Corso di Laurea in LOGOPEDIA

FISICA ACUSTICA

FENOMENI ONDOSI E MODI

Fabio Romanelli
Department of Mathematics & Geosciences
University of Trieste
Email: romanel@units.it

Sovrapposizione di onde stazionarie

Si sono già esaminati alcuni effetti legati all'interferenza - la combinazione di due onde che si propagano nello stesso mezzo.

Si consideri ora la sovrapposizione di onde armoniche:

Battimenti

Onde stazionarie

Modi di vibrazione

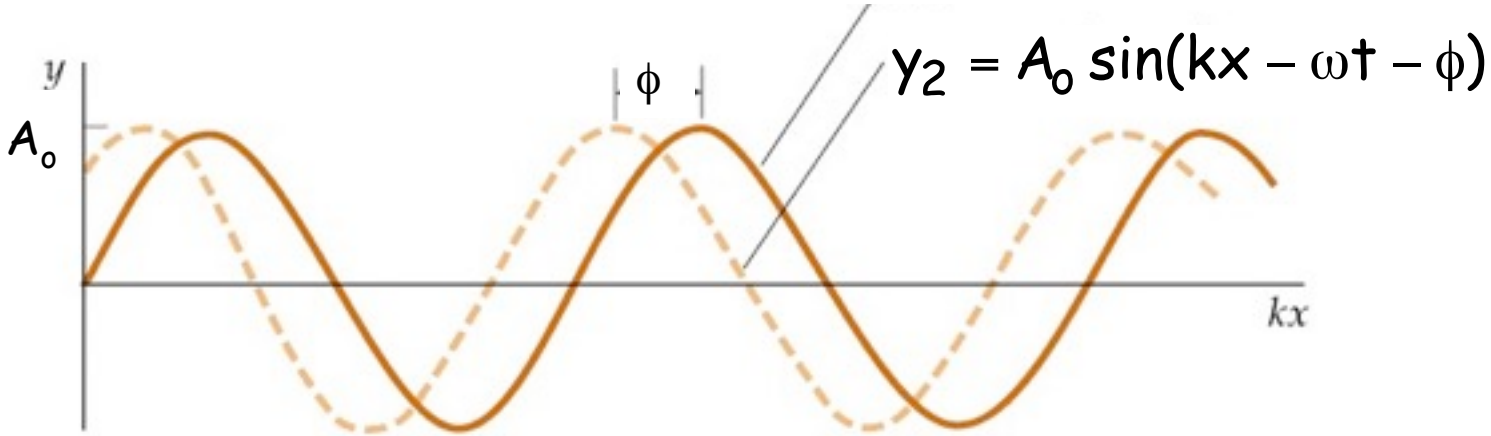
Sovrapposizione di onde armoniche

Il principio di sovrapposizione afferma che, quando due o più onde si combinano, lo spostamento risultante nel mezzo è la somma algebrica dei due (o più) spostamenti .

Si considerino due onde armoniche propagantesi nella stessa direzione, all'interno di un mezzo:

$$y_1 = A_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A_0 \sin(kx - \omega t - \phi)$$



$$y_1 = A_0 \sin(kx - \omega t) \qquad y_2 = A_0 \sin(kx - \omega t - \phi)$$

La funzione d'onda risultante sarà:

$$y = y_1 + y_2 = A_0 \sin(kx - \omega t) + A_0 \sin(kx - \omega t - \phi)$$
$$= A_0 \left[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t - \phi)\right]$$

che può essere semplificata usando:

$$\sin A + \sin B = 2\cos\left(\frac{A - B}{2}\right)\sin\left(\frac{A + B}{2}\right)$$

con $A = (kx - \omega t)$ e $B = (kx - \omega t - \phi)$

$$y = A_o \left[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t - \phi)\right]$$

$$= 2A_o \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right)$$

La funzione d'onda risultante è armonica, con stesso periodo e lunghezza d'onda delle onde iniziali .

