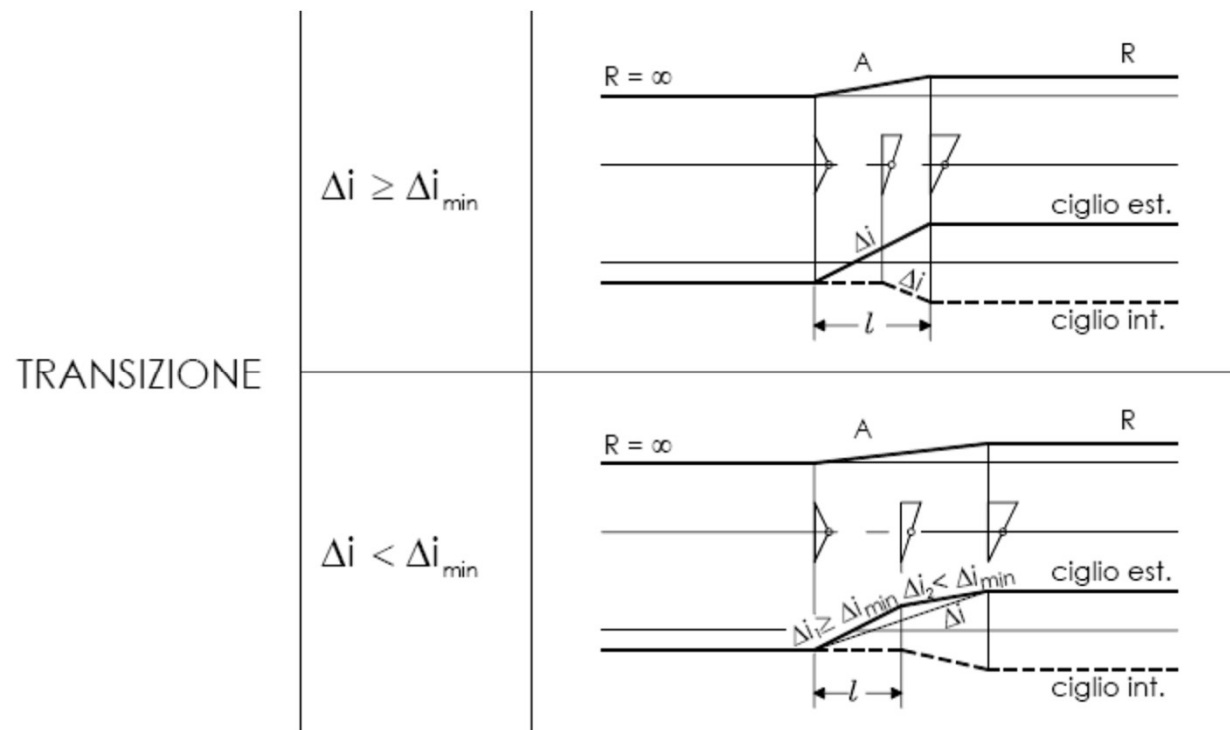


Per limitare la zona in cui la pendenza trasversale della carreggiata è inferiore alla minima del 2,50% è necessario che la sovrappendenza longitudinale Δi delle estremità della carreggiata sia superiore ad un valore minimo:

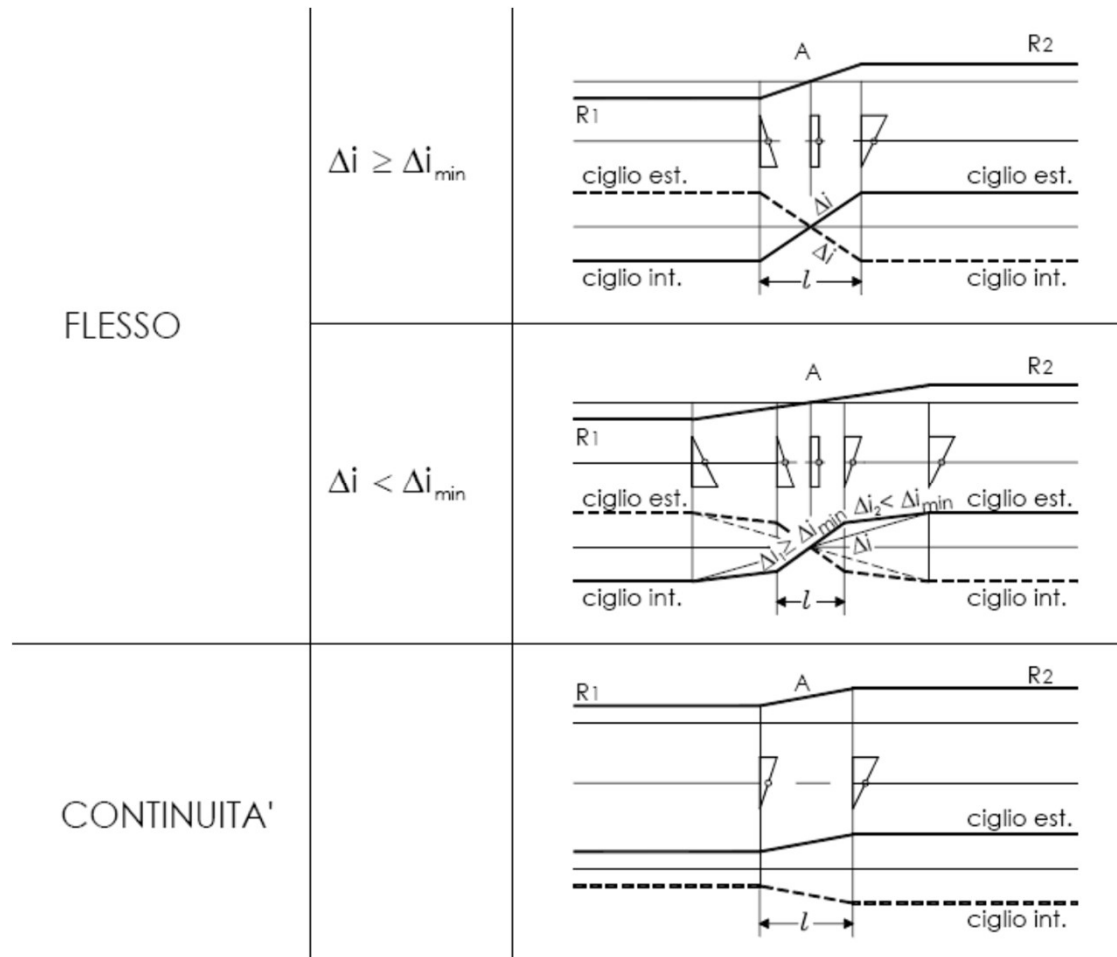
$$\Delta i_{\min} = 0,1 \times B_i \quad [\%]$$

Sezione stradale in curva (3)

