30 sett.

$$\boxed{z^4 + 2|z|^2 = 1}$$

$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$$r^4\cos(4\vartheta) + i r^4 \sin(4\vartheta) + 2r^2 = 1$$

$$\begin{cases} r^4\cos(4\vartheta) + 2r^2 = 1 \\ r^4 \sin(4\vartheta) = 0 \end{cases}$$

$r \neq 0$ $\sin(4\vartheta) = 0$

$\Rightarrow \cos(4\vartheta) = \pm 1$

Cominciamo $\cos(4\vartheta) = -1$

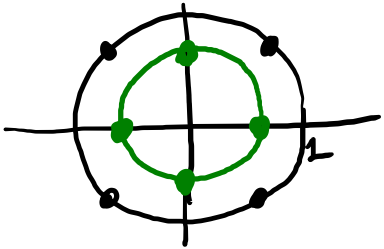
$-r^4 - 2r^2 + 1 = 0$ $u = r^2$

$u^2 - 2u + 1 = 0$ $(u-1)^2 = 0$ $u = 1 \Rightarrow r^2 = 1$

$\Rightarrow r = 1$

$$\begin{cases} \sin(4\vartheta) = 0 \\ \cos(4\vartheta) = -1 \end{cases} \qquad 4\vartheta = \pi + 2\pi k \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4}$$

$k = 0, 1, 2, 3$ $\quad \boxed{r = 1}$



$$\begin{cases} \sin(4\vartheta) = 0 \\ \cos(4\vartheta) = 1 \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, 3 \qquad \vartheta_k = \frac{2\pi k}{4}$$

Sostituiamo ora in $\quad r^4 \cos(4\vartheta) + 2r^2 = 1$

$\cos(4\vartheta) = 1 \qquad r^4 + 2r^2 - 1 = 0 \qquad u = r^2$

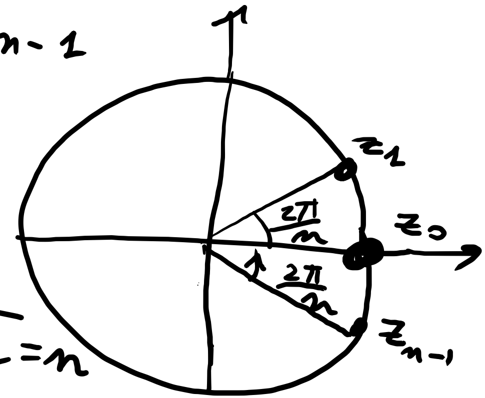
$u^2 + 2u - 1 = 0 \qquad u_\pm = -1 \pm \sqrt{1+1} = \pm\sqrt{2} - 1$

u_- va scartato $\qquad r^2 = u_+ = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{\sqrt{2} - 1}}$

$P(z) = z^n - 1$ qual'è la molteplicità delle radici?

Noi abbiamo visto che $z_k = \cos(\vartheta_k) + i\sin(\vartheta_k)$

$$\vartheta_k = \frac{2\pi k}{n} \qquad k = 0, \dots, n-1$$



Sono n radici distinte.

$$P(z) = a_n (z-1)^{m_0} (z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_{n-1})^{m_{n-1}}$$

$$a_n = 1$$

$$n = m_0 + m_1 + \cdots + m_{n-1} \geq \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ vote}} = n$$

Se per assurdo esistesse una molteplicità > 1 avrei

$n = m_0 + \dots + m_{n-1} > 1 + \dots + 1 = n \implies n > n$

assurdo

Pertanto $m_0 = \dots = m_{n-1} = 1$.

La retta reale $\mathbb{R}$.