Ampiezza dell'onda risultante = $2A_o\cos(\phi/2)$

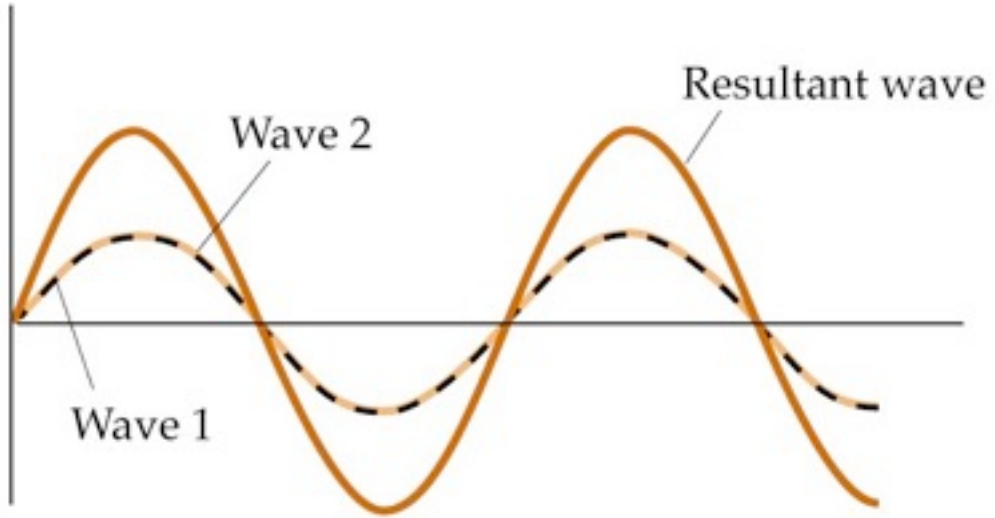
Fase dell'onda risultante = $(\phi/2)$

$$y = 2A_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right)$$

quando $\phi = 0$ $\cos(\phi/2) = 1$

e l'ampiezza dell'onda risultante = $2A_0$

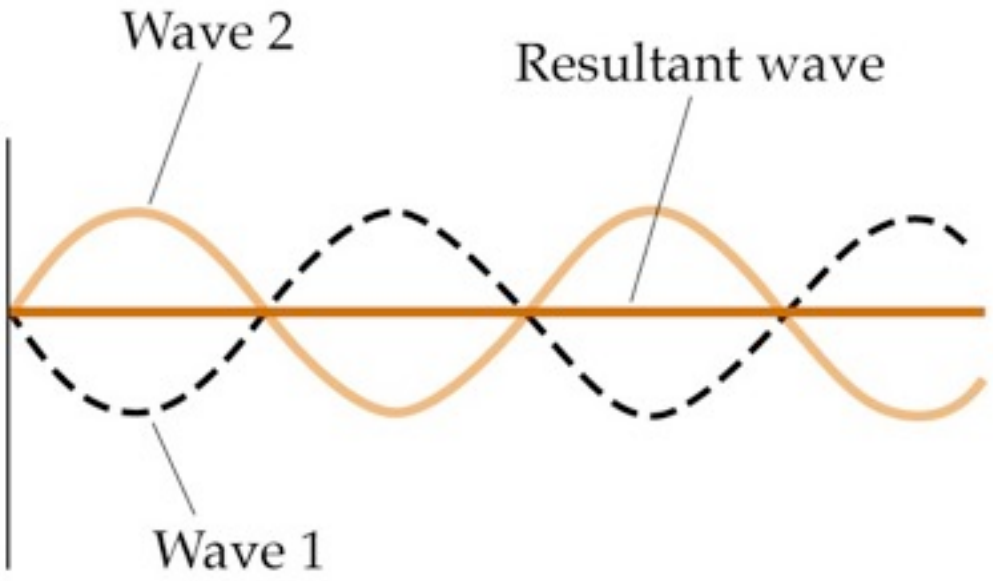
Le onde sono **in fase** e interferiscono **costruttivamente**



$$y = 2A_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right)$$

quando $\phi = \pi$, o ogni multiplo dispari di π, $\cos(\phi/2) = 0$
e l'ampiezza dell'onda risultante = 0

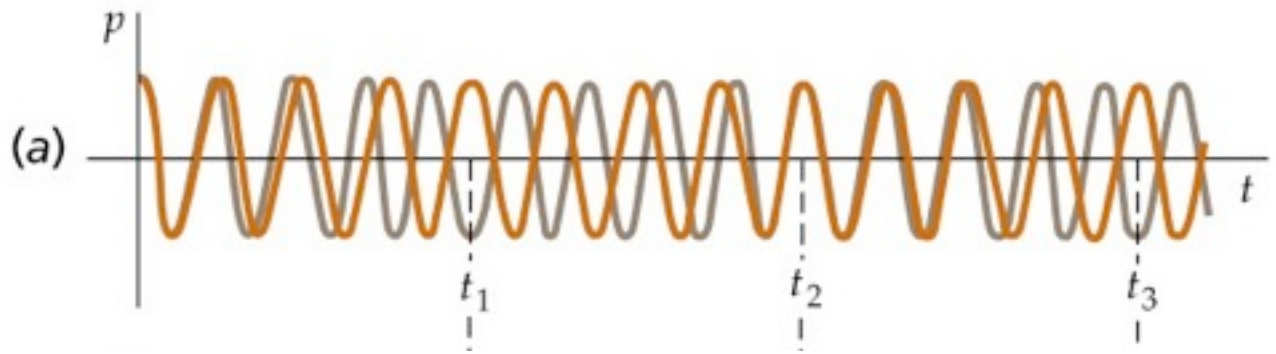
Le onde sono **in opposizione di fase** e interferiscono **distruttivamente**



Battimenti

Cosa accade se le onde hanno diversa frequenza ?