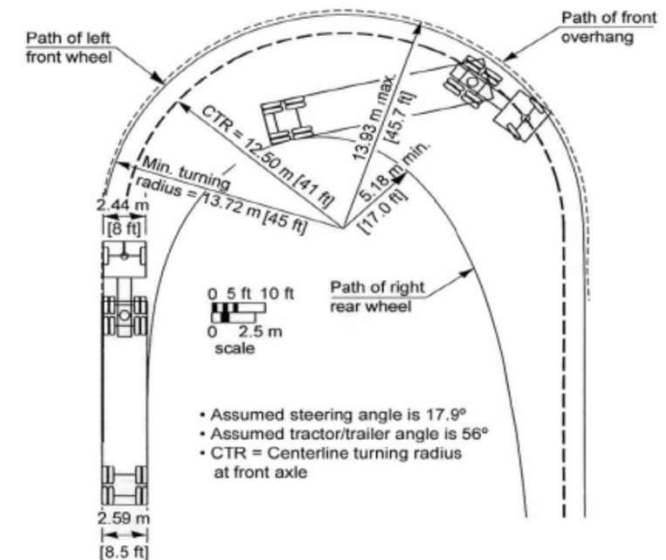
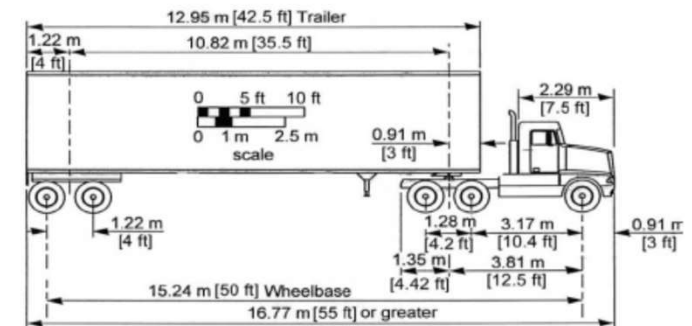
Se la pendenza Δi è inferiore a $\Delta i_{\min}$, è necessario spezzare in due parti il profilo longitudinale di quella estremità della carreggiata che è esterna alla curva, realizzando un primo tratto con pendenza maggiore o uguale a $\Delta i_{\min}$, fino a quando la pendenza trasversale della via ha raggiunto il 2,5%; la pendenza risultante per il tratto successivo potrà anche essere inferiore a $\Delta i_{\min}$.



Sezione stradale in curva (4)



Allargamento della sezione in curva (1)



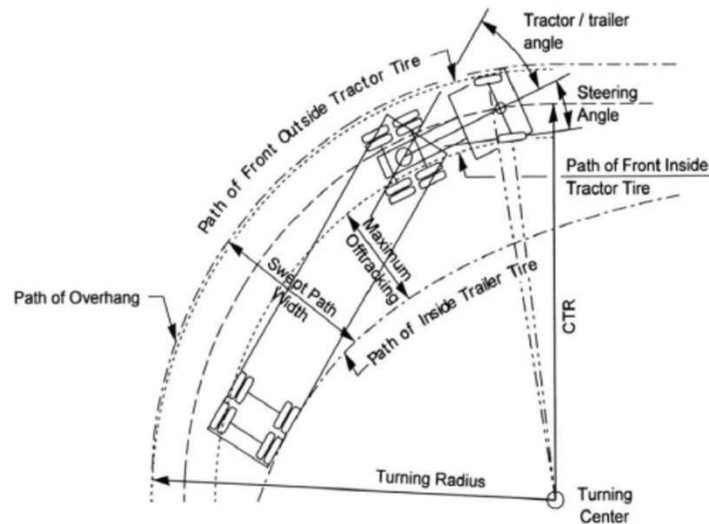
Allargamento della sezione in curva (2)

Allo scopo di consentire la **sicura iscrizione dei veicoli** nei tratti curvilinei del tracciato, conservando i necessari franchi fra la sagoma limite dei veicoli ed i margini delle corsie, è necessario che nelle curve circolari **ciascuna corsia sia allargata** di una quantità E , data dalla relazione:

$$E = \frac{K}{R} \quad [\text{m}]$$

$$K = 45$$

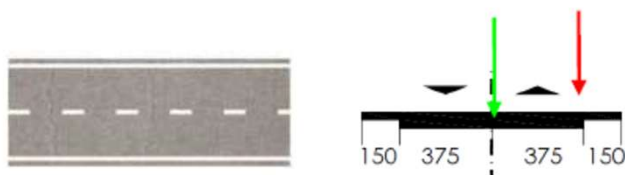
R = raggio esterno (in m) della corsia;



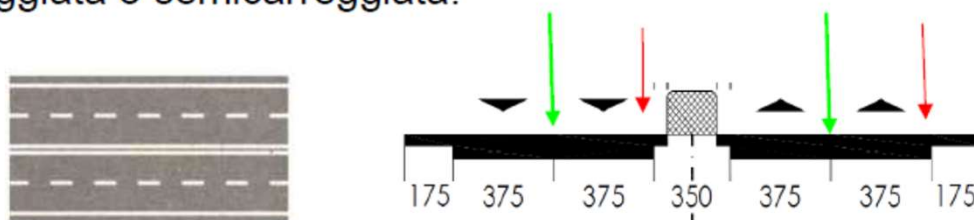
Allargamento della sezione in curva (3)

$$E = \frac{K}{R} \quad [\text{m}]$$

se $R > 40\text{m}$ con strada 1 carreggiata e 2 corsie posso usare il raggio in asse;



Per strade a più di 2 corsie per senso di marcia, si può assumere il raggio dell'asse della carreggiata o semicarreggiata.



