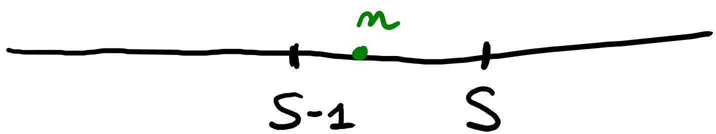
1 ottobre

**Def** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Se $\sup X < +\infty$ allora $X$ si dice limitato superiormente.

Se $\sup X = +\infty$ allora $X$ si dice illimitato superiormente.

**Teor** $\sup \mathbb{N} = +\infty$

**Dim** Poniamo $S = \sup \mathbb{N}$ e supponiamo per assurdo che $S < +\infty$.




Consideriamo $S-1$. Affermo che $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $S-1 < n \leq S$. Infatti se $\boxed{\ldots}$ è falsa allora si ha $\boxed{n \leq S-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$

Ma la proposizione $n \leq S-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ è falsa, per definizione di $S$, in particolare per la proprietà 2. Infatti dalla 2) ho

$$n \leq S-1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies S-1 \geq S. \text{ Assurdo.}$$

Perciò concludiamo che

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } S-1 < n \leq S.$$

$$\implies \quad S < n+1 \leq S \qquad \boxed{S < S} \quad \text{assurdo}$$

Conclusione $S = +\infty$.

Corollario $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+ \doteq (0, +\infty)$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $nx > y$.

<u>Dim</u> Considero $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}_+$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \frac{y}{x}$. Infatti se avessi $n \leq \frac{y}{x}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ avrei $+\infty \leq \frac{y}{x} < +\infty$ assurdo

**Teor** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X < +\infty$ e sia $S$ un numero reale. Sono equivalenti le seguenti 1) e 2)

1) $S = \sup X$ $\quad \begin{cases} 1) \ x \leq S \quad \forall x \in X \\ 2) \ x \leq M \ \forall x \in X \Longrightarrow M \geq S \end{cases}$

2) $S$ soddisfa le seguenti due proprietà

2.1) $x \leq S \quad \forall x \in X$

2.2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X$ t.c. $x > S - \varepsilon$.

**Teor.** (Estremo inferiore) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Allora esiste ed è unico un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ che denotiamo con $\inf X$ che ha le seguenti due proprietà:

1) $x \geq \inf X \quad \forall x \in X$

2) $x \geq m \quad \forall x \in X \implies m \leq \inf X$

**Esercizio** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Consideriamo

$$-X = \{-x : x \in X\}$$

$\Big($Es $X = [1, 2]$

$-X = [-2, -1]\Big)$

Allora $\inf X = -\sup(-X)$

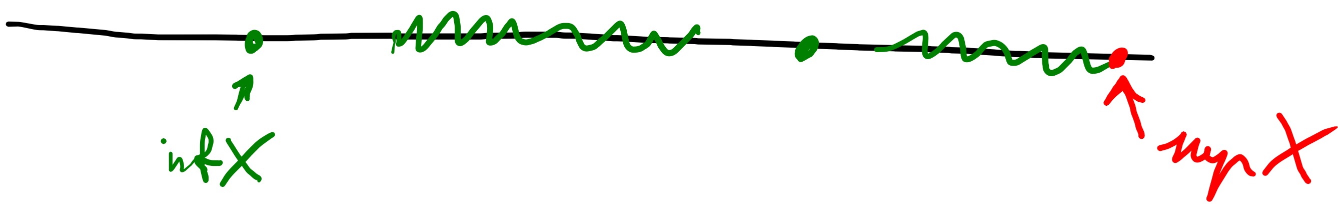
**Def** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Se $\sup X \in X$ diciamo che $X$ ha massimo $\max X = \sup X$

**Es** $(0,1)$ non ha massimo

$(0,1]$ e $[0,1]$ hanno massimo $= 1$.

Se $\inf X \in X$ diciamo che $X$ ha minimo $\min X = \inf X$

<u>Def</u> $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato se $X$ è limitato sia superiormente che inferiormente, cioè se $\sup X < +\infty$ e $\inf X > -\infty$



$(a,b)$ è limitato $\iff -\infty < a < b < +\infty$

<u>Def</u> $X \subseteq \mathbb{R}$ sarà detto finito se ha un numero finito di elementi. Altrimenti è non finito

Es $\{1,2,3\}$ è finito

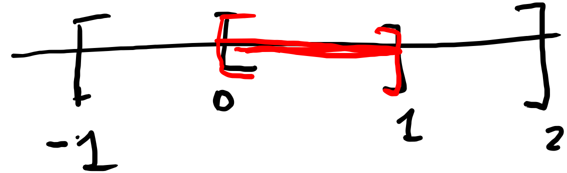
$\mathbb{N}$ non è finito

$(0,1)$ non è finito.

Esercizio Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ finito. Allora esistono $\max X$ e $\min X$.