Si considerino due onde propagantesi nella stessa direzione ma con frequenze lievemente diverse:



$$y_1 = A_0 \cos(2\pi f_1 t) \qquad y_2 = A_0 \cos(2\pi f_2 t)$$

Usando il pricipio di sovrapposizione

$$y = y_1 + y_2 = A_0\left[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\right]$$

$$y = y_1 + y_2 = A_o\left[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\right]$$

che può essere semplificata usando

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

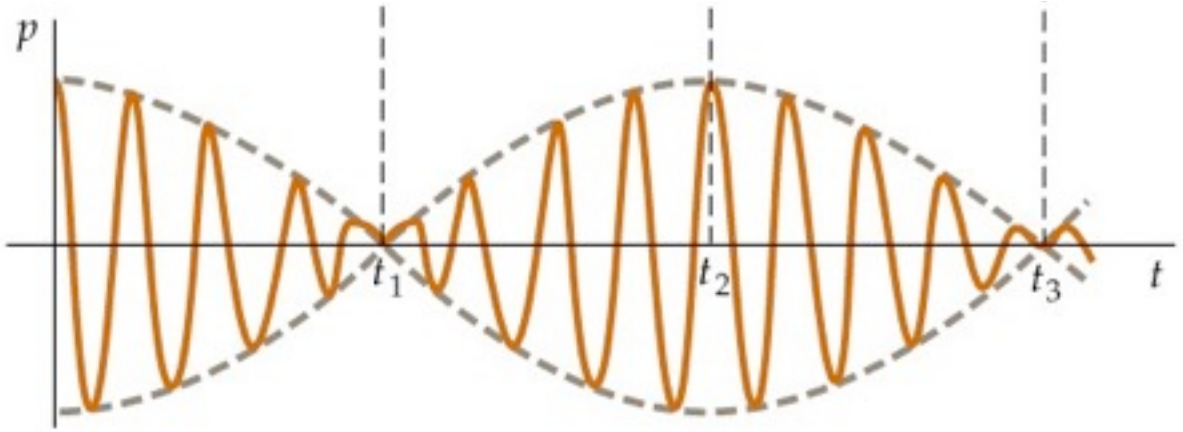
con

$$A = (2\pi f_1 t)$$

e

$$B = (2\pi f_2 t)$$

$$\therefore \quad y = 2A_o \cos\left[2\pi t\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)\right]\cos\left[2\pi t\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)\right]$$



$$y = 2A_0 \cos\left[2\pi t\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)\right] \cos\left[2\pi t\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)\right]$$

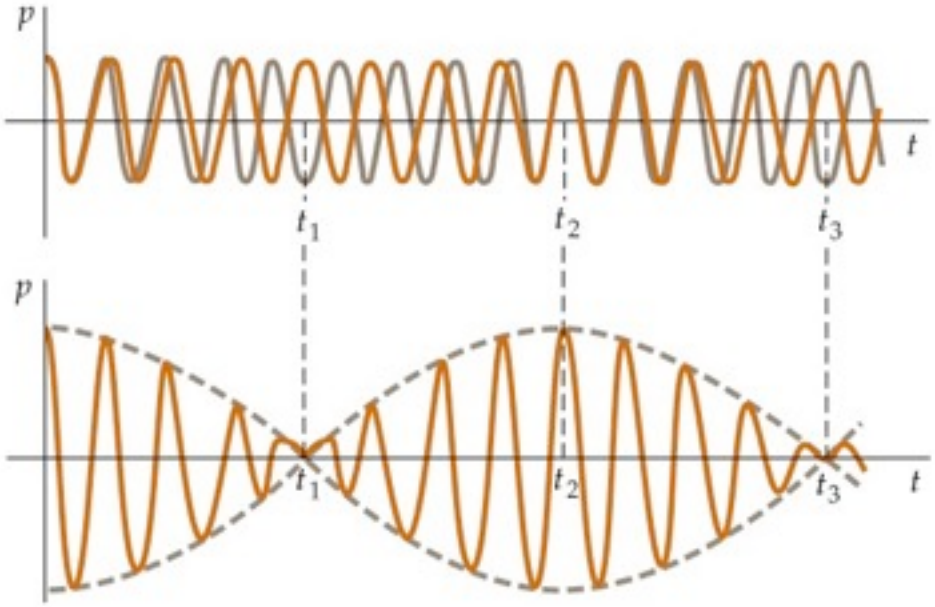
e se confrontata con le funzioni d'onda iniziali:

$$y_1 = A_0 \cos(2\pi f_1 t) \qquad y_2 = A_0 \cos(2\pi f_2 t)$$

La vibrazione risultante ha una frequenza effettiva pari a $(f_1 + f_2)/2$ ed un'ampiezza data da

$$2A_0 \cos\left[2\pi t\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)\right]$$

che varia nel tempo con una frequenza $(f_1 - f_2)/2$



un battimento si ha quando $\cos\left[2\pi t\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)\right] = \pm 1$