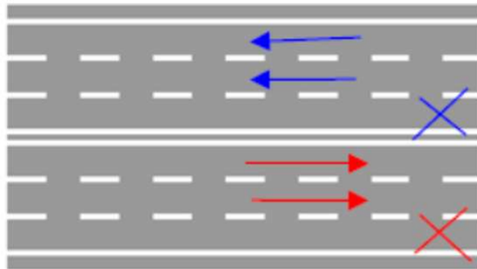
R (m)	40	60	80	100	125	150	175	200	225
e (m)	1.13	0.75	0.56	0.45	0.36	0.30	0.26	0.23	0.20

Allargamento della sezione in curva (4)

L'allargamento non si applica se è inferiore a **20 cm**.

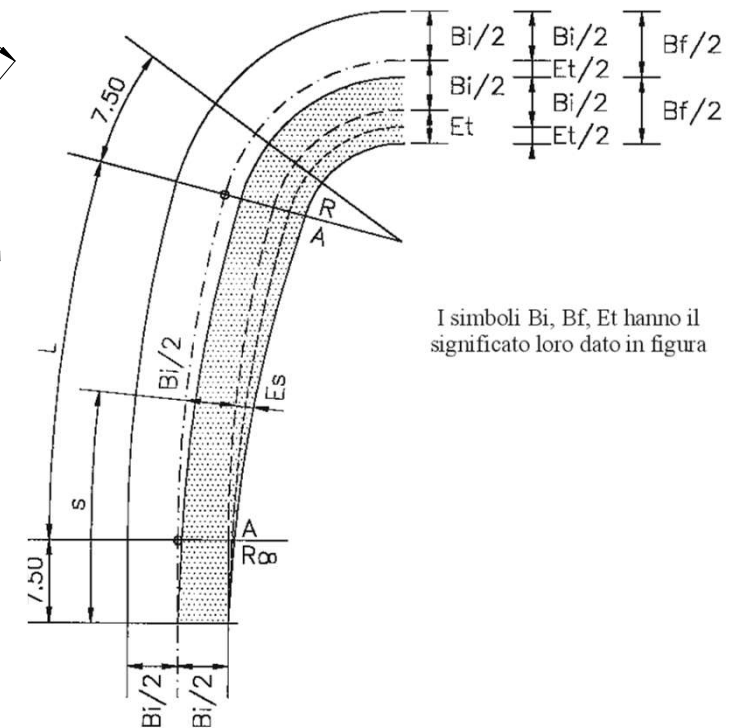
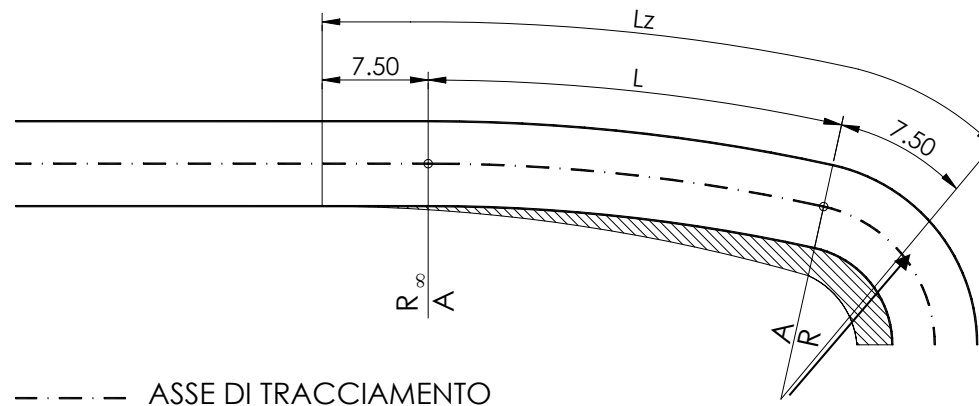
Può essere **ridotto fino alla metà** se è poco probabile l'incrocio in curva di autoarticolati, autobus...