Es $\max\{1,2,3\} = 3$

$\min\{1,2,3\} = 1$




Es. Se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ allora

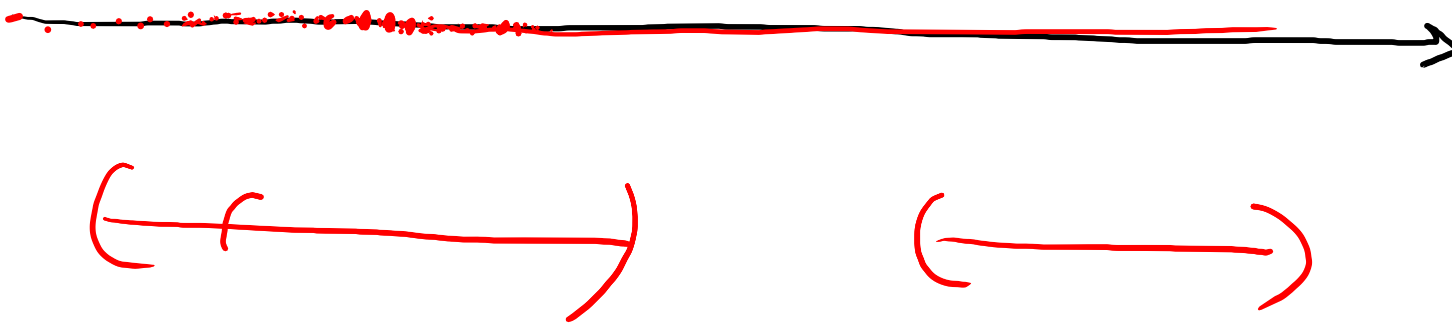
$$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y$$

Esercizio Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto.

Esiste $\min X$

Es $\min \mathbb{N} = 1$.

**Teor** (densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) $\forall\ a<b$ in $\mathbb{R}$ $\exists\ q\in\mathbb{Q}$ t.c. $a<q<b$.



**Dim** Distinguiamo tre casi

1) $0 \leq a < b$

2) $a < 0 < b$ $\qquad$ $q = 0$

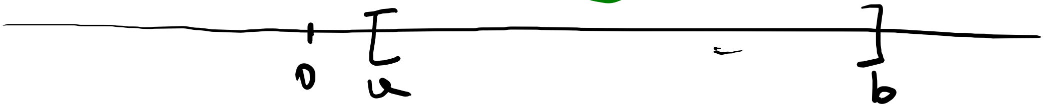
3) $a < b \leq 0$

$0 \leq a < b$


Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\dfrac{1}{n} < b - a$

$\iff \quad n > \dfrac{1}{b-a}$.

Se fosse $b-a>1$




$$X = \{ n : n > a \} \subseteq \mathbb{N}$$

$n_0 = \min X$ $\quad$ $n_0 > a$. Si tratta poi di dimostrare che $n_0 < b$

$$n_0 - 1 \le a$$

$$n_0 = \underbrace{(n_0 - 1)}_{\le a} + \overset{< b-a}{1} < a + b - a = b. \quad n_0 < b$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} < b - a$

$$X = \{ m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > a \}$$

si pone $m_0 = \min X$

Ora si osserva che $\frac{m_0 - 1}{n} \le a$ (*)

Infatti, se $m_0 = 1$, * segue dall'ipotesi $0 \le a$

Se invece $m_0 > 1$ allora (*) fosse falsa avrei

$$\frac{m_0 - 1}{n} > a \Longrightarrow m_0 - 1 \in X \Longrightarrow m_0 - 1 \ge \min X = m_0$$

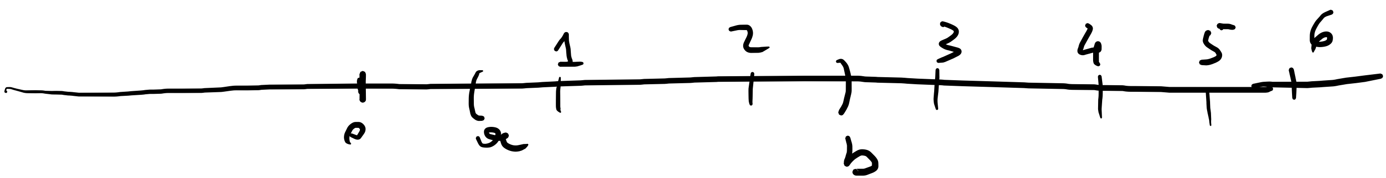
$m_0 - 1 \ge m_0$ assurdo

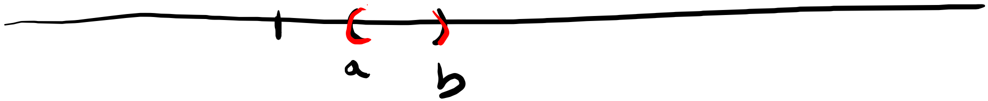
Concludo che $\frac{m_0-1}{n} \le a$. Dimostriamo che

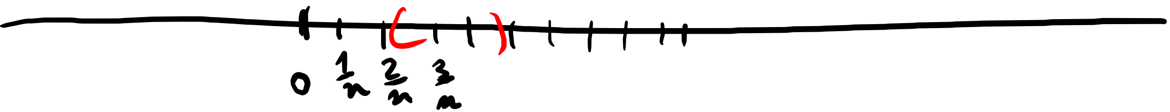
$\frac{m_0}{n} < b$. ✓

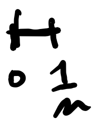
$$\frac{m_0}{n} = \frac{m_0-1}{n} + \frac{1}{n} < a + b - a = b$$

$q = \frac{m_0}{n}$ è il numero cercato.




a
b


0
1/n
2/n
3/n


0
1/n

**Def** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\}$

**Esercizio** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

$e \notin \mathbb{Q}$

$e = 2{,}718\ldots$