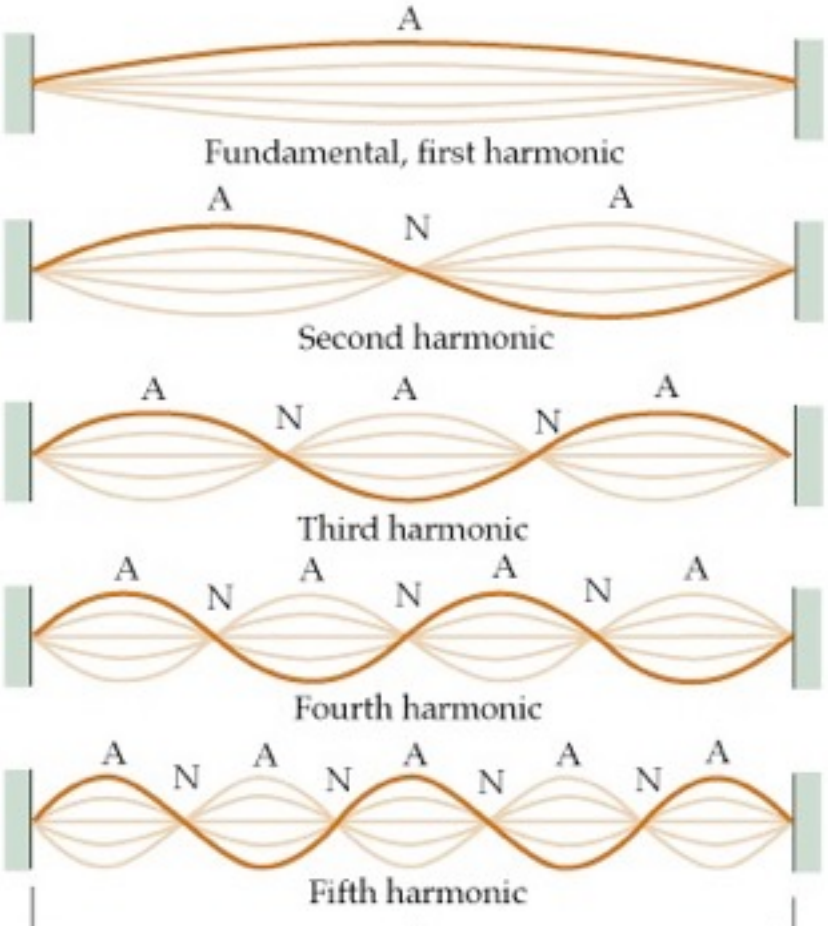
vi sono due battimenti per ciclo

e quindi la loro frequenza è = $2\,(f_1 - f_2)/2$ = $f_1 - f_2$

Onde stazionarie

Se una corda è fissata ad ambo gli estremi, le onde si rifletteranno e può instaurarsi un'onda stazionaria.

Le onde incidenti e riflesse si combineranno seguendo il principio di sovrapposizione



Funzione d'onda per un'onda stazionaria

Si considerino due onde sinusoidali propagantesi nello stesso mezzo con la stessa ampiezza, frequenza e lunghezza d'onda ma in direzioni opposte:

$$y_1 = A_0 \sin(kx - \omega t) \qquad y_2 = A_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$y = A_0 \left[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)\right]$$

Usando $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ (con $A = kx$ e $B = \omega t$)

$$y = 2A_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

che è la funzione d'onda di un'onda stazionaria

$$y = 2A_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Ampiezza = $2A_0 \sin(kx)$

Frequenza angolare = ω

Ogni particella della corda vibra come un SHM con la stessa frequenza

L'ampiezza di oscillazione di ogni particella dipende da x

Si confronti con il caso di un'onda progressiva, dove tutte le particelle oscillano con la stessa ampiezza alla stessa frequenza

Antinodi

$$y = 2A_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

La massima ampiezza ($2A_0$) viene raggiunta per sin(kx) = 1

$$\text{cioè} \quad kx = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{2} \ldots\ldots\ldots$$

ma $k = 2\pi / \lambda$ e le posizioni di massima ampiezza si hanno a

$$x = \frac{\lambda}{4}, \ \frac{3\lambda}{4}, \ \frac{5\lambda}{4} \ldots\ldots\ldots = \frac{n\lambda}{4} \quad \text{con } n = 1, 3, 5, \ldots.$$

tali posizioni sono detti **ANTINODI** e sono separati da una distanza pari a $\lambda/2$.

Nodi

$$y = 2A_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

L'ampiezza nulla si ha quando sin(kx) = 0

cioè $kx = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi.....$

$$x = \frac{\lambda}{2},\ \frac{2\lambda}{2},\ \frac{3\lambda}{2}..... = \frac{n\lambda}{2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3,....$$

tali punti sono detti **NODI** e sono anch'essi separati da una distanza pari a $\lambda/2$.

La distanza tra un nodo ed un antinodo è $\lambda/4$

Onde stazionarie su una corda ad estremi fissi

Quindi una corda di lunghezza L con gli estremi fissi

ha un numero di profili naturali di vibrazione chiamati **MODI NORMALI**

Ogni modo normale ha una frequenza caratteristica che può essere calcolata

quando la corda è sollecitata al suo centro, quel punto diventa un antinodo .