L'allargamento della carreggiata o semicarreggiata è dato dalla **somma** degli allargamenti delle due corsie più interne alla curva.



Allargamento della sezione in curva (5)

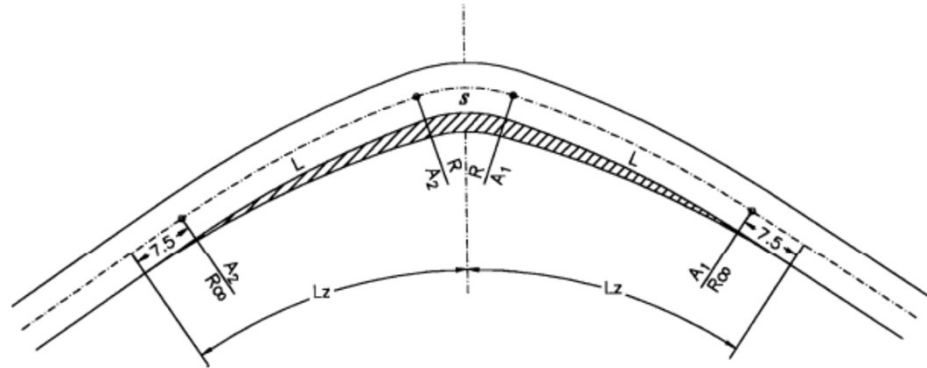
$$L_Z = 2 \cdot 7,5 + L \quad L_{Z,\min} = 15$$



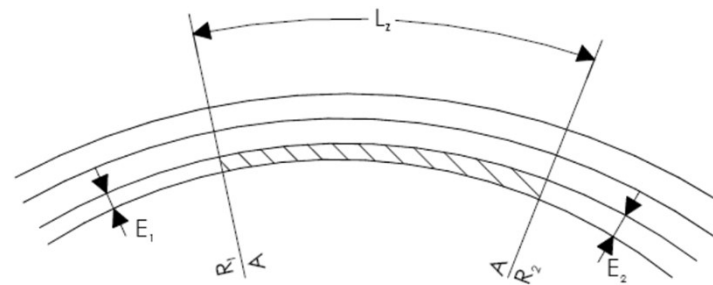
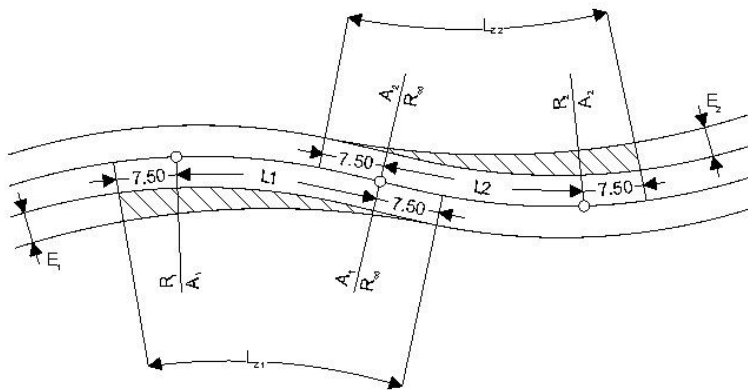
L'allargamento complessivo della carreggiata deve essere riportato tutto **sul lato interno** della curva.