Con $\mathbb{Q}$ denotiamo l'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

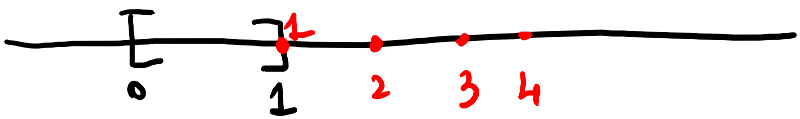
<u>Teor</u> $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

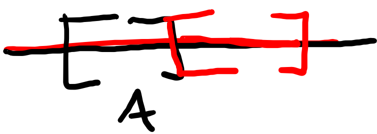
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

<u>Def</u> Due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$ formano una coppia separata se risulta

$$a \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B.$$

Es. Se pongo $A = [0,1]$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$





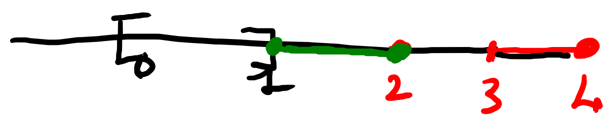
Assioma (Dedekind) Per ogni coppia separata A e B in $\mathbb{R}$ esiste un elemento di separazione, cioè esiste un $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a \le c \le b \qquad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

Per Es. $A = [0,1]$ e $B = \{2, 3, 4\}$, si ha

$$a \le c \le b \qquad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

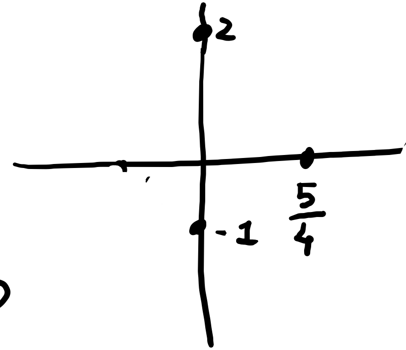
Per qualunque $1 \le c \le 2$



$A = [0,1]$ e $B = [1,2]$ allora $\exists!$ c di

separazione $c = 1$.

$$z + i\bar{z}^2 + 2i = 0$$



$$(x+iy) + i(x-iy)^2 + 2i = 0$$

$$x+iy+i\left(x^2+(-iy)^2 - 2ixy\right) + 2i = 0$$

$$x + iy + ix^2 - iy^2 + 2xy + 2i = 0$$

$$\begin{cases} x + 2xy = 0 \\ y + x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x\left(\frac{1}{2} + y\right) = 0$$

$x = 0$

$y = -\frac{1}{2}$

$$x = 0 \Rightarrow -y^2 + y + 2 = 0 \qquad y^2 - y - 2 = 0 \qquad y_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{9}}{2}$$

$$\Rightarrow y_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$y + x - y^2 + 2 = 0 \qquad y = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} + x - \frac{1}{4} + 2 = 0 \qquad x - \frac{3}{4} + 2 = 0 \qquad x = 2 - \frac{3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$z^3 \bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$$

$$z^2 |z|^2 + 3z^2 - 4 = 0 \qquad z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$r^4(\cos(2\vartheta) + i\sin(2\vartheta)) + 3r^2\cos(2\vartheta) + i3r^2\sin(2\vartheta) - 4 = 0$$

$$\begin{cases} r^4\cos(2\vartheta) + 3r^2\cos(2\vartheta) - 4 = 0 \\ r^4\sin(2\vartheta) + 3r^2\sin(2\vartheta) = 0 \end{cases}$$

$$(r^4 + 3r^2)\sin 2\vartheta = 0 \qquad r \neq 0 \Rightarrow \sin 2\vartheta = 0$$

$$\Rightarrow \cos(2\vartheta) = \pm 1$$

$$r^4\cos(2\vartheta) + 3r^2\cos(2\vartheta) - 4 = 0$$

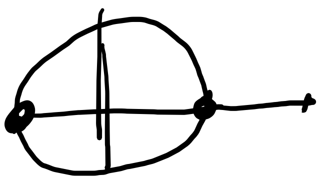
se $\cos(2\vartheta) = -1 \Longrightarrow -r^4 - 3r^2 - 4 = 0$ non ha soluzioni. Se $\cos(2\vartheta) = 1$

$r^4 + 3r^2 - 4 = 0$ $\qquad\qquad u = r^2$

$u^2 + 3u - 4 = 0$ $\qquad\qquad u_\pm = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9+16}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25}}{2}$

$u_\pm = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$. solo $u_+ = 1$ è accettab

$\Longrightarrow r = 1$



$\cos 2\vartheta = 1$
$\sin 2\vartheta = 0$

$z = \pm 1$
sono gli zeri.