Per il primo modo normale $L = \lambda_1 / 2$

Il modo normale successivo si ha quando la lunghezza della corda L = una lunghezza d'onda, cioè $L = \lambda_2$

Il terzo modo normale si ha per $L = 3\lambda_3 /2$

In generale i modi normali si hanno per $L = n\lambda_n /2$

ie $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ dove $n = 1, 2, 3.....$

Si possono ottenere le espressioni dalla funzione d'onda

Si consideri la funzione d'onda per un'onda stazionaria

$$y(x,t) = 2A_0 \sin(kx)\cos(\omega t)$$

Corda ad estremi fissi $\therefore$ $y(x,t) = 0$ a $x = 0$ e L

$y(0,t)=0$ quando $x = 0$ siccome $\sin(kx) = 0$ a $x = 0$

$y(L,t) = 0$ quando $\sin(kL) = 0$ ie $k_n L = n\pi$ $n=1,2,3....$

ma $k_n = 2\pi / \lambda$ $\therefore$ $(2\pi / \lambda_n)L = n\pi$ o $\boxed{\lambda_n = 2L/n}$

Le frequenze naturali associate a questi modi possono essere calcolate da $f = v/\lambda$

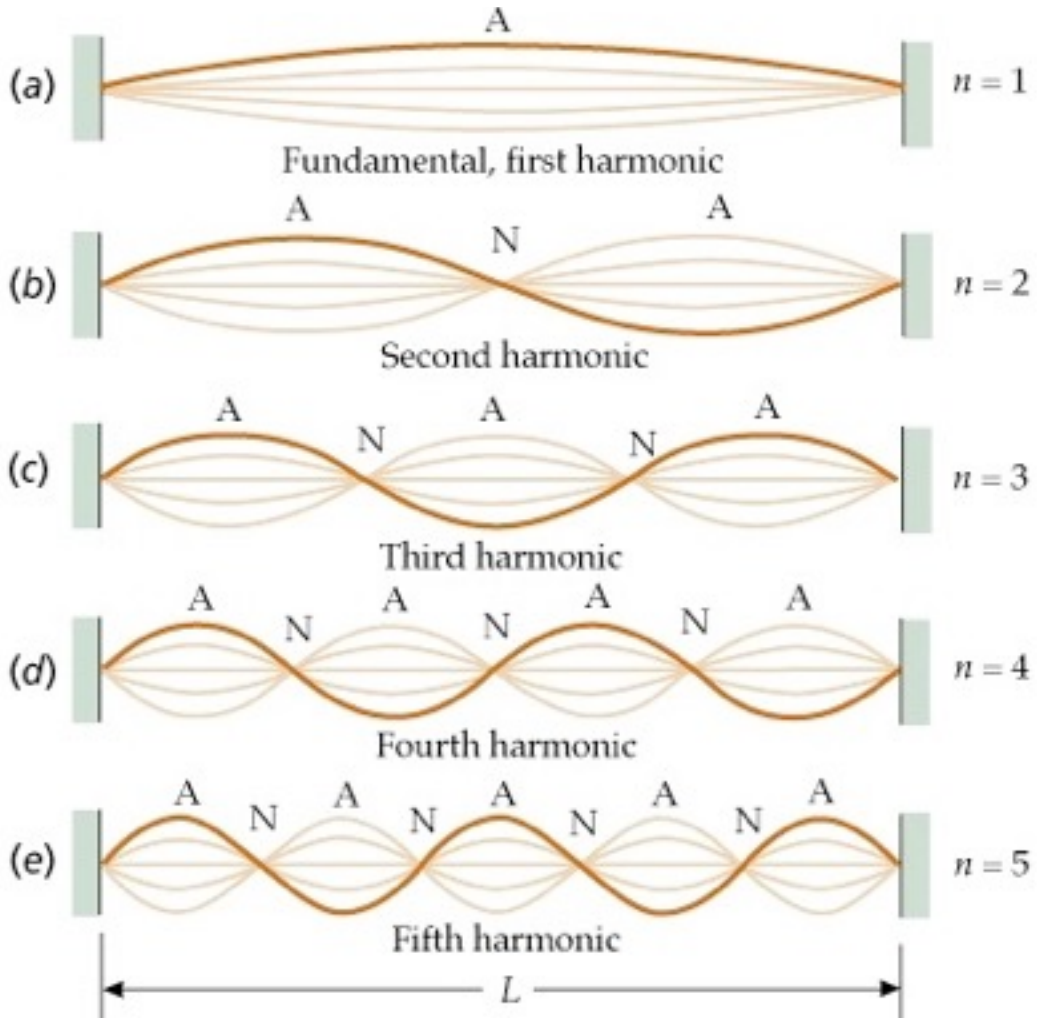
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2L} v \quad \text{con } n = 1,2,3.....$$