Allargamento della sezione in curva (6)

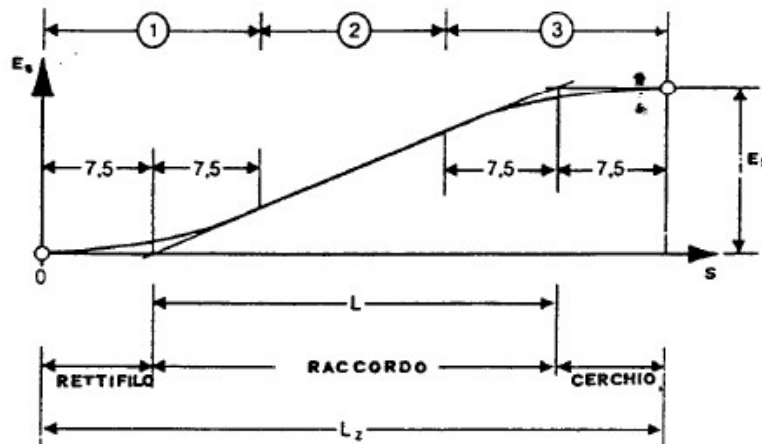
$$L_z = 7,5 + L + \frac{s}{2}$$



$$L_z = 2 \cdot 7,5 + L$$



Allargamento della sezione in curva (7)



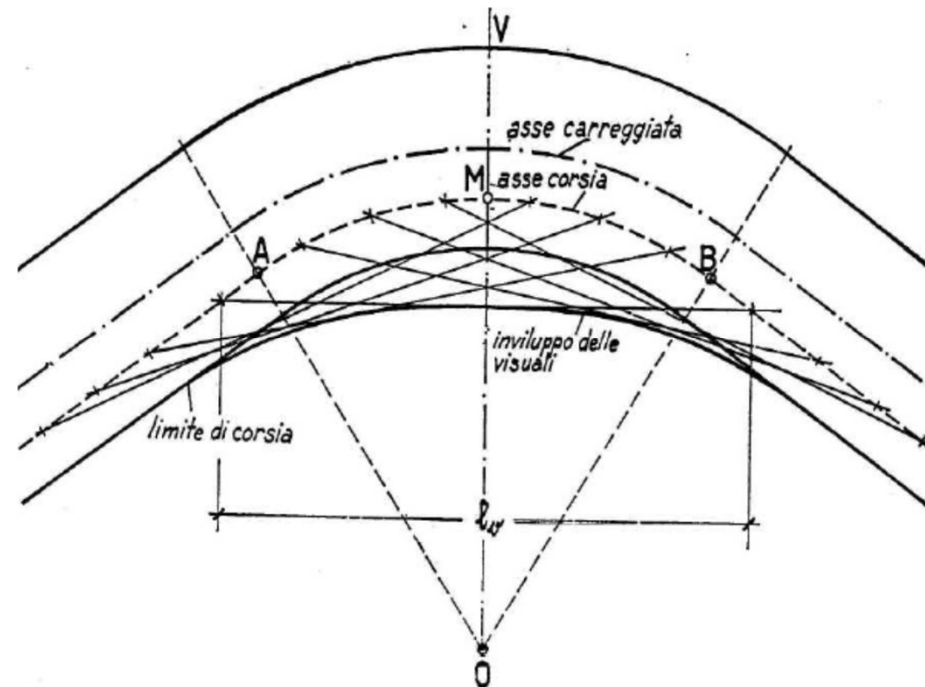
$$E_s = \frac{E_t}{30 \cdot L} \cdot s^2 \quad 0 \leq s \leq 15 \text{ m}$$

$$E_s = \frac{E_t}{L} \cdot (s - 7,5) \quad 15 \leq s \leq (L_z - 15) \text{ m}$$

$$E_s = E_t - \frac{E_t}{30 \cdot L} (L_z - s)^2 \quad (L_z - 15) \leq s \leq L_z \text{ m}$$

Allargamento della sezione in curva (8)

L'allargamento delle corsie in curva necessario al corretto inserimento dei veicoli non va confuso con l'eventuale allargamento della piattaforma necessario a garantire le distanze di visibilità.



Approfondimenti e Riflessioni



Galileo Galilei (1564 – 1642):

“Misura ciò che è misurabile e rendi misurabile ciò che non è misurabile.”