Def (Retta reale estesa) La denoto con $\overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Usiamo la solita relazione di $\leq$ con

$$x \leq +\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$-\infty \leq x \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Dati $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$

$$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$$

$$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \} \quad \text{qui } a, b \in \mathbb{R}$$

$$[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \} \quad \text{qui } a \in \mathbb{R}$$

$$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \leq b \} \quad \text{qui } b \in \mathbb{R}$$

$(-\infty, +\infty)$ è un caso particolare di intervallo.

Teor (estremo superiore) Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Allora esiste ed è unico un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$, che denotiamo con $\sup X$ t.c. :

1) $x \leq \sup X \quad \forall x \in X$

2) $x \leq M \quad \forall x \in X \Longrightarrow M \geq \sup X$

$$X = \begin{cases} [a,b] \\ (a,b) \\ [a,b) \\ (a,b] \end{cases} \qquad \sup X = b$$

E' ovvio che $b \geq x \quad \forall x \in X$

Per $c > b$ risulta che c non soddisfa la seguente

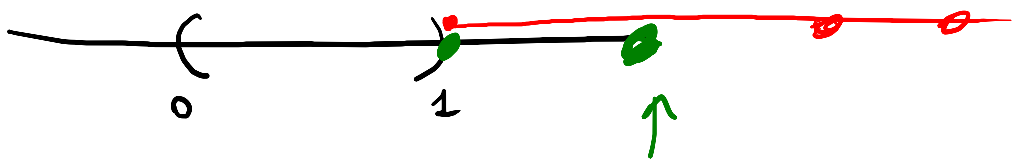
2) $x \leq M \ \forall x \in X \implies M \geq c$

Basta prendere $M = b$

Quindi $\sup X \leq b$. È facile concludere che deve essere $\boxed{\sup X = b}$.

$(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

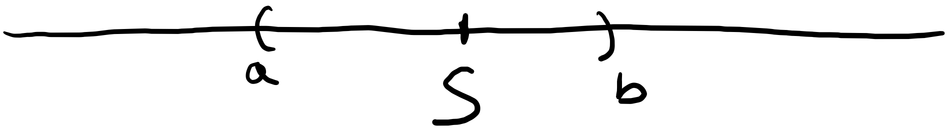
$\sup(0,1) = 1$



X = un intervallo di estremi $a < b$

$a, b \in \mathbb{R}$. Ho appena verificato che $\underbrace{\sup X}_{S} \leq b$.

Supponiamo per assurdo che $S < b$.



Supponiamo che sia $a < S < b$

$S < \frac{S+b}{2} < b$

$a < S < \frac{S+b}{2} < b \Rightarrow \frac{S+b}{2} \in (a,b) \subseteq X$

$$S = \sup X \quad , \quad \frac{S+b}{2} \in X$$

$$\frac{S+b}{2} \leq S < \frac{S+b}{2}$$

$$\frac{S+b}{2} < \frac{S+b}{2} \qquad \text{assurdo.}$$

$$\sup X = b.$$

Supponiamo di avere

$|z\ w| = |z|\ |w| \quad \forall\ z, w \in \mathbb{C}$

e dimostriamo che questo implica

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$ e $\forall\ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\left|z\ \frac{1}{w}\right| = \left|z\ \frac{\overline{w}}{|w|^2}\right| = |z|\ \left|\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right| = $$
$$= |z|\ \frac{|w|}{|w|^2} = \frac{|z|}{|w|}$$

Applicando la definizione di valore assoluto, se $\lambda \geq 0$

$|\lambda z| = \lambda\ |z| \qquad z = x + iy \qquad \lambda z = \lambda x + i\lambda y$

$|\lambda z| = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \lambda \sqrt{x^2+y^2} = \lambda\ |z|$

$|z+2| \leq |z+3i|$

$$|zw|^2 = |z|^2 |w|^2 \qquad z = x + iy \qquad w = u + iv$$

$$zw = xu - yv + i(xv + yu)$$

$$|zw|^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = x^2u^2 + y^2v^2 \cancel{- 2xyuv} +$$

$$+ x^2v^2 + y^2u^2 \cancel{+ 2xyuv}$$

$$= x^2(u^2 + v^2) + y^2(u^2 + v^2) =$$

$$= (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$$