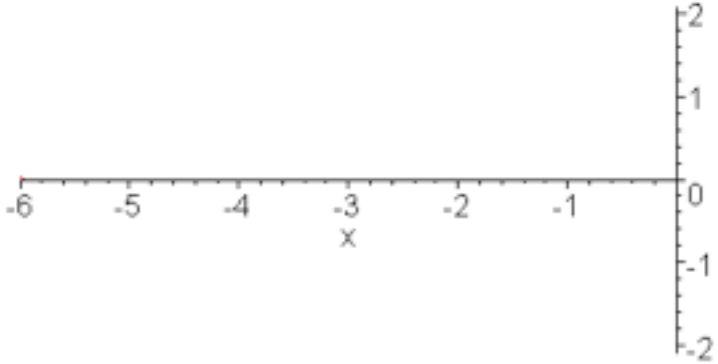
Per una corda di massa/unità lunghezza μ, sottoposta ad una tensione F si può sostituire v con $(T/\mu)^{1/2}$

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{con } n = 1,2,3.....$$

La frequenza più bassa (**fondamentale**) corrisponde a n = 1

$$\text{ie} \quad f = \frac{1}{2L} v \qquad \text{o} \quad f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$


(a)
A
n = 1
Fundamental, first harmonic
(b)
A
N
A
n = 2
Second harmonic
(c)
A
N
A
N
A
n = 3
Third harmonic
(d)
A
N
A
N
A
N
A
n = 4
Fourth harmonic
(e)
A
N
A
N
A
N
A
N
A
n = 5
Fifth harmonic
L


-6
-5
-4
-3
-2
-1
x
2
1
0
-1
-2

Interpretazione Musicale

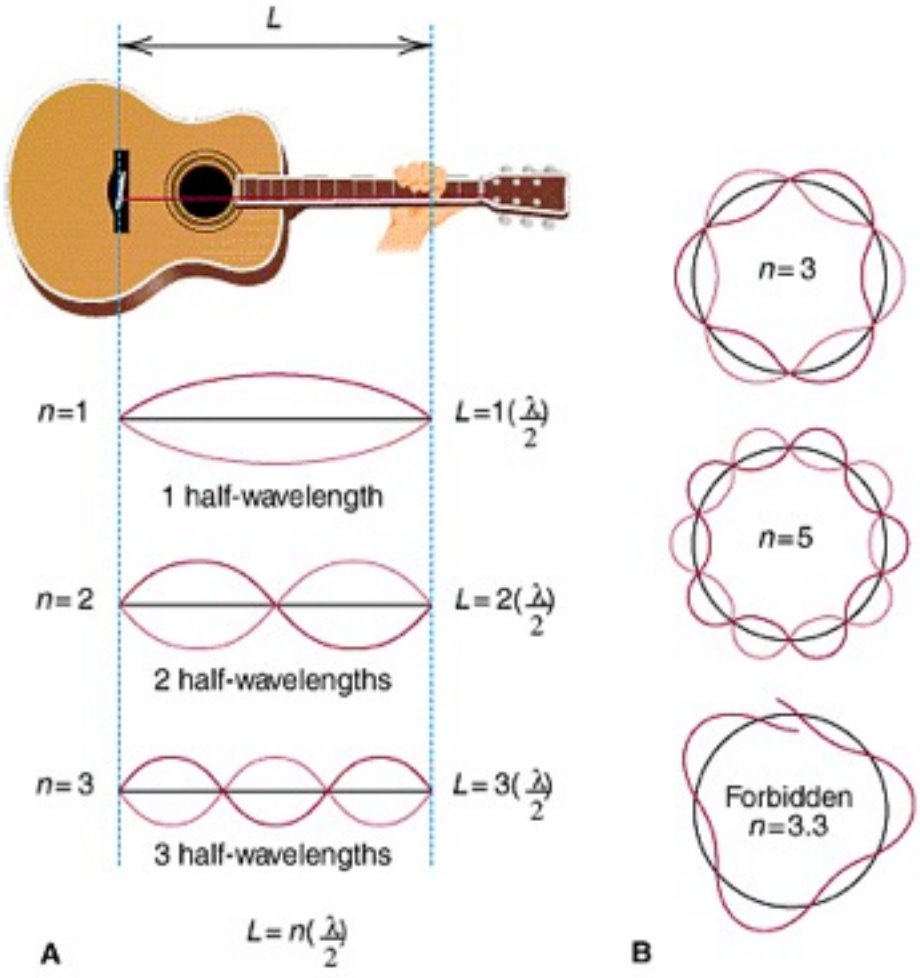
Le frequenze dei modi con n = 2, 3, … (**armoniche**) sono multipli interi della frequenza fondamentale, $2f_1$, $3f_1$……

Queste frequenze naturali più alte, assieme alla fondamentale, formano una **serie armonica**.

La fondamentale f_1 è la prima armonica, $f_2 = 2f_1$ è la seconda armonica, $f_n = nf_1$ è la n-esima armonica

In musica, le frequenze consentite vengono chiamate **ipertoni** dove la seconda armonica è il primo ipertono, etc.

Chitarre e meccanica quantistica



Strumenti musicali

Quando una corda tesa viene distorta in maniera tale che la sua forma iniziale corrisponda ad un'armonica essa vibrerà alla frequenza corrispondente.

Se la corda viene colpita (piano) o sfregata (violino) la vibrazione risultante conterrà molte frequenze. Onde con la frequenza "sbagliata" si annulleranno da sole viaggiando tra gli estremi fissi e la corda "seleziona" le frequenze corrispondenti ai modi normali.

La frequenza di uno strumento a corda può essere variata cambiando la tensione T o la lunghezza L (chitarra, violino)

Esempio

La nota *C* su di un piano ha una frequenza di 264Hz, e la *A* di 440Hz.

(a) si calcolino le frequenze dei due primi ipertoni di *C*.

(b) se le corde *A* e *C* hanno la stessa densità lineare e la stessa lunghezza si determini il rapporto delle due tensioni.

(c) se la corda *A* è lunga il 64% di *C* si determini il rapporto delle due tensioni.

(a) si calcolino le frequenze dei due primi ipertoni di *C*.

primo ipertono

$f_2 = 2\ f_1$

$= 2 \times 264$

$= 528$ Hz

secondo ipertono

$f_3 = 3\ f_1$

$= 3 \times 264$

$= 792$ Hz

(b) se le corde A e C hanno la stessa densità lineare e la stessa lunghezza si determini il rapporto delle due tensioni.

$$f_{1A} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{\mu}} \quad e \quad f_{1C} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_C}{\mu}}$$

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_C}}$$

$$\frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{440}{264}\right)^2 = 2.78$$

(c) se la corda *A* è lunga il 64% di *C* si determini il rapporto delle due tensioni.

$$f_{1A} = \frac{1}{2L_A}\sqrt{\frac{T_A}{\mu}} \quad e \quad f_{1C} = \frac{1}{2L_C}\sqrt{\frac{T_C}{\mu}}$$

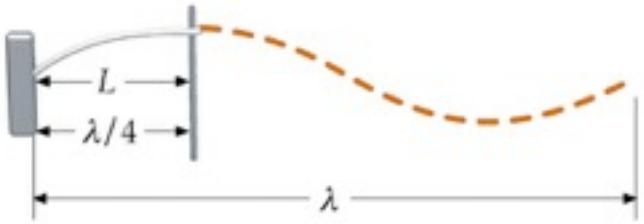
$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \frac{L_C}{L_A}\sqrt{\frac{T_A}{T_C}}$$

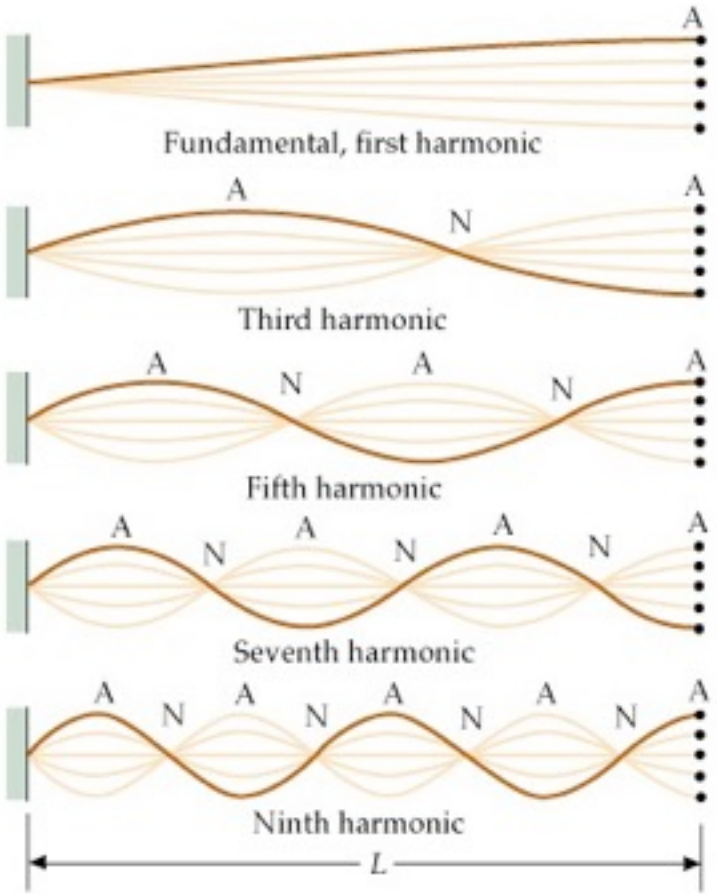
$$\frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{L_A}{L_C}\right)^2 \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{64}{100}\right)^2 \left(\frac{440}{264}\right)^2 = 1.14$$

Corda con un estremo libero

Tipler Fig 16-17





Un estremo della corda è libero, mentre l'altro è un antinodo

Per il modo fondamentale di vibrazione $L = \lambda_1/4$

Per il modo più alto successivo $L = 3\lambda_3/4$

In generale $L = n\lambda_n/4$ con n=1,3,5...

se $L = n\lambda_n/4$ allora $\lambda_n = 4L/n$

Le frquenze di risonanza sono $f_n = v/\lambda_n$

$$\therefore \quad f_n = n\frac{v}{4L} = \frac{n}{4L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

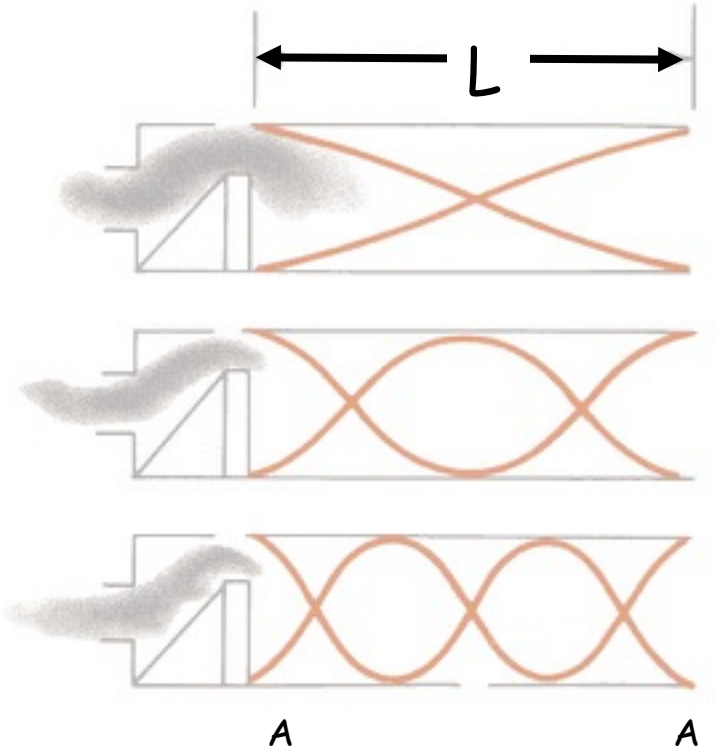
$$= nf_1 \qquad \text{con } n = 1,3,5,....$$

dove f_1 è la frequenza fondamentale

Onde stazionarie in colonne d'aria

Onde stazionarie longitudinali possono essere instaurate in colonne d'aria (eg canna d'organo).

Si consideri una canna aperta ad entrambi i lati:



1a armonica $L = \lambda_1/2$ $f_1 = v/2L$

2a armonica $L = \lambda_2$ $f_2 = 2v/2L$

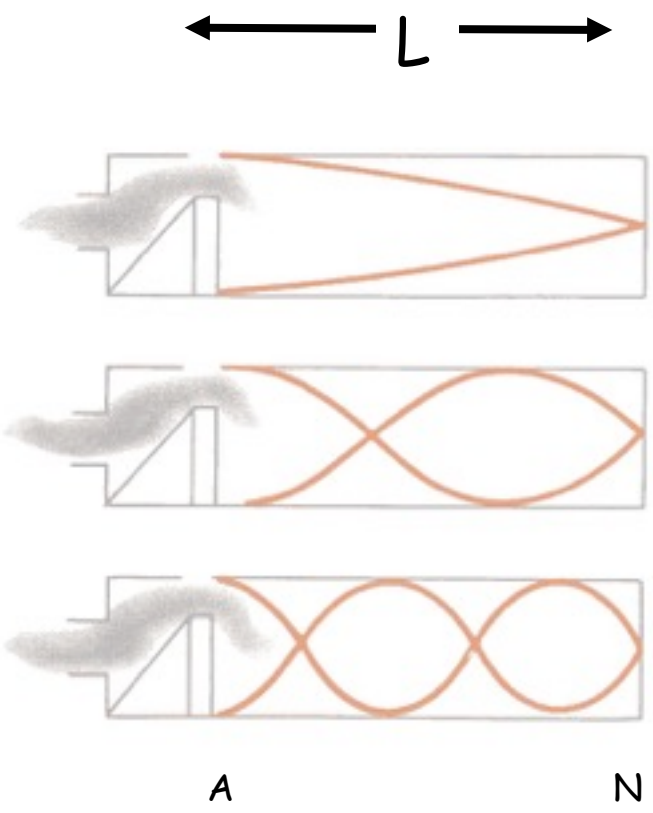
3a armonica $L = 3\lambda_3/2$ $f_3 = 3v/2L$

In generale $f_n = n \frac{v}{2L}$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$

In una canna son entrambi gli estremi aperti, le frequenze di risonanza formano una serie armonica, cioè gli ipertoni sono multipli interi della frequenza fondamentale.

$f_1 = v/2L$ $\quad f_2 = 2v/2L = 2f_1$ $\quad f_3 = 3v/2L = 3f_1$

Se si considera una canna con un estremo chiuso:



1a armonica $L = \lambda_1/4$ $f_1 = v/4L$

2a armonica $L = 3\lambda_2/4$ $f_2 = 3v/4L$

3a armonica $L = 5\lambda_3/4$ $f_3 = 5v/4L$